第 49 卷 第 2 期　　天 文 学 报　　Vol.49 No.2
2008 年 4 月　　ACTA ASTRONOMICA SINICA　　Apr., 2008

X 射线脉冲星自主导航的光传播时间方程

孙维瑾 † 费保俊 肖 昱 季诚昶

(装甲兵工程学院基础部 北京 100072)

摘要 详细讨论了 X 射线脉冲星自主导航系统的广义相对论效应, 采用 DSX 体系的后牛顿近似方法, 计算出 1PN 度规下的光线弯曲轨迹和时间延缓以及 2PN 度规下的引力延缓, 得到 X 射线脉冲自主导航的高精度测量方程.

关键词 天体力学: 相对论

中图分类号: P 131; **文献标识码**: A

1 引言

美国国防高等研究计划局 (DARPA) 在 2004 年提出了一个天体导航计划 ——X 射线脉冲星自主导航系统 (X-ray Source-based Navigation for Autonomous Position Determination Program), 简称 XNAV. 它的基本原理与 GPS 类似, 是通过测量观测者与 X 射线脉冲星的距离来确定观测者的空间位置和时间, 具有相当好的稳定性、安全性和较高的测量精确度. 作为一种备份和技术支持, 它将有效地改善和加强 GPS 及其他太空系统的技术状态 [1].

如图 1 所示, 在太阳质心系 (BCRS) 中, 设 X 射线脉冲星 (p) 的速度为 $\boldsymbol{v}_p$, 脉冲传播方向单位矢为 $\boldsymbol{n}$, 脉冲星发射第 1 和第 N 个脉冲信号的事件分别为 $(T_0, \boldsymbol{R}_0)$ 和 $(T_p, \boldsymbol{R}_p)$, 观测者 (o) 接受到这两个信号的事件是 $(t_0, \boldsymbol{r}_0)$ 和 $(t_o, \boldsymbol{r}_o)$, 则发射时间 $\Delta t_p = T_p - T_0$ 和接收时间 $\Delta t_o = t_o - t_0$ 的关系为 [2]

$$\Delta t_o = \Delta t_b + \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_o}{c} + \delta t_a + \delta t_v + \delta t_G + \delta t_D\,, \tag{1}$$

$$\delta t_a = -\frac{1}{2cR_0}(r_o^2 - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_o)^2), \tag{2}$$

$$\delta t_v = -\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_p}{c}\Delta t_p - \frac{\boldsymbol{v}_p\cdot\boldsymbol{r}_o - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_p)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_o)}{cR_0}\Delta t_p + \frac{v_p^2 - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_p)^2}{2cR_0}\Delta t_p^2\,, \tag{3}$$

$$\delta t_G = (1+\gamma)\sum_k \frac{GM_k}{c^3}\ln(r_{ko} + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{ko})\,, \tag{4}$$

$$\Delta t_b = \Delta t_p + \frac{R_0}{c} + (1+\gamma)\sum_k \frac{GM_k}{c^3}\ln(2R_0)\,. \tag{5}$$

2006-10-10 收到

† sunweijin06@sina.com

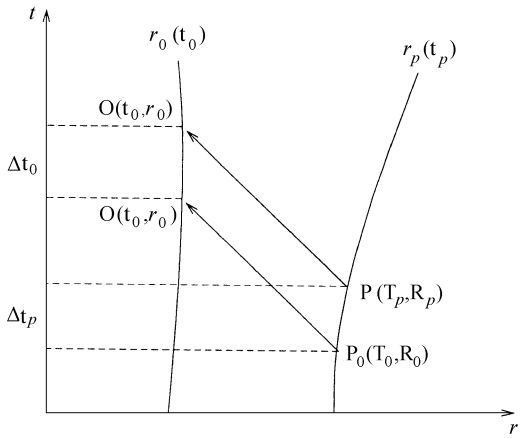

图 1　X 射线脉冲传播时空图.　$r_o(t_o)$: 观测者世界线;　$r_p(t_p)$: 脉冲星世界线

Fig. 1　X-ray pulse propagation space-time scheme $r_o(t_o)$: the observer's world line; $r_p(t_p)$: pulsar's world line

