二阶后牛顿光线轨迹方程*

肖 昱† 费保俊 孙维瑾 季诚昶

(装甲兵工程学院 北京 100072)

摘要 根据 DSX 体系的后牛顿近似理论，直接由 Lagrange 方程导出了轴对称稳态时空中光子的二阶后牛顿轨迹方程，并求得在赤道平面内传播的光线偏转角．在可测量精度范围内，得到的结论与 Schwarzschild 和 Kerr 度规下的情况相吻合．

关键词 天体力学：相对论

中图分类号： P 131; **文献标识码**： A

1 引言

在讨论人造卫星、小行星以及光子在太阳系中的运动时 [1−4], 在甚长基线干涉测量 (VLBI) 、全球定位系统 (GPS) 以及正在研制中的 X 射线脉冲星自主导航 (XNAV) 等天文测量中，都要考虑光子的轨迹方程．文 [5-7] 已经给出了四维 Minkowski 坐标下的二阶后牛顿 (2PN) 光子运动方程，直接由运动方程可以得到二阶后牛顿轨迹方程．文 [8,9] 还讨论了 Kerr 度规下的光子运动及其偏转角．这里我们仿照 Schwarzschild 度规中的相关讨论，在球坐标下直接由 Lagrange 方程求解光子的 2PN 轨迹方程，并计算出赤道平面内的光线偏转角．最后将 2PN 度规和 Kerr 度规下的结论进行比较．

2 2PN 度规下的光线轨迹方程

在 DSX 体系中的 2PN 线元为 [6,7,10−13]

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}c^2\mathrm{d}t^2 + g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j + 2g_{0i}c\mathrm{d}t\mathrm{d}x^i \tag{1}$$

$$\begin{cases} g_{00} = 1 - \dfrac{2w}{c^2} + \dfrac{2w^2}{c^4} + O(c^{-6}) \\ g_{ij} = -\delta_{ij}\left(1 + \dfrac{2w}{c^2} + \dfrac{2w^2}{c^4}\right) - \dfrac{q_{ij}}{c^4} + O(c^{-6}) \\ g_{0i} = -\dfrac{4w_i}{c^3} + O(c^{-5}) \end{cases} . \tag{2}$$

式中 q_{ij} 反映的是空间异性的特性，我们仅讨论各向同性空间 (例如太阳引力场), 则该量退化为 [6]

$$q_{ij} = \delta_{ij}q(r) . \tag{3}$$

2006-06-21 收到原稿， 2007-01-22 收到修改稿

* 国家自然科学基金 (10403009) 资助项目

† xiaoyude@126.com

对于单个引力源 M 产生的引力场，引力场的标势 w 和矢势 w_i 分别为

$$w=\frac{GM}{r}\left(1-\frac{K(3\cos^2\vartheta-1)}{2r^2}\right), \tag{4}$$

$$w_i=\frac{GM}{2r^3}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})_i, \tag{5}$$

其中 $K=J_2R^2$, R 和 J_2 是星体的半径和四极矩参数， $\boldsymbol{a}$ 是单位质量的角动量 (我们假设角动量方向与自转轴相同), $\boldsymbol{r}$ 和 ϑ 是场点矢径及其与自转轴的夹角.

以星体质心为原点、自转轴为 Z 轴建立球坐标系 $\{r,\theta,\phi\}$, 则 $\vartheta=\theta$, 在此坐标下的 2PN 线元简化为

$$\mathrm{d}s^2=g_{tt}\mathrm{d}t^2+g_{rr}(\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)+2g_{t\phi}\sin\theta\mathrm{d}\phi dt, \tag{6}$$

$$\begin{cases} g_{tt}=c^2\left(1-\dfrac{2w}{c^2}+\dfrac{2w^2}{c^4}\right) \\ g_{rr}=-\left(1+\dfrac{2w}{c^2}+\dfrac{2w^2}{c^4}+\dfrac{q}{c^4}\right) \\ g_{t\phi}=-\dfrac{R_g a_\theta}{r} \end{cases}, \tag{7}$$

其中 $R_g=2GM/c^2$ 是星体的 Schwarzschild 半径， a_θ 是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向的分量， g_{tt} 和 g_{rr} 为 (r,θ) 的函数.

