第 49 卷 第 4 期　　天 文 学 报　　Vol.49 No.4
2008 年 10 月　　ACTA ASTRONOMICA SINICA　　Oct., 2008

对月球形状的估算*

高布锡 †

(中国科学院测量与地球物理所 武汉 430077)

摘要 1799 年, Laplace 发现月球的 3 个主惯量矩, 与月球的轨道和自转状态并不相符. 有些学者认为, 这可能是现在的月球仍保留了早期的 "化石" 形状. 大约在三十多亿年前, 月球曾经离地球很近并且转得较快, 然后月球逐渐迁移远离地球并且转动得慢了下来. 在此迁移的较早时期, 月球受到了引潮力和自转离心力的作用, 成为一个椭球体. 并且很快凝固. 所幸的是, 固态月球的岩石圈较为稳定, 使我们现在仍然能够看到很早时期月球的形状. 文中利用月球天平动参数以及引力场系数, 计算了椭球体 3 个主向径 a, b, c 的长度和月球的平衡潮形状, 得到如下 3 个结论:

(1) 开始时月球离地球是非常近的, 大约在三十亿年前月球可能已经冷却和固化, 现在的月球基本上保留了凝结时的形状.

(2) 证明了液态月球的潮汐形变是月球平衡潮高度的 1.934 倍. 因此用月球引力场推算月球形状时, 必需考虑到流体勒夫数 $h_{\rm f} = 1.934$ 的影响.

(3) 根据月球三个主轴 a, b, c 的长度之差, 推算了月球临凝固时的月地距离为 1.7455×10^8m, 自转周期为 3.652 day. 从而推算出月球临凝固时的恒星月长度为 8.34 day. 因此在月球凝结时, 月球被锁定在与自转速率比为 2:1 的共振轨道上.

关键词 月球: 天平动, 月球: 引力场

中图分类号: P 128; **文献标识码**: A

1 引言

天然卫星的形状主要是由两个因素确定的: 其一是卫星的自转, 它使得卫星的赤道部分隆起. 其二是行星的引潮力, 它使卫星在向行星的方向上被拉长, 使得卫星成为三轴椭球体的形状. 许多研究已经证明, 几十亿年前, 月球曾经离地球很近. 在演化过程中, 月球可能很早已经冷却、凝结并且固化. 因此现今的月球形状应该接近于月球固化时的形状, 这个形状是由那时的月球轨道和自转速率所决定的. 早在二百多年前, Laplace[1] 已经发现月球的惯量矩与它的轨道和自转速率并不协调, 即在月球的赤道部分存在多余的质量. 但是 Laplace[1] 并没有认为是化石性隆起 (fossil bulge) 的原因. Sedgwick[2] 和 Jeffreys[3,4] 都注意到月亮的天平动参数 $\beta = (C - A)/B$ 相对于现今的月球轨道, 显然是过分大了. 按照现今月球轨道和自转速率, 月球的引力位系数 $C_{20} = 2.034 \times 10^{-4}$ 大了

2007-10-23 收到原稿, 2008-04-22 收到修改稿

* 国家自然科学基金 (40674038) 资助项目

† buxigao@sina.com

22 倍，天平动参数 $\beta = 6.315 \times 10^{-4}$ 和 $\gamma = 2.279 \times 10^{-4}$ 则分别大了 17 倍和 8 倍. 显然这些都是难以用月球质量分布不均匀或者其它假说来解释的，而是支持了月球赤道部分存在的多余质量是化石性隆起的假说 [5]. 月球的主惯量矩 $A, B, C,$ 是由月球的形状和质量分布所决定的，它们与月亮的二阶引力位系数和天平动参数有关. 所以利用月球的惯量矩数值，或者利用月球的天平动参数，都可以对月球的动力学形状进行研究. 由月球的动力学形状又可以估算出，月球凝结时的自转和轨道状态，这为探讨月球的起源和轨道演化，提供一条新的途径.

2 引潮力位和自转离心力位

处于平衡状态的液态天体, 如果没有自转和引潮力的作用, 它在自身引力的作用下, 应该是个圆球形. 月球的自转以及地球和太阳的引潮力的作用，使得月球成为三轴椭球体形状. 取月球质心为月球参考系的原点， Z 轴为月球的自转轴， X 轴指向地球的质心，取右手参考系，月球上某点的坐标为 (r, ϑ , λ), r 为到月球质心的距离， ϑ 为余纬， λ 为经度. 设月球的质量和平均半径为 $M_{\rm M}$ 和 $R_{\rm M}$, 以下给出引潮力位和自转离心力位的表达式:

(1) 月球自转运动的离心力位 $U_{\rm M}$

$$U_{\rm M} = \frac{1}{2}\omega^2 R_{\rm M}^2 \sin^2\vartheta \,, \tag{1}$$

ω 为月球相对于空间参考系的旋转角速度，现在月球自转周期与公转周期相同，所以 $\omega = 2\pi/27.321582 \times 86164.0954 = 2.668995 \times 10^{-6}{\rm s}^{-1}$.

