第 49 卷 第 2 期　　天 文 学 报　　Vol.49 No.2
2008 年 4 月　　ACTA ASTRONOMICA SINICA　　Apr., 2008

关于天文大气折射的讨论*

冒 蔚　杨 磊　铁琼仙

(中国科学院国家天文台云南天文台 昆明 650011)

摘要　通过比较天文大气折射级数表达形式和映射函数表达形式，认为对于一个具体的大气折射模型而言，前者的计算精度不会低于后者，理论推导的级数表达式则因为作了不同的近似，使收敛性较差；经过分析大气折射映射函数的母函数方法，认为这种方法不能体现地球物理和大气物理的特性；通过比较指出，采用某地特定的大气分布所建立的大气折射模型，不是各地都适用的，也不能用来评价其他的大气折射模型；为了提高修正精度，关键问题在于采用有效的方法，在不同方位直接测定瞬时大气折射值，建立本地的随方位而异的大气折射实测模型.

关键词　天文仪器，方法与技术：大气效应，天体测量学

中图分类号：P 12;　　**文献标识码**：A

1 引言

在地面天体测量与空间天体测量并存的时代，在空间大地测量迅速发展的年代，有关学科的发展，对地面测量提出了更高的精度要求，以便与空间测量配合，发挥各自的优势，促进其发展. 相应地，天文大气折射也面临着更高的要求，不仅要增大可用的天顶距范围和提高改正精度，而且要消除不同方位和恒星不同光谱型之间的差异，因为在学科发展对现代地面测量提出的精度要求下，这种差异已经成为制约地面测量精度提高的瓶颈. 更有意义的是：多方位高精度的天文大气折射值，还能从光学波段换算到射电波段，建立高精度的随方位而异的中性大气折射延迟改正模型，把天顶延迟改正精度提高到 1 mm 以内，低地平高度角处的改正精度提高到厘米级，并且把截止高度角压缩到 5° 以内 [1], 这是现代空间大地测量所追求的改正精度. 采用现有的测定瞬时天文大气折射和建立多方位大气折射实测模型的一套有效方法 [2], 并利用天文大气折射与中性大气折射延迟之间的内在联系，这个目标是能够达到的.

天文大气折射的理论研究，从 16 世纪末丹麦天文学家 B. 第谷开始，经过许多著名学者多年的努力和研究成果积累，到 19 世纪 60 年代才有了得到多数学者认可的大气折射理论. 这种理论认为，光线传播途径上各点的折射值，与这些点的大气折射率的变化率和光线的入射角有关，总的折射量通过传播途径全程上的积分得到. 在当时，由于各

2006-12-15 收到原稿，2007-01-12 收到修改稿

* 云南省基金 (2005A0010R) 资助项目

点的折射率无法确切地取得，又因为所假设的大气密度分布表达式往往不是解析可积函数，只能采用一个地区平均的地面折射率和密度分布的某种假设，把积分式分解为级数形式，再对各项取不同的近似以后，逐项进行理论计算．密度分布的假设不同，得到的级数表达式和大气折射表也稍有不同．1870 年问世的普尔科沃大气折射表，就是采用欧洲中部地区的平均折射率，代入理论的天顶距正切或正割级数公式中编制的，天顶距 75° 以内的级数有 5 项，在 80° 则达到 7 项．这种形式似乎成了经典模式，一百多年来几乎没有变化．由于在理论推导中，各项取近似时，没有严格的物理依据，致使级数值在大天顶距收敛很慢，甚至在 84° 处就会出现发散现象．这种现象引起一些学者对能否采用级数形式表达天文大气折射模型产生了怀疑，认为 “折射改正公式只能限于一个较窄的高度角范围内使用”[3]．为了改善这种状况， Marini[4] 在天文大气折射公式中，采用了与大气折射延迟改正模型中的映射函数类似的连分式，终于在一个世纪后出现了与经典模式不同的表达形式．但是也有学者认为 “这种形式在折射延迟的映射函数中就遇到一些缺点，母函数的概念和天文大气折射的映射函数有助于提高到较高的精度和达到较宽的高度角覆盖范围”[5]，似乎又有一种表达形式问世．对此，我们仔细比较了一些文章中的不同表达形式后认为，采用映射函数表达形式来拟合一个具体的大气折射表或折射模型，在某些情况下是可取的，至于能否或需要取代传统的级数表达方法，是值得讨论的．采用级数表达形式来拟合一个具体的大气折射表或折射模型，是不存在收敛与否的问题的．其实，不管采用怎样的表达形式，利用某一大区域内大气分布的平均参数，甚至几个测站高空大气探测资料平均模拟结果，都不是各地通用的，更不用说在某些假设下所作的理论推导，因为一个地方的实际的大气折射模型与当地的地形及周围的环境有关，是由当地的许多因素决定的，也不可能是球对称．因此，利用一个特定大气模型得到的天文大气折射映射函数表达式的计算值，来评价另一个特定条件下的模型计算结果，认为可以替代它， “并应用到天文和大地测量中去”[6]，也是值得商榷的．关于大气折射模型的通用性问题，特别是怎样才能得到有用的大气折射模型的问题，更应该认真讨论．

