第 49 卷 第 1 期　　天 文 学 报　　Vol.49 No.1
2008 年 1 月　　ACTA ASTRONOMICA SINICA　　Jan., 2008

电磁波折射延迟的弯曲改正*

冒 蔚　杨 磊　铁琼仙

(中国科学院国家天文台云南天文台 昆明 650011)

摘要　针对中性大气折射延迟改正中压缩截止高度角和提高改正精度的要求，推导了电磁波折射延迟中由天文大气折射引起的路径弯曲改正的计算公式，这是在许多理论模型中给出中性大气折射延迟改正的公式时，都会在主项后边给出的，却又因为它是小量而常被忽略的一项改正. 实际上，在不太低的高度角，例如 15°，这一项就达到 1 cm 量级，是不能忽略的. 李延兴等人专门对这一改正作了推导，给出了逐步逼近的计算方法和计算值；严毫健也曾给出了直接计算的公式，计算结果却比李延兴等人的小 3 倍多，这说明对该项改正有必要作进一步的研究，拿出简便可靠的计算公式.

关键词　**大气效应，方法：数值**
中图分类号：P 124;　**文献标识码**：A

1 引言

正如文 [1] 所指出的那样，关于大气层对电磁波信号传播的影响，曾有许多学者作过研究，并建立了一些改正模型. 这些模型只对由大气层直接引起的时间延迟进行了改正，而没有考虑大气层折射引起的方向变化的影响. 大气密度变化引起的传播方向的逐渐变化，使得传播途径成为曲线，长度大于直线距离，传播时间也被延长. 这种影响对于高度角大于 30° 的测量来说是可以忽略的，因为在高度角 30° 处的改正量仅有 1 mm 的量级，并且随着高度角的增大而迅速减小，对天顶延迟几乎没有影响. 相应地，这项改正也随着高度角的减小而迅速增大，在低高度角处产生不容忽视的影响. 据文 [1] 计算，在高度角 15° 处，改正量就有 1 cm 的量级，而在 5° 处已达到 20 cm 左右. 所以在当前要求把截止高度角压缩到 5° 以内，并在低高度角处达到 1cm 改正精度的要求下，这是必须作认真考虑的一项改正.

折射弯曲，是与电磁波传播途径上各点的折射率有直接关系的一项改正. 在无法精确知道各点折射率的情况下，根据大气折射理论，可以利用地面折射率和大气密度随高度分布的假设来计算，例如仅考虑重力作用的指数分布模型. 这里有两个问题必须给予特别注意，一是指数模型的指数系数取值不同的影响，二是地面折射率的差异. 前者与取用的大气模型有直接关系，不同的模型，大气的有效高度不同，计算的改正值也不同. 如果采用美国 1976 年标准大气模型 [2]，即在 48 km 以下的大气占整个大气层含量 99.9% 的模型，大气有效高度为 6948.7 m，若像文 [1] 那样，取 86 km 以下的大气占整个大气层含量

2006-12-15 收到原稿，2007-01-12 收到修改稿
* 云南省基金 (2005A0010R) 资助项目

99.999%, 大气有效高度则为 7469.9 m, 而霍普菲尔德 [3] 的模型大气有效高度为 7972.5 m, 计算的改正值就比第一种大 14.7%. 地面折射率在各地是不同的, 除了与瞬时气温、气压有直接关系以外, 还受到本地地理环境多种因素的影响. 文 [4] 的作者将中国各地折射率差 N 的年平均值换算到海平面后, 画出了等值曲线图, 显示出从东向西和从南到北都呈现幅度较大的递减趋势, 西沙比漠河大 16%, 约 $60N$ 单位, 昆明地区比同一经度线上的中蒙边界也大 16%, 却比同一纬度线上的东南沿海小 17%. 而大气的折射率与折射率差之间仅是简单的比例关系, 可见各地在标准大气状态下的折射率也相差很大. 一个测站不同方位的地面折射率也不完全相同, 我们采用实测数据建立的 4 个方位的天文大气折射实测模型, 在不同方位之间最大的差异达到 5%[5], 当然这对于弯曲改正来说是小量, 在高度角 5° 处这种差异仅有 1 mm 量级. 所以应当推导出直接采用地面瞬时大气折射值计算折射弯曲改正的简便公式, 在可能的情况下, 直接采用天文大气折射实测模型, 换算成瞬时大气条件下的大气折射值, 用于计算. 如果没有这样的条件, 也应采用可靠的大气折射表, 作瞬时气温、气压换算后再计算.