令 Lagrange 函数

$$L=\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2=g_{tt}\dot{t}^2+g_{rr}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)+2g_{t\phi}\sin\theta\dot{\phi}\dot{t}, \tag{8}$$

式中的 "." 号表示对仿射参量 λ 求导. 根据 Hamilton 原理，当 Lagrange 函数仅为 x^μ 和 $\dot{x}^\mu$ 的函数时 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\mu}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^\mu}=0. \tag{9}$$

由于 Lagrange 函数中不包含坐标 t 和 φ, 由上式可知 $\dfrac{\partial L}{\partial\dot{t}}$ 和 $\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}$ 为常量，即存在两个一次积分

$$E=g_{tt}\dot{t}+g_{t\phi}\sin\theta\dot{\phi}, \tag{10}$$

$$J=-g_{rr}r^2\sin^2\theta\dot{\phi}-g_{t\phi}\sin\theta\dot{t}. \tag{11}$$

这里的 E 、 J 是积分常量. 再取坐标 $x^2=\theta$, 由 Lagrange 方程可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(2g_{rr}r^2\dot{\theta}\right) &= \left(-1+\frac{2w}{c^2}\right)\frac{3GMK}{r^3}\sin2\theta\dot{t}^2 \\ &- \left(\frac{1}{c^2}+\frac{2w}{c^4}\right)\frac{3GMK}{r^3}\sin2\theta(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) \\ &+ g_{rr}r^2\sin2\theta\dot{\phi}^2+2g_{t\phi}\cos\theta\dot{\phi}\dot{t}. \end{aligned} \tag{12}$$

对于光子的运动，由 $\mathrm{d}s^2=0$ 又得到

$$g_{tt}\dot{t}^2+g_{rr}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)+2g_{t\phi}\sin\theta\dot{\phi}\dot{t}=0\,. \tag{13}$$

方程 (10)-(13) 是球坐标系下光子运动的基本方程. 由 (10) 式和 (11) 式解出 $\dot{t}$ 和 $\dot{\phi}$ 后代入 (12) 式和 (13) 式，原则上可以求得光子的轨迹方程. 这里的结论与文 [7] 是一致的，因为那里的运动方程来源于

$$g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}=0\,, \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda}=0\,. \tag{15}$$

方程 (14) 即为 (13) 式，而方程 (15) 则与 (9) 式等价.

3 赤道平面内的光线弯曲

下面我们来讨论一种简单情况： $\theta=\pi/2$. 在此条件下，方程 (12) 的右边为 0, 即 $g_{rr}r^2\dot{\theta}$ 为常量，如果光子在初始时刻位于 $\theta=\pi/2$ 平面内且 $\dot{\theta}=0$, 则它必定一直位于该平面内. 这个结论与 Schwarzschild 和 Kerr 场的情况相同.

由 (10) 式和 (11) 式解出

$$\dot{t}=\frac{g_{rr}r^2E+g_{t\phi}J}{g_{t\phi}^2-g_{tt}g_{rr}r^2},\quad \dot{\phi}=\frac{g_{t\varphi}E+g_{tt}J}{g_{t\phi}^2-g_{tt}g_{rr}r^2}\,,$$

代入 (13) 式后令 $u=1/r$, 略去高阶小量 $O(c^{-6})$, 我们得到二维轨迹方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2+u^2=\left(\frac{E}{cJ}\right)^2\left(1+\frac{4w}{c^2}\left(1+\frac{Ea_\theta}{c^2J}\right)+\frac{8w^2}{c^4}+\frac{q}{c^4}\right)\,. \tag{16}$$

由于 E 、 J 均为守恒量，我们可取 $r\to\infty$ 处的值来表示. 因为无穷远的引力场消失，广义相对论退化为狭义相对论， E 、 J 为光子的能量和角动量，设 P 是光子的动量，则有

$$\frac{E}{cJ}=\frac{cP_\infty}{c\,|\boldsymbol{r}_\infty\times\boldsymbol{P}_\infty|}=\frac{1}{|r_\infty\sin\phi_\infty|}=\frac{1}{R_s}\,,$$