2　关于天文大气折射的表达形式

大气密度分布的一些假设，往往与大气的实际分布有较大的差异，加之其复杂的时变性，在一些不确切的近似下作理论推导得到的级数表达式，在大天顶距处收敛性较差，甚至出现发散现象，是不足为奇的，普尔科沃大气折射表就是这样．但是这并不能说明天文大气折射不能用级数形式来表示，因为一本给定的大气折射表，或公式计算值，是一个确定的数列，采用级数表达式来拟合，拟合精度仅决定于数列的变化规律和级数的项数，在数列所及的天顶距范围内，不存在收敛好不好或发散问题．文 [6] 把精度仅达 0.1′ 的华盛顿天文年历大气折射计算公式，作为级数表达式收敛性较差、在近地平方向有发散现象的例证，只是一种误解，因为该天文年历，在天顶距 75° 两边，采用了两个公式来计算折射值，小于 75° 的区段内采用的是单项式，在大于 75° 的区段则是分式，分子和分母都是高度角的二次多项式 [8]，所以它根本不是级数表达式．其精度要求仅 0.1′，是非常粗糙的，任何精密的天体测量和大地测量都不会采用这样的公式，它更不能作为天文大

气折射模型的代表. 被国际上广泛采用的普尔科沃大气折射表, 以及我国地面测量中用得最多的《中国天文年历》蒙气差表, 才能称为天文大气折射表或模型, 前者的列表天顶距达 85°, 将其数列用 4 项级数表达式拟合, 得:

$$R(Z) = 60.2293'' \tan Z - 0.06560 \tan^3 Z + 0.00016113 \tan^5 Z - 2.87 \times 10^{-7} \tan^7 Z\,, \quad (1)$$

后者的最大天顶距为 76°, 对其整度数的列表值, 仅需采用 3 项级数表达式拟合, 得:

$$R(Z) = 60.1036 \tan Z - 0.0660 \tan^3 Z + 0.00016042 \tan^5 Z\,. \quad (2)$$

在它们所给定的天顶距范围内, 所有的拟合值, 都没有出现大于 $\pm 0.01''$ 的残差. 这说明, 天文大气折射模型或列表值是完全可以用级数来表示的. 至于理论推导的级数表达式, 在尚有许多大气参数不能确定, 甚至导致这些参数变化的因素和变化规律都尚未彻底了解的情况下, 与本地实际的大气折射模型是有差异的, 更不能反映测站周围地理环境的影响, 它的收敛或发散, 仅是一个数学问题. 一个适应于本地具体条件的大气折射表或模型, 应该是在从天顶附近到尽可能大的天顶距范围内, 实测得到并换算到标准大气状态下的一组与方位有关随天顶距变化的数据, 把这样的数据模拟成高精度的级数表达式总是能够做到的.

至于采用连分式的映射函数表达式来给出天文大气折射表, 或体现天文大气折射模型, 也仅是一个数学问题. 当 Marini[4] 给出他的连分式映射函数时, 就企图用不同的参数, 来体现光线在不同天顶距的弯曲程度. 这里对连分式的形式, 要求更简单, 因为不存在天顶归一问题, 只要利用 Marini 最初给出的形式, 即每层分母的第 1 项为天顶距 Z 的余弦函数 $\cos Z$, 或者是高度角 E 的正弦函数 $\sin E$. 参数的个数是重要的, 像列表值达天顶距 85° 的普尔科沃大气折射表, 至少要有 4 个参数, 最好有 5 个参数, 不过其计算精度都低于 $\pm 0.01''$. 从 (1) 式和 (2) 式可见, 还是级数表达式更方便, 能直接估计出折射值的大小; 在给定的天顶距范围内, 能根据精度要求, 知道所需计算的项数, 而映射函数表达式, 却难以做到.