2 对现有公式的分析

文 [1] 计算折射弯曲改正的基本思路是: 用一条折线作为折射曲线的一级近似, 然后再将折线分段用圆弧段逼近折射曲线. 在这种思想指导下, 用几何方法导出了一系列计算公式, 精确计算折线与直线及折射曲线之差, 最后构成一个弯曲改正的计算模型. 文 [1] 在推导时, 把大气的密度变化看成完全是由重力引起的, 呈球对称分布, 并且把占大气总质量 99.999% 的 86 km 高度以下的大气层分为 BC 、 CD 、 …… 、 EF 等若干子层, B 面为大气层与地面的接触面, F 面为大气层顶面, F 与信号源 (卫星)S 之间是真空, C 、 D 、 …… 、 E 等为电磁波传播途径与各层面的交点. 当每个子层的厚度足够小时, 则认为各个子层内的大气密度和折射率是常数, 信号在子层内按直线传播, 仅在两个子层的界面上发生折射. 当子层的厚度趋近于 0 时, 折线 $SFE\cdots\cdots DCB$ 就成为一条光滑的曲线, 即信号传播的实际轨迹. 它采用地面的天文大气折射角、视天顶距 z 、大气密度分布模型和各层面的地心距, 计算每个层面的天文大气折射角和每段折线 BC 、 CD 、 …… 、 EF 、 FS 的长度 l_{BC} 、 l_{CD} 、 …… 、 l_{EF} 、 l_{FS}, 求折线长度之和, 再减去测站到卫星的直线距离 d, 作为折射弯曲改正的主要部分 ΔS_2:

$$\Delta S_2 = l_{BC} + l_{CD} + \cdots\cdots + l_{EF} + l_{FS} - d\,, \tag{1}$$

$$d = (R^2 - r^2\sin^2 z)^{1/2} - r\cos z\,, \tag{2}$$

r 和 R 分别为测站和卫星的地心距, 在文 [1] 中分别取为 6371 km 和 26560 km. 折射弯曲改正的另一部分 ΔS_1 为曲线 $SFE\cdots DCB$ 比各段折线之和增加的路径长度:

$$\Delta S_1 = [4\delta_C^2 l_{BC} + (\delta_C + \delta_D)^2 l_{CD} + (\delta_D + \delta_E)^2 l_{DE} + \cdots\cdots]/24\,, \tag{3}$$

式中的 δ_C 、 δ_D 、 …… 分别为信号通过层面 C 、 D 、 …… 、 E 、 F 时入射角与折射角之差, 在这里分别被用作为曲线弧段 BC 、 CD 、 …… 、 EF 的圆心角之半. 最后取 $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$ 作为折射弯曲改正值. 我们认为, 在略去地面天文大气折射角的

误差和大气密度分布模型偏差的条件下，(1) 式和 (2) 式是严格的. 这一方法的近似之处仅在于 (3) 式中把曲线弧段 BC 、 CD 、 …… 、 EF, 看成为圆周的一段，即圆心角分别为 $2\delta_C$ 、 $(\delta_C+\delta_D)$ 、 …… 、 $(\delta_E+\delta_F)$ 的圆周弧段，圆半径分别决定于弦长 l_{BC} 、 l_{CD} 、 …… 、 l_{EF}. 因为大气的密度是渐变的，在一定层高内截取的这些曲线弧段都是曲率半径不断变化着的光滑曲线，并非圆周的一段. 当然，分层越多，各子层越薄，计算的结果越接近于实际情况. 文 [1] 采用文 [6] 的分层方法和美国 1976 年标准大气模型的有关参数 [2], 计算了改正值 ΔS_1 、 ΔS_2 和 ΔS. 这里取其部分天顶距的计算值列于表 1.