(2) 地球的引潮力位 $W_\oplus$: 将地球作为质点，月球表面上某点处的引潮力位 $W_\oplus$ 为,

$$W_\oplus = \frac{GM_\oplus}{l}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{r^n}{l^n}P_{\rm n}(\cos Z) \,, \tag{2}$$

Z 为月球质心到月球上的某点和到地球质心方向的夹角， l 为月地距离.

(3) 太阳的引潮力位 $W_{\rm S}$: 类似于公式 (2), 有

$$W_{\rm S} = \frac{GM_{\rm S}}{d}\sum_{\rm n=2}^{\infty}\frac{r^n}{d^n}P_{\rm n}(\cos Z') \,, \tag{3}$$

Z' 为月球质心到月球上的某点和到太阳方向的夹角， d 为月日距离.

取 $R_{\rm M} = 1.73753{\times}10^6\,{\rm m}$. 由 (1) 式,可算出月球自转运动的离心力位 $U_{\rm M} = 2.3187\sin^2\vartheta$ ${\rm m}^2{\rm s}^{-2}$. 取 $GM_\oplus = 3.986005 \times 10^{14}{\rm m}^3{\rm s}^{-2}$, 月地平均距离 $l = 3.844 \times 10^8\,{\rm m}$, 只取到二阶项，由 (2) 式可以计算地球的引潮力位，为 $W_\oplus = 21.1863P_2(\cos Z){\rm m}^2{\rm s}^{-2}$. 同理，取 $GM_{\rm S} = 1.327124399 \times 10^{20}{\rm m}^3{\rm s}^{-2}$, 月日平均距离 $d = 1.495978706 \times 10^{11}\,{\rm m}$, 可算出 $W_{\rm S} = 0.11967{\rm m}^2{\rm s}^{-2}$, 因此太阳的引潮力位比地球的小两个数量级，可以忽略.

以下推算月球在自转和引潮力的作用下, 月球表面的平衡潮高. 假设月球处于液态, 由计算平衡潮高的公式,

$$\xi = \frac{V}{g_{\rm M}}\,. \tag{4}$$

月面的平均重力加速度 $g_{\rm M} = 1.62{\rm ms}^{-2}$, 可算出地球引潮力位在月球表面引起的平衡潮高为 $\xi = 13.078P_2(\cos Z)$. 由于 $P_2(\cos Z) = 1/2(3\cos^2 Z - 1)$, 故在 $Z = 0$ 或 $Z = 180^\circ$ 时, $P_2(\cos Z) = 1$, 在 $Z = 90^\circ$ 时, $P_2(\cos Z) = -1/2$. 月球总是以一面向着地球, 因此地球二阶引潮力位在月球表面引起的潮高基本上是固定的, 在朝向和背向地球的点上 $(X = \pm R_{\rm M})$, 潮高最高, 为 $\xi = 13.078\,{\rm m}$, 而在月球表面上 $X = 0$ 的地方, 潮高为 $\xi = -6.539\,{\rm m}$. 月球自转离心力位引起的潮高也是固定的, 在月球的两极为零, 而在月球赤道处最高, 为 $\eta = 1.421\,{\rm m}$. 太阳引潮力引起的潮高最大只有 $0.074\,{\rm m}$, 相对而言很小, 而且是变化的, 在以下的讨论中将被忽略.

计算月球自转和地球引潮力位所引起的形变, 应考虑月球的勒夫数或形变附加位. 但是现今月球勒夫数 $k_2 = 0.03$, 因此很小, 可以忽略 [6]. 从如上数据, 可算出平衡潮月球沿 X, Y, Z 轴的三个半长径 a_0, b_0, c_0 的数值为,

$$\begin{cases} a_0 = R_{\rm M} + \xi + \eta = R_{\rm M} + 14.499 \\ b_0 = R_{\rm M} - \frac{1}{2}\xi + \eta = R_{\rm M} - 5.118 \\ c_0 = R_{\rm M} - \frac{1}{2}\xi = R_{\rm M} - 6.539 \end{cases}, \tag{5}$$

所以理想的平衡潮月球体的形状非常接近于圆形, a_0, b_0, c_0 只有十几米的差异, 向地球方向的半长径 a_0, 最大, 向极方向的半长径 c_0, 最小, 与现今月球的形状相差很远.