以上为 XNAV 的基本测量方程，式中各项的物理意义分别为：

(1) Δt_o 为观测者测量 N 个脉冲的时间间隔，是直接观测量;

(2) Δt_b 是太阳系质心接收 N 个脉冲的时间间隔的零级近似，用来作为时间计算的基准;

(3) $n \cdot r_o/c$ 是脉冲从太阳系质心系 R 处到观测者的传播时间的零级近似，是确定观测者位置矢量 r_o 的主要部分;

(4) δt_a 是周年视差的影响，与第 2 项一起统称 Roamer 频移;

(5) δt_v 是由于脉冲星的运动速度产生的 Doppler 频移;

(6) δt_D 是星际间等离子体的色散延缓，它正比于 D/f^2, 其中 D 是色散量，　f 是 X 射线脉冲的中间频率;

(7) δt_G 是广义相对论效应产生时间误差，　(4) 式中的 M_k 是太阳 ($k =$ "$\otimes$"), 地球 ($k =$ "$\oplus$") 和太阳系其他行星 ($k = 1, 2, \cdots, N$) 的质量，　$\boldsymbol{r}_{ko}$ 是观测者相对于这些星体的矢径.

从理论上讲，如果观测者同时接收到 3 颗脉冲星的 X 射线脉冲，计算出 X 射线脉冲传播的时间差，由 (1) 式提供的 3 个方程

$$\Delta t_o^{(i)} = \Delta t_b^{(i)} + \frac{\boldsymbol{n}^{(i)} \cdot \boldsymbol{r}_o}{c} + \cdots \quad (i = 1, 2, 3)\,, \tag{6}$$

即可解出观测者在太阳质心系中的位置矢量 $\boldsymbol{r}_o = (x_o, y_o, z_o)$—— 这就是 XNAV 的基本测量原理.

本文将主要讨论 XNAV 的广义相对论效应, 它是由光线弯曲和引力延缓产生的. 前者是因为引力导致光传播路径偏离 "直线" 而发生弯曲，导致传播时间延迟; 后者是由于引力场中光传播的坐标速度小于真空中的光速引起的. 由于 (4) 式的量级 $GM_\otimes/c^3 \sim 10^{-5}\,\mathrm{s}$

远大于 XNAV 的测量误差，所以必须考虑高阶效应.

2 1PN 度规下的光线弯曲和引力延缓

无论是光线弯曲还是引力延缓，太阳引力场都是起主要作用，所以我们首先考虑太阳引力场中光线弯曲效应. 这里有两点说明：首先，在 Schwarzschild 度规下光子的轨迹方程是有严格解的，但由于 Schwarzschild 度规不具备线性化的要求，我们不能直接应用这个结论，必须在 1PN 度规下求解. 其次，我们之所以只考虑太阳对光线弯曲的影响，是因为讨论 1PN 引力延缓时只打算计算平面运动，如果计入地球等星体的作用，就不得不考虑空间运动，这将使问题变得相当复杂.

设脉冲星、太阳和观测者所在的平面为 $\{x,y\}=\{r,\phi\}$, 在 1PN 度规下光传播方程由下式决定

$$\mathrm{d}s^2=(1-\frac{2w}{c^2})c^2\mathrm{d}t^2-(1+\frac{2w}{c^2})\mathrm{d}l^2=0\,, \tag{7}$$

式中 $w=GM/r$ 是不考虑四极矩修正项的引力场标势， $dl=\sqrt{dr^2+r^2d\phi^2}$ 是二维空间的欧氏几何长度.