文 [7] 根据某种有限距离目标的光线弯曲改正，推广到无限远距离的目标，得到的改正值 $\delta\sigma$ 和有关项的公式为：

$$\delta\sigma = \delta S_1 + \delta S_2\,, \tag{4}$$

$$\delta S_1 = 1.24\times10^{-10}(\tan z_0 P_0/T_0)^2 R_1 R_2/(R_1+R_2)\,, \tag{5}$$

$$\delta S_2 = 2.21\times10^{-10}(\tan z_0 P_0/T_0)^2 R_1\,, \tag{6}$$

$$R_1 \approx [r_T^2-(r_0\sin z_0)^2]^{1/2} - r_0\cos z_0\,, \tag{7}$$

$$R_2 \approx [r_S^2-(r_0\sin z_0)^2]^{1/2} - [r_T^2-(r_0\sin z_0)^2]^{1/2}\,. \tag{8}$$

(7) 式中的 R_1 实际上是信号穿过大气层顶的一点到测站的直线距离，而 (8) 式中的 R_2 则是卫星到测站的直线距离. 我们取测站的地心距为地球平均半径 $r_0 = 6371\,\mathrm{km}$, 采用霍普菲尔德的对流层高度，取对流层顶的地心距为 $r_T = 6381.136\,\mathrm{km}$, 并且采用文 [1] 的卫星地心距为 $r_S = 26560\,\mathrm{km}$, 通过 (4)—(8) 式，分别计算了不同天顶距的 δS_1 、 δS_2 和 $\delta\sigma$, 也列于表 1. 从表中的数值可见，文 [1] 的数值虽然是近似的，但是含有近似成分的 ΔS_1 仅是对确定值 ΔS_2 的补偿，只占总量 ΔS 的不足 1.5%, 而且都是正值，所以折射弯曲改正的真值不会小于 ΔS_2. 而用文 [7] 的公式计算的折射弯曲改正值 $\delta\sigma$, 仅有 ΔS 的 1/4—1/3, 与实际的改正值相差较大，可见采用文 [7] 的公式是不妥当的.

表 1　采用文 [1] 和文 [7] 和本文的公式计算的折射弯曲改正值：(单位 mm)

Table 1　The calculated values of the path-curving correction with the formulae of references [1], [7] and this paper.

Z	60°	65°	70°	75°	80°	85°
δS_1	0.103	0.187	0.379	0.919	3.118	23.581
δS_2	0.185	0.334	0.676	1.641	5.571	42.205
σ	0.288	0.521	1.055	2.560	8.689	65.786
ΔS_1	0.017	0.018	0.062	0.145	0.454	2.476
ΔS_2	1.121	2.182	4.370	10.378	33.204	195.825
ΔS	1.238	2.200	4.432	10.523	33.658	198.301
$R_0(Z)$	103.99	128.52	164.13	221.47	330.50	614.59
ds_1	0.949	1.716	3.457	8.318	27.611	190.230
ds_2	1.013	1.831	3.690	8.878	29.470	203.030

3 简便改正公式的推导

如图 1 所示，取一个小的窄直角三角形作为推导用的元三角形，较长的直角边为电磁波传播途径上任意点在传播方向的元距离 Δs, 斜边为 $\sec[R(Z)] \times \Delta s$, 小的斜角为该点的瞬时天文大气折射值 $R(Z)$, 再取 $d\Delta s$ 为在传播方向距离 Δs 内的折射弯曲增长量，则有：

$$\mathrm{d}\Delta s = \sec[R(E)] \times \Delta s - \Delta s = \frac{1}{2}[R(Z)]^2 \Delta s\,, \tag{9}$$

与文 [1] 类似，大气在重力作用下，密度 $\rho(h)$ 和给定天顶距 Z 的天文大气折射值 $R(Z)$, 都随着高度的增加按指数形式减小，指数的系数取为 a, 即：

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-ah}, R(Z,h) = R_0(Z) e^{-a(r-r_0)}\,, \tag{10}$$