R_s 是光子在无穷远处初始运动方向延长线到星体质心的最近距离，即所谓碰撞参数. 另外，当 $\theta=\pi/2$ 时有

$$w=GMu+\frac{1}{2}GMKu^3\,,\quad a_\theta=-a.$$

将上述关系代入 (16) 式后，再对 ϕ 微分一次就得到光子轨迹的标准微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=A+Bu+Cu^2+\frac{q_{,u}}{2c^4R_s^2}\,, \tag{17}$$

式中的系数

$$\begin{cases} A = \dfrac{R_g}{R_s^2}\left(1-\dfrac{a}{cR_s}\right) \\ B = 2\left(\dfrac{R_g}{R_s}\right)^2 \\ C = \dfrac{3KR_g}{2R_s^2}\left(1-\dfrac{a}{cR_s}\right) \end{cases} . \tag{18}$$

至于 (17) 式右边的最后一项，当 $q_{,u}$ 为常量时可归入 A 中，当 q 为常量时该项为 0. 将其忽略后我们来求光线的偏转角.

当 $M=0(R_g=0)$ 时，其解应退化为直线方程，即零级近似解为

$$u^{(0)} = \frac{\cos\phi}{R_s} .$$

代入到 (17) 式右边

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = A + \frac{B}{R_s}\cos\phi + \frac{C}{2R_s^2}\left(1+\cos 2\phi\right) , \tag{19}$$

得到一级近似解

$$u = A + \frac{\cos\phi}{R_s} + \frac{B}{2R_s}\phi\sin\phi + \frac{C}{2R_s^2}\left(1-\frac{\cos 2\phi}{3}\right) . \tag{20}$$

令 $u=0(r=\infty)$, 则有

$$\cos\phi = -AR_s - \frac{B}{2}\phi\sin\phi - \frac{C}{2R_s}\left(1-\frac{\cos 2\phi}{3}\right) . \tag{21}$$

考虑光线经过太阳附近的传播，取 $R_g = 2.953\times10^3\,\mathrm{m}$, $R_s\sim R = 6.96\times10^8\,\mathrm{m}$, $J_2\sim10^{-6}$, 估算出右边三项的量级分别是 10^{-3} 、 10^{-9} 和 10^{-11}, 因此零级近似解为

$$\cos\phi^{(0)} = -AR_s\,, \qquad \phi^{(0)} = \frac{\pi}{2} + AR_s\,.$$

将其代入 (21) 式右边后求得

$$\cos\phi = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) \approx -\left(AR_s + \frac{\pi B}{4} + ABR_s + \frac{2C}{3R_s}\right) , \tag{22}$$

所以光线的偏转角为

$$\delta = 2\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2R_g}{R_s} + \frac{\pi R_g^2}{R_s^2} - \frac{2R_g a}{cR_s^2} + \frac{J_2R^2R_g+8R_g^3}{2R_s^2}\left(1-\frac{a}{cR_s}\right) . \tag{23}$$

右边的第 1 项与 Schwarzschild 度规以及 1PN 度规下的结论相同；第 2 项是对球对称引力场的 2PN 修正；第 3 项是由于引力源的角动量引起的，当 a 为正时偏转角减小，当 a 为负时偏转角增大；最后一项主要来源于引力源的四极矩，它导致偏转角增大.

4 2PN 与 Kerr 度规中光线弯曲的比较

取几何单位制 ($G = c = 1$), $R_g = 2M$, (23) 式成为

$$\delta = \frac{4M}{R_s} + \frac{4\pi M^2}{R_s^2} - \frac{4Ma}{R_s^2} + \frac{J_2 R^2 M + 32M^3}{R_s^3}\left(1 - \frac{a}{R_s}\right). \tag{24}$$

最近的文 [9] 求出了 Kerr 度规下赤道面内的光线偏转角，其结论是

$$\delta_{\rm Kerr} = \frac{4M}{R_s} + \frac{15\pi M^2}{4R_s^2} - \frac{4Ma}{R_s^2}. \tag{25}$$

这与 (24) 式右边前三项基本相同, 区别在于右边第 2 项的系数, 二者的差值为 $4\pi - 15\pi/4 = \pi/4$. 这是由于所取的度规不同造成的，因为该项来源于度规中标量势的平方项 w^2, 如果我们将 (7) 式中空间度规 g_{rr} 中的 w^2 项去掉，也就是仅在 g_{tt} 中考虑 w^2 项，可以求出上述第 2 项的系数为 3π.