令拉格朗日函数

$$L=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}=\left[\left(1-\frac{2w}{c^2}\right)c^2\dot{t}^2-\left(1+\frac{2w}{c^2}\right)\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\right)\right]^{1/2}\,,$$

其中的 "$\cdot$" 号表示对固有时间 τ 求导，拉格朗日方程为

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\mu}\right)=0\,,\quad (x^\mu\,|\mu=0,1,2)=(ct,r,\phi)\,.$$

由于拉格朗日函数中不包含坐标 t, ϕ, 故存在两个一次积分

$$\begin{cases} c^2\left(1-\dfrac{2w}{c^2}\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=E \\ r^2\left(1+\dfrac{2w}{c^2}\right)\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}=J \end{cases}\,.$$

式中的 E, J 为积分常数，因为当引力场消失时 $(w=0)$ 分别表示光子的能量和角动量，所以上两式也可看成广义相对论的能量和角动量守恒律. 将上式代入 (7) 式后化简

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2+u^2=\frac{E^2}{c^2J^2}\left(\frac{1+2w/c^2}{1-2w/c^2}\right),\quad \left(u=\frac{1}{r}\right)\,. \tag{8}$$

右边的系数也是一个守恒量，我们可取 $r\to\infty$ 处的值来表示. 因为该处的引力场消失，广义相对论退化为狭义相对论，因而有

$$\frac{E^2}{c^2J^2}=\frac{c^2P_\infty^2}{c^2(\boldsymbol{r}_\infty\times\boldsymbol{P}_\infty)^2}=\frac{1}{(r_\infty\sin\phi_\infty)^2}=\frac{1}{R_s^2}\,,$$

R_s 近似为太阳质心到光线轨迹的最近距离. 将上式代入 (8) 式后对 ϕ 再微分一次，就得到光线弯曲轨迹的标准微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}+u=\frac{2GM}{c^2R_s^2}\,. \tag{9}$$

因为当 $M=0$ 时，其解应退化直线方程，故上式的解为

$$u=\frac{\cos\phi}{R}+\frac{2GM}{c^2R_s^2}\,,$$

或者

$$r=\frac{R_s}{\cos\phi+\varepsilon}\,,\quad \left(\varepsilon=\frac{2GM}{c^2R_s}\equiv\frac{R_g}{R_s}\right). \tag{10}$$

式中的 R_g 是星体的引力半径 (Schwarzschild 半径). 方程 (9) 虽然与 Schwarzschild 度规下的严格解略有差别，但求得的光线偏转角是一致的 [3].

现在讨论 1PN 度规下的引力延缓. 由 (7) 式可知光的传播时间方程应为

$$\mathrm{d}t=\frac{1}{c}\left[\frac{1+2w/c^2}{1-2w/c^2}(\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\phi^2)\right]^{1/2}\approx\left(r^2+\frac{4GM_\otimes}{c^2}r\right)\frac{\mathrm{d}\phi}{R_s}\,. \tag{11}$$

由于太阳引力半径和实际半径的量级分别为 $10^3\,\mathrm{m}$ 和 $10^8\,\mathrm{m}$, 无量纲常数 $\varepsilon<10^{-5}$, 其他星体的 ε 更小，因此可以忽略 ε^2. 将 (10) 式代入上式后积分

$$t_o-t_p=F_0(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{R}_p)+F_1(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{R}_p)\,, \tag{12}$$

$$\begin{cases} F_0(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{R}_p)=\dfrac{|\boldsymbol{r}_o-\boldsymbol{R}_p|}{c} \\ F_1(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{R}_p)=\dfrac{2GM_\otimes}{c^3}\ln\left(\dfrac{r+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}\times\dfrac{R_s+r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{R_s+r+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}\right)\Big|_P^O \end{cases}, \tag{13}$$

式中的积分上下限表示 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_o$ 、 $\boldsymbol{R}_p$, F_0 是 X 射线以光速 c 传播欧氏几何距离 $|\boldsymbol{r}_o-\boldsymbol{R}_p|$ 的时间， F_1 则是光线的轨迹弯曲和坐标速度小于光速产生的引力延缓.