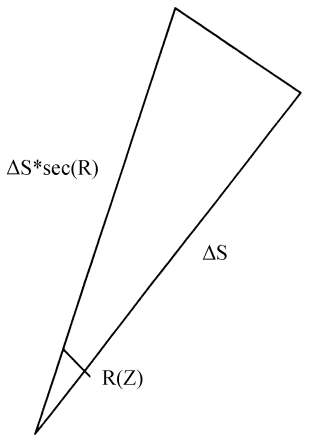

图 1 元三角形

Fig. 1 Elementary triangle

这里的 r_0 为测站的地心距， r 为地面高度 h 层面的地心距，并且有 $h = r - r_0$ 和 $\Delta h = \Delta r$. 另外，地面密度 ρ_0 与大气有效高度 H 的乘积等于各高度的密度对高度的积分，即：

$$H\rho_0 = \int_0^{\infty} \rho_0 e^{-ah} \mathrm{d}h = -\frac{\rho_0}{a} \int_0^{-\infty} e^{-ah} \mathrm{d}(-ah) = \frac{\rho_0}{a}\,, \tag{11}$$

可见，指数的系数 a 的倒数就等于大气有效高度 H. 电磁波传播方向元距离 Δs 与海拔高度变化 Δr 及天顶距之间的关系为：

$$\Delta s = \Delta r \times \sec Z\,, \tag{12}$$

将 (10) 式和 (12) 式代入 (9) 式，对整个大气层积分，得到总增长量为 $\mathrm{d}s$. 即：

$$\mathrm{d}s = [R_0(Z)]^2 \int_0^\infty e^{-2a(r-r_0)}\mathrm{d}s/2 = -[R_0(Z)]^2 \sec Z \int_0^\infty e^{-2a(r-r_0)}\mathrm{d}[-2a(r-r_0)]/4a\,.$$

把积分量 $\int_0^{-\infty} e^{-2a(r-r_0)}\mathrm{d}[-2a(r-r_0)] = -1$ 代入上式，并利用 (11) 式的关系，得：

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{4}[R_0(Z)]^2 \frac{1}{\cos^Z} H\,. \tag{13}$$

这就是利用卫星所在天顶距 Z 的地面瞬时天文大气折射值 $R_0(Z)$, 计算当时气象条件下的折射弯曲改正值的简便公式. 至于该公式在很大天顶距处，例如 $85°$ 或更大的天顶距，是否适用，尚有待于在实践中验证，因为推导该式的基础是 (10) 式，天文大气折射值在很大天顶距处是否随着高度的增加仍然严格地按照同样的规律减小，尚未见到明确的论证. 按照表 1 所列的 6 个天顶距，我们从普尔科沃大气折射表读取出标准大气状态下的折射值 $R_0(Z)$ 列于表 1, 并代入 (13) 式，计算了相应天顶距的折射弯曲改正值. 大气有效高度 H 的取值不同，对改正值的计算有直接影响，而大气模型不同， H 也不相同. 这里类似于文 [1] 取 86 km 以下的大气层占整个大气层的 99.999%, 即取 $H = 7469.9\,\mathrm{m}$, 计算得到改正值 ds_1 列于表 1, 另取用霍普菲尔德的大气有效高度 $H_H = 7972.5\,\mathrm{m}$, 对应于 91.787 km 以下的大气层的 99.999%, 计算的改正值 ds_2 也列于表 1. ds_2 比 ds_1 大 6.7%.

关于 $R_0(Z)$ 的取值，最好采用本地随方位而异的天文大气折射实测模型，换算成测量时刻气象条件下给定天顶距和给定方位的折射值. 如果没有实测模型，也应该选用一本比较精确的大气折射表，例如普尔科沃大气折射表，换算到当时气象条件下取值，虽然不能显示出不同方位之间的差异，但是在天顶距 $85°$ 处也仅有 1 mm 量级的差异，是可以忽略的.