3 关于母函数方法

关于母函数方法, 文 [6] 给出的定义为: "我们把用余误差函数展开式来表示天文大气折射映射函数的方法称为天文大气折射研究的母函数法". 文 [6] 进一步 "用与余误差函数相联系的不完整 Γ – 函数的连分式展开形式, 我们求得连分式形式的天文大气折射映射分式":

$$m'(\xi_0) = \cfrac{1}{\cos\xi_0 + \cfrac{A_1}{I^2 \sec\xi_0 + \cfrac{A_2}{\cos\xi_0 + \cfrac{13.24969}{I^2 \sec\xi_0 + 173.4233}}}}\,. \quad (3)$$

其中 ξ_0 为真天顶距, I 为 '正规化天顶距参量', 由下式来定义:

$$I=\sqrt{\frac{r_0}{2H}}\cot\xi_0\,. \tag{4}$$

r_0 为地球半径，参数 H 定义为 '正规化大气有效高度'. 文 [7] 曾就母函数法和正规化天顶距参数的引进给予了评价： "本文引进了大气折射映射函数的母函数方法，在所有的映射函数表达式中，均含有正规化有效天顶距参数 K (本文作者注： K 即文 [6] 中的 I). 它的引入不仅使映射函数与地球物理模型的联系更加紧密，而且也反映球对称大气模型的结果." 这里仅引入的地球半径代表地球物理模型和大气有效高度代表大气模型的做法是比较少见的，我们还是给予认可，但是必须弄清楚映射函数计算值与它们的相关性如何？以及连分式参数的确定性如何？

这里，先将 (4) 式变形，改写为：

$$I=I_0\cot\xi_0, I_0=\sqrt{r_0/2H}\,. \tag{5}$$

在给定的模型中， I_0 为常数. 把 (5) 式代入 (3) 式，作变换后，得：

$$m'(\xi_0)=\cfrac{1}{\cos\xi_0+\cfrac{A_1/I_0^2}{\csc\xi_0\cot\xi_0+\cfrac{A_2/I_0^2}{\cos\xi_0+\cfrac{13.24969/I_0^2}{\csc\xi_0\cot\xi_0+173.4233/I_0^2}}}}\,. \tag{6}$$

为了更清楚地理解，用 (5) 式的 I 代替文 [7] 中的 K, 代入文 [7] 的 (18) 式，则有：

$$m(\xi_0)=\cfrac{1}{\cos\xi_0+\cfrac{D_1/I_0^2}{\csc\xi\cot\xi_0+\cfrac{D_2/I_0^2}{\cos\xi_0+\cfrac{D_3/I_0^2}{\csc\xi_0\cot\xi_0+D_4/I_0^2}}}}\,. \tag{7}$$

从 (7) 式清楚可见， I 或文 [7] 中 K 的引入，在用给定的大气分布模型求解映射函数参数时，仅使得参数的符号由 D_i 改写为 D_i/I_0^2, 参数的数值不变. 也就是说，各天顶距的映射函数计算值，不会因 r_0 和 H 的取值不同，即 I_0 的不同而不同. 所以，上面所引的评价是不确切的， '正规化天顶距参量' 的引入，没有在映射函数与地球物理模型之间产生联系，更不用说 "联系更加紧密". 这就是我们对这些文献中母函数法的看法，它没有产生新的表达形式.