3　2PN 度规下的引力延缓

在 DSX 体系中 [4−7], 光传播的 2PN 方程为 [8−11]:

$$\left(1-\frac{2w}{c^2}+\frac{2w^2}{c^4}\right)c^2\mathrm{d}t^2-\left(1+\frac{2w}{c^2}+\frac{2w^2}{c^4}+\frac{q}{c^4}\right)\mathrm{d}l^2+\frac{8w_i}{c^3}\mathrm{d}x^i c\mathrm{d}t=0\,, \tag{14}$$

这是一个关于 $\mathrm{d}t$ 的二次方程，仅保留到 $O(c^{-5})$, 则其解为：

$$\mathrm{d}t=\left(1+\frac{2w}{c^2}+\frac{2w^2}{c^4}+\frac{q}{2c^4}\right)\frac{\mathrm{d}l}{c}-\frac{4w_i\mathrm{d}x^i}{c^4}\,. \tag{15}$$

我们有理由作以下的近似 [12]: 引力场的标势和矢势包括太阳、地球和其他星体的作用，但只需考虑太阳和地球的的四极矩和自转，其他星体作点源处理. 即有：

$$w = w_\otimes + w_\oplus + W, \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_\otimes + \boldsymbol{w}_\oplus ,$$

$$w_\otimes(\boldsymbol{r}) = \frac{GM_\otimes}{r}\left(1 - \frac{K_\otimes P_2(\theta)}{r^2}\right), \quad \boldsymbol{w}_\otimes(\boldsymbol{r}) = \frac{G\boldsymbol{J}_\otimes \times \boldsymbol{r}}{2r^3}, \tag{16}$$

$$w_\oplus(\boldsymbol{r}) = \frac{GM_\oplus}{\xi}\left(1 - \frac{K_\oplus P_2(\vartheta)}{\xi^2}\right), \quad \boldsymbol{w}_\oplus(\boldsymbol{r}) = \frac{G\boldsymbol{J}_\oplus \times \boldsymbol{\xi}}{2\xi^3}, \tag{17}$$

$$W(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{GM_k}{\xi_k}, \tag{18}$$

式中 $P_2(\theta) = (3\cos^2\theta - 1)/2$ 是二次 Legendre 多项式，θ 是场点矢径与太阳自转轴夹角；

$K_\otimes = R_\otimes^2 J_{2\otimes}$ 为一常数，$R_\otimes$ 是太阳的赤道半径，$J_{2\otimes}$ 为太阳的四极矩参数；

$\boldsymbol{J}_\otimes$ 是太阳的角动量，我们假设沿自转轴方向；

$K_\oplus = R_\oplus^2 J_{2\oplus}$ 和 $\boldsymbol{J}_\oplus$ 的意义同上；

$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_e$ 是地球到场点的矢径，$\boldsymbol{r}_e$ 是地心在 BCRS 中的矢径；

$P_2(\vartheta)$ 的意义同上，ϑ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 与地球自转轴的夹角；

$\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_k$ 是星体 k 到场点的矢径，$\boldsymbol{r}_k$ 是星体 k 在 BCRS 中的矢径.