(24) 式右边的第 4 项主要取决于引力源的四极矩，它在 Kerr 度规的情况下并不出现，但该项与前两项的贡献相差不大. 例如，对于光线经过太阳附近的传播，估算出 (24) 式右边的第 2 、 3 、 4 项是第 1 项的 10^{-5} 、 10^{-7} 和 10^{-6} 倍. 因此当考虑光线偏转的精确表示时，应该统一考虑引力源的质量平方、角动量和四极矩的作用.

最重要的是，采用 DSX 体系的 2PN 度规的最大优越性是满足线性叠加，应用本文的结论可以进一步处理多个引力源中的光子运动，这是 Kerr 度规场所不具备的.

参 考 文 献

1 YAO Ming, ZHU Sheng-yuan, PAN Rong, et al. AcASn, 1988, 29(2): 181 (姚敏, 朱圣源, 潘容, 等. 天文学报, 1988, 29(2): 181)
2 ZHANG Han-wei, ZHENG Yong, DU Lan. AcASn, 2003, 44(1): 28 (张捍卫, 郑勇, 杜兰. 天文学报, 2003, 44(1): 28)
3 ZHANG Jia-xiang. AcASn, 1993, 34(4): 315 (张家祥. 天文学报, 1993, 34(4): 315)
4 LIU Jia-quan, XU Chong-ming. AcASn, 1989, 30(3): 323 (刘甲全, 须重明. 天文学报, 1989, 30(3): 323)
5 GONG Yan-xiang, XU Chong-ming. AcASn, 2003, 44(4): 382 (宫衍香, 须重明. 天文学报, 2003, 44(4): 382)
6 XU Chong-ming, WU Xue-jun. Chin Phys, Lett, 2003, 20(2): 195
7 XU Chong-ming, GONG Yan-xiang, WU Xue-jun, et al. arXiv: gr-qc/0510074, 2005
8 Goicoechea L J, Mediavilla E, Buitrago J, et al. MNRAS, 1992, 259: 281
9 Edery A, Godin J. Gen Relativ Gravit, 2006, 38: 1715
10 Damour T, Soffel M, XU Chong-ming. Phys Rev, 1991, D43: 3273
11 Damour T, Soffel M, XU Chong-ming. Phys Rev, 1992, D45: 1017
12 Damour T, Soffel M, XU Chong-ming. Phys Rev, 1993, D47: 3124
13 Damour T, Soffel M, XU Chong-ming. Phys Rev, 1994, D49: 618

The Second-order Post-Newtonian Orbit Equation of Light

XIAO Yu FEI Bao-jun SUN Wei-jin JI Cheng-xiang
(*Armored Force Engineering Institute, Beijing* 100072)

Abstract The photon's orbital equation is often used to discuss the movement of man-made satellite, small planet and photon in the solar system. It is also applied to the studies of astronomical measure such as VLBI, GPS and XNAV etc. In this paper, based on the second-order post-Newtonian approximation under the DSX scheme of GTR, it is educed that the second-order post-Newtonian orbit equation of light in axis-symmetrical stationary space-time using Lagrange equation. From here, the orbit equation and deflection angle of light propagating in equatorial plane are got. The conclusions are consistent with that of Schwarzchild and Kerr metric in the precision of measure. Because the oblateness of star is considered, it is more accurate than that of Kerr metric. The great advantage of the second-order post-Newtonian approximation under the DSX scheme of GTR is satisfy linear superposition. So, the conclusions in the paper can be applied to deal with the motion of light in multiple systems, but in this situation Kerr metric is of no effect.

Key words Celestial Mechanics: Relativity