关于连分式的参数，我们注意到，文 [3,5—7] 中，对连分式各个参数的取值，令人难以捉摸，有些参数，在这篇文章中取为气象读数和其他一些参量的函数，在那篇文章里却取为常数；函数表达式也不相同，不同表达式的常数项之间也相差较大，却没有给出明确的说明. 例如文 [3] 分别用 (21) 式和 (23) 式给出的计算大气折射延迟用的两个参数模型 $UNSW931$ 和 $UNSW932$, 前者的 4 个参数都是 e 、 T 、 h 的二次函数和 P 、 β 的一次函数，而后者的 4 个参数则是 P 、 e 、 T 和 β 的二次函数，与 h 无关. 这些函数关系的物理意义是什么？两者为什么不同？都没有给予说明. 为了比较采用不同参

数模型的计算结果，我们取用文 [3] 和文 [7] 所给的同样的气象条件和其他参量采用值，即：总气压 $P = 1013.25\,\mathrm{mb}$, 水汽压 $e = 0$, 温度 $T = 15^\circ\,\mathrm{C}$, 对流层大气温度垂直梯度 $\beta = -6.5^\circ\,/\mathrm{km}$, 对流层顶高度 $h = 11.231\,\mathrm{km}$, 地球半径 $r_0 = 6378\,\mathrm{km}$, 正规化大气有效高度 $H = 8452.4\,\mathrm{m}$, 并且取天顶延迟为 $2.300\,\mathrm{m}$, 代入文 [3] 的相应公式，用这两个模型计算不同高度角的折射延迟，在 10° 和 2.5° 处两者分别相差 $1\,\mathrm{cm}$ 和 $12\mathrm{c\,m}$, 与文 [3] 中的 “低于 2.5° 的高度角处的精度优于 $1\,\mathrm{cm}$” 之说竟相差一个数量级以上．在文章中所给的精度要求下，究竟该用哪个模型，难以定夺．

在计算天文大气折射的公式中，除了映射函数的参数以外，折射率或折射率差也是一个重要的参量．文 [5] 以 (11) 式或文 [6] 的 (19) 式，即上面的 (3) 式，作为映射函数表达式，把第 3 、 4 两个参数取为固定常数，另两个参数 A_1 、 A_2 在文 [5] 的 (17) 式或文 [6] 的 (25) 式中用 P 的一次函数， e 、 T 和光波波长 λ 的二次函数给出．令人难以理解的是在这两篇文章计算天文大气折射的公式中，却采用了不同的群折射率差，光波频率修正系数也不相同．我们采用上面所给的气象读数和有关参量，分别代入文 [5] 和文 [6] 的有关公式，在光波波长 λ 介于 $0.400\mu \sim 0.700\mu$ 之间、天顶距 45° 计算不同波长的天文大气折射值 dz[5] 和 dz[6], 列于表 1．表中还给出了不同波长的参数 A_1 、 A_2 和映射函数 m 计算值，以及用两篇文章所给公式计算的光波频率修正系数 f[5] 和 F[6], 也给出了法国光学专家和天文学家丹容给出的折射常数理论值和换算到气温 15° 的相应值 [9]．可见，尽管 f[5] 与 F[6] 之间的差异较大， dz[5] 和 dz[6] 之间的差异却很小，仅 $0.002''$ 量级，说明两组公式是在同一约束条件下自恰的．尽管如此，计算值反映的折射值随波长的变化率比丹容的理论值变化率大三倍以上．我们改用相折射率差作了同样的计算，即采用文 [6](21) 式右边第 1 个括号内的数值，取 $f(0.532) = 1$ 作为约束条件，得到相折射率差 N_x 及相应的光波频率修正系数 $f_0(\lambda)$ 分别为：

$$N_x = 79.1280 \times f_0(\lambda) \times 1013.25/288.15\,, \tag{8}$$

$$f_0(\lambda) = 0.797815 + 0.005549/\lambda^2 + 0.0000463/\lambda^4\,. \tag{9}$$

利用同样的映射函数，计算得到天顶距 45° 不同波长的天文大气折射值 $dz[x]$, 也列于表 1 的最后一列． $dz[x]$ 随波长的变化率与气温 $15^\circ\,\mathrm{C}$ 条件下的理论值一样，而且与理论值仅相差 $0.01''$, 说明 (8) 式和 (9) 式是正确的．可见，在天文大气折射中，如文 [5] 和文 [6] 样，采用群折射率差是不恰当的，应该采用相折射率差．为了进一步说明这个问题，我们还取 $\lambda = 0.532\mu$, 在不同天顶距计算了 dz[5] 和 $dz[x]$, 列于表 2．可见两者之间，在高度角 65° 相差 $1.11''$, 在 5° 和 2° 处则分别相差 $23.5''$ 和 $41.4''$．我们认为，这里的 $dz[x]$ 比较可靠，因为它与理论值相当一致，与表 2 中普尔科沃大气折射表在气温 15° 条件下的数值 $dz[p]$ 也比较接近，其间的系统差主要是由计算 $dz[x]$ 的映射函数与普尔科沃大气折射表的映射函数不一致引起的．