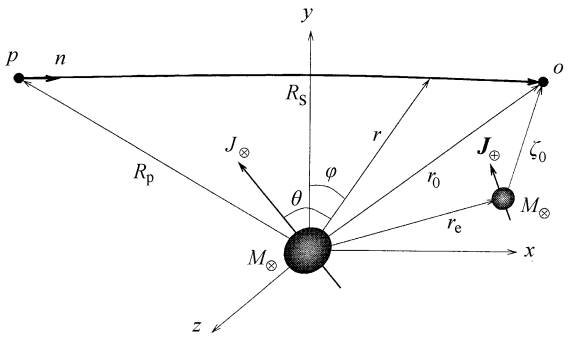

图 2 引力场中沿光线积分用图

Fig. 2 Integral scheme along light ray in the gravitation

如图 2 所示，将上述度规代入 (15) 式即得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t &= \left(1 + \frac{2GM_\otimes}{c^2 r}\right)\frac{\mathrm{d}l}{c} + \frac{2G}{c^3}\left(\frac{M_\oplus}{\xi} + \sum_{k=1}^{N}\frac{M_k}{\xi_k}\right)\mathrm{d}l \\ &- \frac{2G}{c^3}\left(\frac{M_\otimes K_\otimes P_2(\theta)}{r^3} + \frac{M_\oplus K_\oplus P_2(\vartheta)}{\xi^3}\right)\mathrm{d}l \\ &- \frac{2G}{c^4}\left(\frac{\boldsymbol{J}_\otimes \times \boldsymbol{r}}{r^3} + \frac{\boldsymbol{J}_\oplus \times \boldsymbol{\xi}}{\xi^3}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \frac{2G^2}{c^5}\left(\frac{M_\otimes^2}{r^2} + \frac{M_\oplus^2}{\xi^2}\right)\mathrm{d}l + \frac{q}{2c^5}\mathrm{d}l\,. \end{aligned} \tag{19}$$

在积分之前，我们首先估算上式中各项的量级．设光线经太阳附近到达地球表面，可取太阳和地球到光线的最近距离分别为各自的半径，则各量级分别为

第 1 、 2 项：$\dfrac{GM}{c^3}\sim\begin{cases}10^{-5}\text{s (太阳,}\quad GM_\otimes\sim10^{20})\\ 10^{-11}\text{s (地球,}\quad GM_\oplus\sim10^{14})\end{cases}$，

第 3 项：$\dfrac{GMK}{c^3R^2}\sim\begin{cases}10^5/R^2\sim10^{-11}\text{s (太阳,}\quad J_{2\otimes}\sim10^{-5})\\ 10^{-2}/R^2\sim10^{-14}\text{s (地球,}\quad J_{2\oplus}\sim10^{-3})\end{cases}$，

第 4 项：$\dfrac{GJ}{c^4R}\sim\begin{cases}10^{-2}/R\sim10^{-10}\text{s (太阳,}\quad J_\otimes\sim10^{41})\\ 10^{-10}/R\sim10^{-16}\text{s (地球,}\quad J_\oplus\sim10^{33})\end{cases}$，

第 5 项：$\dfrac{G^2M^2}{c^5R}\sim\begin{cases}10^{-2}/R\sim10^{-10}\text{s (太阳,}\quad R_\otimes\sim10^{8})\\ 10^{-14}/R\sim10^{-20}\text{s (地球,}\quad R_\oplus\sim10^{6})\end{cases}$．

以上各量的单位均为国际单位制．显然，第 1 项是主要部分，我们仅在该部分沿光线的弯曲路径积分，其余部分沿直线积分．事实上，地球以及其他星体在第 4 、 5 项中的贡献也很微小，但这里仍然保留．至于第 6 项，由于没有严格的数据，我们将它纳入到第 5 项中，在该项增加一个比例因子 κ.

对 (17) 式积分，第 1 部分已经在上小节求得，即 (13) 式．第 2 部分也容易得出

$$\begin{aligned}F_2(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{R}_p) &= \frac{2G}{c^3}\int_P^O\left(\frac{M_\oplus}{\xi}+\sum_{k=1}^N\frac{M_k}{\xi_k}\right)\mathrm{d}l\\ &= \frac{2G}{c^3}\left(M_\oplus\ln\frac{\xi+\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n}}{R_e}+\sum_{k=1}^N M_k\ln\frac{\xi_k+\boldsymbol{\xi}_k\cdot\boldsymbol{n}}{R_k}\right)|_P^O\,,\end{aligned}\tag{20}$$

R_e 和 $R_k(k=1,2,\cdots)$ 分别是地球质心和其他星体到光线的最近距离，积分上下限在第 1 项是指 $\boldsymbol{\xi}_o$ 、 ξ_p, 第 2 项是指 $\boldsymbol{\xi}_{ko}$ 、 $\boldsymbol{\xi}_{kp}$.