大气有效高度 H, 必须采用当地实际的大气模型来推算，这是在一般情况下很难满足的条件. 如果要求在 $5°$ 高度角达到 1 cm 的折射延迟改正精度，则必定有建立实测模型的条件，可以通过文 [8]—[10] 中所拟定的中性大气折射延迟改正的实测模型，得到当地的大气有效高度. 即用本测站的天文大气折射实测模型，求解出标准大气状态下相应的参数值，得到映射函数 $MF(E)$ 和折射率差 $N_D(h_0)$, 并利用本测站从卫星轨道位置和测站位置拟合确定的干延迟量 ΔL_{1D} 及大气有效高度暂用值 H_D, 代入文 [8,9] 中的 (22) 式，即：

$$\Delta L_{1D} = A_D \times MF(E) \times 10^{-6} \times N_D(h_0) \times H_D\,, \tag{14}$$

求解出待定比例常数 A_D, 作为大气有效高度采用值 H_D 的修正比例系数，则得到本测站实测的大气有效高度 $H = A_D \times H_D$.

参 考 文 献

1　李延兴，胡新康，帅平. 大地测量与地球动力学. 2002, 22(1): 6

2　曹文俊，陆龙骅. 《中国大百科全书》大气科学卷，北京：中国大百科全书出版社， 20, 1987

3　Hopfield H S. J G R, 1969, 74(18): 4487

4　黄捷. 电波大气折射误差修正 (M), 北京：国防工业出版社， 1999

5　冒蔚，铁琼仙，杨磊. 天文大气折射 (M). 昆明：云南科技出版社， 2004

6 李延兴. 中国地震: 1998, 14(1): 21
7 严豪健. 天文学进展, 1995, 13(4): 380
8 Mao Wei, Zhang Han-wei, Li Bin-hua, et al. ChA&A, 31(2): 211
9 Mao Wei, Zhang Han-wei, Li Bin-hua, et al. AcASn, 2006, 47(4): 432 (冒蔚, 张捍卫, 李彬华等. 天文学报, 2006, 47(4): 432)
10 Wei Mao, Binhua Li, Lei Yang, et al. AJ, 2007, 134: 2054

The Path-curving Correction in Refraction Delay of Electromagnetic Wave

MAO Wei YANG Lei TIE Qiong-xian
(1 *National Astronomical Observatories/ Yunnan Observatory, Chinese Academy of Sciences, Kunming* 650011)

Abstract In many theoretical modes of the neutral atmospheric refraction delay of electromagnetic wave, the path-curving correction usually came out behind the primary correction of the refraction delay, but it was always neglected because it is a small correction. The formulae and the computed correction values were not encountered in papers of foreign researchers. In fact, it is about 1cm at elevating angle of 15° and about 20 cm at 5° , so it can not be neglected on the low elevation. A progressive approximate calculation method (i.e. the Equations (1)—(3) in this paper.)and the computed values for this correction were given in Yanxing Li et al. 2002[1]. The formulae for direct calculation of the path-curving correction were given in Haojian Yan 1995[2] (i.e. the Equations (4)—(8) in this paper) in which the computed values are much smaller than that given in Yanxing Li et al.2002. These results indicate that the path-curving correction should be further studied, and the convenient and reliable formula should be given. In the light of the requirement to reduce the cut-off of height angle and to improve the correction accuracy, the rigorous calculating formulae of the path-curving correction in the refraction delay of electromagnetic wave is derived in this paper, that is the Equation (13), where $R_0(Z)$ is the instantaneous astronomical refraction on the zenith distance Z of observational object. The astronomical refractive values in the state of the standard atmosphere are obtained from the local observational model of the atmospheric refraction or a precise atmospheric refraction table, and must be corrected by the temperature and pressure of the observation. H is the effective height of atmosphere, being computed theoretically by the local atmospheric distribution model. We get the astronomical refractive values in the state of the standard atmosphere from Purkovo atmospheric refractive table, and use the effective heights of atmosphere $H = 7469.9$ of Yanxing Li et al. and $H_H = 7972.5$ of H.S. Hopfield, and computed the path-curving corrections ds_1 and ds_2, respectively. These corrections at six major zenith distances are listed in table 1. Furthermore, for comparison we also list the calculated values of $\delta\sigma$ with the formulae of Haojian Yan 1995, and the values given in Yanxing Li et al.2002.

Key words Atmospheric Effects, Methods: Numerical