表 1　采用不同公式计算天文大气折射随波长的变化

Table 1　The changes of the astronomical refraction with the wavelength are calculated by different formulas

λ	理论值	(15°)	$f[5]$	$F[6]$	A_1	A_2	m	$dz[5]$	$dz[6]$	$dz[x]$
0.400	61.43	58.23	1.0493	1.0764	0.5817	1.3036	1.4120	62.63	62.63	58.24
0.500	60.61	57.45	1.0082	1.0342	0.5793	1.3027	1.4121	60.18	60.18	57.46
0.532	60.45	57.30	1.0000	1.0258	0.5787	1.3025	1.4121	59.68	59.69	57.30
0.600	60.18	57.05	0.9869	1.0123	0.5778	1.3021	1.4121	58.90	58.90	57.05
0.700	59.92	56.80	0.9743	0.9994	0.5773	1.3019	1.4121	58.15	58.15	56.81

表 2　以文 [5] 和文 [6] 公式计算天文大气折射值的比较

Table 2　The comparison of the calculated values of the astronomical refraction by means of the formulas in the paper [5] and paper [6]

z	25°	45°	65°	80°	85°	87°	88°
$dz[5]$	27.86	59.68	127.30	324.25	589.5	837.6	1037.0
$dz[x]$	26.75	57.30	122.23	311.32	566.0	804.2	995.6
$dz(p)$	26.62	57.04	121.83	313.30	582.6	.....	.....

我们还通过论证和验算比较，得出了明确的结论 [1]: 对于一个给定测站和给定方位的天文大气折射映射函数或大气折射延迟改正模型中的映射函数，其参数应为常数，它们仅随测站和方位而异，折射常数或折射率差应该随着观测时刻的气象条件而变，而且在应用中要做两种变换，一是因为大气密度随着气温、气压变化，用已有的物理定律把它们换算到观测时刻的气象条件下，这是一项较大的变换，二是因为这些物理定律都是针对理想气体而言的，必须采用在建立天文大气折射实测模型时所求解得到的变换参数 [1], 把折射常数或折射率差换算到实际气体条件下，这是一项微小的改正.

4　建立本地大气折射模型的必要性

在文 [6] 的表 1 中，作者把 “利用测站上空的探空气球所获得的大气垂直分布资料，用路径积分的数值来重新拟合映射函数 (19) 式的参数 A_1 和 A_2,” 进而处理的结果，与美国佛罗里达州的探空气球积分结果做比较，对其自身的精度很满意，我们认为这是可以理解的. 只是在天顶距 75° 两边各有一个几乎成线性变化的系统差，说明比较的双方，至少有一方存在着不容忽视的缺陷. 我们认为，即使作者的结果没有问题，也仅能看成是某一测站的或某种特定条件下的结果，用这一结果来评价其他的大气折射表或模型是不妥当的. 该表中列出了与华盛顿天文年历天文大气折射公式计算值的比较结果，在天顶距 25° 、45° 和 65° 处，后者的偏差分别为 $-0.997''$ 、$-2.09''$ 和 $-3.99''$, 从这几个数值以及文 [6] 表 1 所列其他天顶距的数据，明显地可见有一个与天顶距有关的系统差. 但是这一折射公式计算值与普尔科沃大气折射表相比，这 3 个天顶距的差异仅分别为 $0.07''$ 、$0.19''$ 和 $0.92''$, 与《中国天文年历》蒙气差表相比，则分别为 $0.13''$ 、$0.32''$ 和 $1.20''$, 虽然也有明显的系统差，却比文 [6] 表 1 所列数值小几倍. 在天顶距 75° 、80° 、83° 、85° 处，与普尔科沃大气折射表的差异分别为 $0.17''$ 、$-1.34''$ 、$-2.12''$ 、$-3.67''$, 也比文