第 3 部分涉及到的 θ 是太阳的自转轴 (对称轴) 与场点矢径的夹角，因为我们假设自转轴与角动量 $\boldsymbol{J}$ 的方向一致，故有

$$\cos^2\theta=\left(\frac{\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{r}}{Jr}\right)^2=\sum_{i,j=1}^3\frac{J_iJ_jx^ix^j}{(Jr)^2}$$

为积分方便 (并非必要), 设光波平行于 x 轴传播 ($\boldsymbol{n}//\boldsymbol{e}_x$), 则上式中的 $y=R$, $z=0$, 于是

$$F_{3\otimes}(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{R}_p)=-\frac{2GM_\otimes K_\otimes}{c^3}\int_P^O\left(\frac{3(J_{\otimes x}^2x^2+2J_{\otimes x}J_{\otimes y}R_sx+J_{\otimes y}^2R_s^2)}{2J_\otimes^2r^5}-\frac{1}{2r^3}\right)\mathrm{d}l$$

$$=-\frac{GM_\otimes K_\otimes}{c^3R^2J_\otimes^2}\left[(J_{\otimes x}^2-J_{\otimes y}^2)\left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}\right)^3-(2J_{\otimes x}J_{\otimes y})\left(\frac{R_s}{r}\right)^3+(3J_{\otimes y}^2-J_\otimes^2)\left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}\right)\right]|_P^O\,,\tag{21}$$

将上式中的 $\otimes\to\oplus$, $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{\xi}$, $R_s\to R_e$, 就得到 $F_{3\oplus}(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{r}_p)$, 故第 3 部分为这两部分之和

$$F_3(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{R}_p)=F_{3\otimes}(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{R}_p)+F_{3\oplus}(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{R}_p)\,.$$

在第 4 部分中，因为 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}z=0$, 故 $(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{d}r=(J_yz-J_zy)dx=-J_zR\mathrm{d}x$, 故有

$$\begin{aligned} F_4(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{R}_p) &= -\frac{2G}{c^4}\int_P^O(\frac{\boldsymbol{J}_\otimes\times\boldsymbol{r}}{r^3}+\frac{\boldsymbol{J}_\oplus\times\boldsymbol{\xi}}{\xi^3})\cdot\boldsymbol{d}r \\ &= \frac{2G}{c^4}(\frac{J_{\otimes z}}{R_s}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}+\frac{J_{\oplus z}}{R_e}\frac{\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n}}{\xi})|_P^O\,. \end{aligned} \tag{22}$$

第 5 部分的积分很容易得出

$$\begin{aligned} F_5(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{R}_p) &= \frac{2\kappa G^2M_\otimes^2}{c^5}\int_P^O\left(\frac{M_\otimes^2}{r^2}+\frac{M_\oplus^2}{\xi^2}\right)\mathrm{d}l \\ &= \frac{2\kappa G^2}{c^5}\left(\frac{M_\otimes^2}{R_s}\cos^{-1}\frac{R_s}{r}+\frac{M_\oplus^2}{R_e}\cos^{-1}\frac{R_e}{\xi}\right)|_P^O\,. \end{aligned} \tag{23}$$

这 5 部分的第 1 、2 部分是太阳、地球和其他星体的牛顿引力势的作用; 第 3 部分为太阳和地球四极矩 (形状因子) 的影响; 第 4 部分是太阳的自转 (角动量) 引起的修正, 最后一部分是太阳和地球的质量平方项的贡献.

4 小结

综合 (13) 式和 (19)-(23) 式，我们终于得到光的传播时间间隔为:

$$\begin{aligned} t_o-t_p &= \frac{|\boldsymbol{r}_o-\boldsymbol{R}_p|}{c}+\sum_{i=1}^5F_i(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{R}_p) \\ &= \frac{|\boldsymbol{r}_o-\boldsymbol{R}_p|}{c}+\sum F_i(\boldsymbol{r}_o)-\sum F_i(\boldsymbol{R}_p)\,. \end{aligned} \tag{24}$$

第 2 步是因为函数 $F_i(i=1,\cdots,5)$ 都可以表示为两部分之差, 后项与脉冲星的位置 $\boldsymbol{R}_p$ 、$\boldsymbol{x}i_p$ 和 ξ_{kp} 等有关，它们构成的总和是一个大的常数，可将其归入到计时基准中.

所以，相对论效应产生的误差 (4) 式应该修正为:

$$\begin{aligned} \delta t_G(\boldsymbol{r}_o) &= \frac{2GM_\otimes}{c^3}\ln\left(\frac{r_o+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_o}{r_o-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_o}\times\frac{R_s+r_o-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_o}{R_s+r_o+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_o}\right) \\ &+ \frac{2G}{c^3}\left(M_\oplus\ln\frac{\xi_o+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\xi}_o}{R_e}+\sum_kM_k\ln\frac{\xi_{ko}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\xi}_{ko}}{R_k}\right) \\ &- \frac{2G}{c^4}\left(\frac{J_{\otimes z}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_o)}{R_sr_o}+\frac{J_{\otimes z}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\xi}_o)}{R_e\xi_o}\right) \\ &+ \frac{GM_\otimes K_\otimes}{c^3J_\otimes^2R_s^2}\left[(J_{\otimes x}^2-J_{\otimes y}^2)\left(\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_o}{r_o}\right)^3\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad 2J_{\otimes x}J_{\otimes y}\left(\frac{R_s}{r_o}\right)^3 + (3J_{\otimes y}^2 - J_{\otimes}^2)\left(\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_o}{r_o}\right)\Bigg] \\
&+ \quad \frac{GM_{\oplus}K_{\oplus}}{c^3 J_{\oplus}^2 R_e^2}\Bigg[(J_{\oplus x}^2 - J_{\oplus y}^2)\left(\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\xi}_o}{\xi_o}\right)^3 \\
&- \quad 2J_{\oplus x}J_{\oplus y}\left(\frac{R_e}{\xi_o}\right)^3 + (3J_{\oplus y}^2 - J_{\oplus}^2)\left(\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\xi}_o}{\xi_o}\right)\Bigg] \\
&+ \quad \frac{2\kappa G^2}{c^5}\left(\frac{M_{\otimes}^2}{R_s}\cos^{-1}\frac{R_s}{r_o} + \frac{M_{\oplus}^2}{R_e}\cos^{-1}\frac{R_e}{\xi_o}\right). \qquad (25)
\end{aligned}
$$

同时， (5) 式也要作相应的改变

$$\Delta t_b = \Delta t_p - \frac{R_0}{c} - \delta t_G(\boldsymbol{R}_p)\,, \qquad (26)$$

其中 $\delta t_G(\boldsymbol{R}_0)$ 由 (25) 式作以下替换得到，

$$\boldsymbol{r}_o \to \boldsymbol{R}_p, \quad \boldsymbol{\xi}_o \to \boldsymbol{R}_p - \boldsymbol{r}_e, \quad \boldsymbol{\xi}_{ko} \to \boldsymbol{R}_p - \boldsymbol{r}_k\,.$$

上式取决于脉冲星的初始位置，对于特定的脉冲星为常值.

其实，XNAV 的测量方程与毫秒脉冲星计时观测基本相同，这里得到的结论与文 [12] 也基本相同. 我们采用的是 DSX 体系的后牛顿近似度规，文 [12] 用的是参数化后牛顿近似度规. 但在 (25) 式中只有一个参数 κ 为待定量，反映的是太阳周围空间各向同性的性质.