[6] 表 1 所列的偏差小几倍. 可以说, 文 [6] 既然认为华盛顿天文年历的大气折射公式计算结果有这么大的误差, 那么, 普尔科沃大气折射表和《中国天文年历》蒙气差表也应该有几乎同量级的误差. 天顶距 65° 以内的区段, 是多年来地面天体测量和大地测量最常用的观测区段, 如果世界上的这些观测, 从这样的大气折射表中取得的修正值有 $0 \sim 4''$ 的误差, 将会引起同量级的系统差和弥散, 近两个世纪的地面天体测量和大地测量不是都应该给予否定吗? 这说明文 [6] 的结果只是特定条件下的计算值, 适应于它自身特定的系统. 因为各个测站的大气折射模型是由本地多种因素决定的, 用一个测站的资料拟合的结果, 来评价其他的大气折射表或折射模型, 并企图替代它, "应用到天文和大地测量中去", 是难以接受的.

不同测站的地面折射率是不相同的. 黄捷 [10] 曾将全国各地的折射率差换算到海平面后, 画出了等值曲线图, 可以看出, 从南向北和从东到西, 折射率差都呈递减趋势, 西沙比漠河地区大 16%, 昆明地区也比同一经度线上的中蒙边界大 16%. 而大气的折射率与折射率差之间仅是简单的比例关系, 可见各地在标准大气状态下的折射率也相差很大. 同一地点不同方位之间的折射率也不相同, 人们早就发现折射率水平梯度的存在, 我们用观测数据建立的本地 4 个方位的天文大气折射实测模型也给予了证实. 这些都说明, 实用的大气折射模型, 应该是随测站和方位而异的. 所以, 为了提高其修正精度, 以及进一步提高中性大气折射延迟的改正精度, 在高精度要求下及有条件的地方, 应该采用经过实践证明有效的测量方法, 在不同方位直接测定天文大气折射值, 建立本地多方位的大气折射实测模型和折射延迟改正实测模型. 这是提高天文大气折射修正精度和折射延迟改正精度的根本途径.

参 考 文 献

1 Mao Wei, Zhang Han-wei, Li Bin-hua. AcASn, 2006, 47(4): 432 (冒蔚, 张捍卫, 李彬华, 等. 天文学报, 2006, 47(4): 432)
2 冒蔚, 铁琼仙, 杨磊. 天文大气折射. 昆明: 云南科技出版社, 2004
3 YAN Hao-jian, PING Jin-song, AJ, 1995, 110(2): 934
4 Marini J W. Radio Science, 1972, 7(2): 223
5 YAN Hao-jian. AJ, 1996, 112(3): 1312
6 Yan Hao-jian. AcASn, 1988, 39(2): 113 (严豪健. 天文学报, 1998, 39(2): 113)
7 严豪健, 平劲松, 陈义, 等. 测绘学报, 1996, 25(1): 67
8 The Astronomical Almanac for the year 1996, Washington: US Government Printing Office, London: HMSO
9 丹容著. 李珩译. 球面天文学和天体力学引论. 北京: 科学出版社, 1980
10 黄捷. 电波大气折射误差修正. 北京: 国防工业出版社, 1999

On the Discussion of Astronomical Atmospheric Refraction

MAO Wei YANG Lei TIE Qiong-xian
(*National Astronomical Observatories/ Yunnan Observatory, Chinese Academy of Sciences, Kunming* 650011)

Abstract The series expansion method and mapping function expansion method for astronomical refraction are analyzed in this paper. It is shown from the comparison between those two methods that the computational accuracy from the former one is not lower than that from the latter for a certain refraction model. The series expansion method in the theoretical derivation is often lower in astringency because of various approximations. It is also analyzed that the actual situations on the generator function method in the astronomical refraction mapping function can not indicate the characteristic of the geophysics and atmospheric physics. It is pointed out that the previous refraction model was built using a specific atmospheric model in a certain place and it is not suitable for all places, in particular, it can not be used judging other refraction model. The key to improve the correction accuracy is that the effective methods must be used while to determine directly the instantaneous refraction values and to build the azimuth-dependent observational model of the astronomical refraction.

Key words Astronomical Instrumentation, Methods and Techniques: Atmospheric Effects, Astrometry