致谢 我们对李惕碚院士提供的帮助表示衷心地感谢.

参 考 文 献

1 Pines D J, et al. X-ray Source-based Navigation for Autonomous Position Determination Program[R]. DARPA/TTO, 571-218-4339, USA

2 Backer D C, Hellings R W. Ann Rev Astrophys, 1986, 24: 537

3 须重明，吴雪君. 广义相对论与现代宇宙学 [M]. 南京：南京师范大学出版社， 1999

4 Damour T, Soffel M, Xu C. Phys Rev, 1991, D43: 3273

5 Damour T, Soffel M, Xu C. Phys Rev, 1992, D45: 1017

6 Damour T, Soffel M, Xu C. Phys Rev, 1993, D47: 3124

7 Damour T, Soffel M, Xu C. Phys Rev, 1994, D49: 618

8 GONG Yan-Xiang, XU Chong-Ming. ChA&A, 2004, 28(1): 1

9 Gong Yan-xiang, Xu Chong-ming. AcASn, 2003, 44(4): 382 (宫衍香，须重明. 天文学报， 2003, 44(4): 382)

10 Xu C, Wu X-J. Chin Phys Lett, 2003, 20(2): 195

11 Xu C, Gong Y-X, Wu X-J, et al. arXiv: gr-qc/0510074, 2005

12 Liu Jia-qiu, Xu Chong-ming. AcASn, 1989, 30(3): 323 (刘甲求，须重明. 天文学报， 1989, 30(3): 323)

The Time Equation of Light Propagation in XNAV

SUN Wei-jin FEI Bao-jun XIAO Yu JI Cheng-xiang
(*Academy of Armored Force Engineering, Beijing* 100072)

Abstract X-ray signals from celestial sources, such as stars and pulsars, may be used as navigation beacons for satellites and deep space probes. XNAV is the abbreviation of the X-ray Source-based Navigation for Autonomous Position Determination. The basic measurement principle in XNAV is based on the distance between the observer and the X-ray pulsar. Theoretically, if an observer receives simultaneously the X-ray pulse signals from three pulsars and computes the propagation time intervals of their X-ray pulses, then the spatial position of the observer can be determined**.** The general relativistic effects existing in XNAV are resulted from the bending of light and gravitational delay. Because the magnitude of $GM_s/c^3 \sim 10^{-5}$s is larger than that of the measurement error in XNAV, so the high order effects due to the bending of light and gravitation delay must be considered. The general relativistic effects in XNAV are discussed in detail by using the Post-Newtonian approximate method of the DSX scheme in the paper.

First, the bending of light and the gravitational time delay, which is mainly due to the action of the Solar gravitational field, are discussed under the 1PN metric. The discussion is limited in plane motion. The standard differential equation of the light curve path is obtained. Although the equation is different slightly from the rigid solution under Schwarzschild metric,both the deflected angles of light solved under the two different metrics are the same. It is also obtained that the gravitational time delay due to the bending of light and its coordinate speed smaller than light speed under the 1PN metric.

Second, the gravitational time delay under the 2PN metrics of the DSX scheme are calculated, and a quadratic equation about dt is considered. Only the term of $O(c^{-5})$ is remained. The many factors are considered, which includes not only the Newtonian gravitational action of the Sun and Earth as well as other celestial bodies, but also the quadrupole moment (shape factor) effect of the Sun and Earth and correction due to the Solar spin (angular moment) as well as the contribution of the mass square of the Sun and Earth.

Lastly, the high accuracy time equation of light propagation in XNAV is obtained. In fact, the measurement equation of XNAV we obtained is basically same as that of the millisecond pulsar timing measurement, and also same as Ref.[12]. The methods of the post-Newtonian approximate metric in this paper and the parameter-post-Newtonian approximate metric in the Ref.[12] are different.

Key words Celestial Mechanics: Relativity