3 从天平动参数计算月球的三个主轴长度

至今尚未获得精确的月球形状数据, 以下根据月球的天平动参数和主惯量矩 C, 估算月球的三个半长径 a, b, c 的长度. 根据 Yoder[6] 给出的结果,

$$C = 0.3935 M_{\rm M} R_{\rm M}^2\,. \tag{6}$$

上式的系数 0.3935 与计算均匀密度椭球的惯量矩时所采用的系数 0.4 非常接近, 因此可以判断月球密度分布比较均匀. Konopliv[7] 认为月球只有直径约 300 公里的内核, 其质量不到月球质量的 0.01. 故可取,

$$\begin{cases} A = \frac{0.3935 M_{\rm M}}{2}\left(b^2 + c^2\right) \\ B = \frac{0.3935 M_{\rm M}}{2}\left(c^2 + a^2\right) \\ C = \frac{0.3935 M_{\rm M}}{2}\left(a^2 + b^2\right) \end{cases}, \tag{7}$$

利用月球天平动参数 β 和 γ[8,9],

$$\begin{cases} \beta = \frac{C-A}{B} = 6.31 \times 10^{-4} \\ \gamma = \frac{B-A}{C} = 2.278 \times 10^{-4} \end{cases}, \tag{8}$$

可解出

$$\begin{cases} A = \frac{1-\beta\gamma}{1+\beta}C \\ B = \frac{1+\gamma}{1+\beta}C \end{cases}, \tag{9}$$

从而求得月球三个主惯量矩 A, B, C 的数值,

$$\begin{cases} A = 0.39325R_{\rm M}^2M_{\rm M} \\ B = 0.39334R_{\rm M}^2M_{\rm M} \\ C = 0.3935R_{\rm M}^2M_{\rm M} \end{cases}, \tag{10}$$

将 (9) 式带入到 (7) 式中，由 A, B, C 的数值可以求出 a, b, c 的数值,

$$\begin{cases} a = 1.0001145R_{\rm M} = 1.737729\times10^6 m \\ b = 0.9998756R_{\rm M} = 1.737331\times10^6 m \\ c = 0.9994789R_{\rm M} = 1.736625\times10^6 m \end{cases}, \tag{11}$$

从上式的结果可以看出，月球三个主轴的半长径长度是不同的，向地球方向的半长径 a 最大，极向的 c 最小，它们之间相互的差值为,

$$\begin{cases} a-b = 398m \\ b-c = 706m \\ a-c = 1104m \end{cases}, \tag{12}$$

4 根据月球引力场推算月球形状

关于月球的起源，主要有 4 种假说，即同源说，分裂说，俘获说和撞击说 [10]. 同源说很难解释为什么金星和火星没有大的卫星. 分裂说和俘获说存在力学机制解释及其它的巨大困难，也很难成立. Hartman[11] 提出了撞击说，并对撞击过程作了计算机模拟. 他们认为在四十多亿年前，一颗小行星与地球发生碰撞，地球的部分表面被撞破，这个小行星则被撞碎. 它的铁镍内核沉入地球内部，撞击形成的许多大大小小的碎片一部分掉回地球，部分密度较小的物质聚集凝结成为月球. 撞击说比较好地解释了月球的起源和结构，例如为什么地球有较大的液体内核，而月球几乎没有：为什么月球的平均密度为 $3.3\,{\rm g/cm^3}$, 而地球的平均密度为 $5.5\,{\rm g/cm^3}$: 为什么地球和月球都有相同的氧同位素，而与其它天体不同等等 [12].

由于月球体积较小，只需要几千万年的时间就可以初步完成月球的凝聚过程，然后开始重力分异及冷凝. 假定有两个密度相同而大小不一的天体，都处于熔融状态，由于其热容量与体积成正比：因此其热容量与天体半径的立方成正比. 天体通过表面辐射散热，失去热量的速率与表面积成正比，即与天体半径的平方成正比，因此可粗略推论，天体的冷凝速度与其半径成反比，即天体的体积越小，冷凝速度越快. 月球直径约为地球的四分之一，密度又比地球小得多，因此可粗略估计月球的冷凝速度比地球快四倍. 若

形成地球外壳需要的时间为三十多亿年，则形成月亮外壳需要的时间应该不到八亿年. 现在的月球应该是保留了在大约三十亿年前冷凝时的形状. 当然，月球的冷凝过程也需要几亿年的时间. 为了解释月球为什么会形成三轴椭球体的形状，Garrick-Bethell 等 [13] 认为：月球曾经沿着一条椭率很大的近地轨道运行，而且月球的自转周期与轨道周期共振. 因此月球上的形变是比较固定的，椭率很大的低轨道则提供了强大的地球引潮力. 设在三十多亿年前，月球还处于液态，在月球自转离心力位 $U_{\rm M}$ 和地球引潮力位 $W_{\oplus}$ 的作用下，月球表面形变的上升量 Δr 为：

$$\Delta r = h_{\rm f}\frac{(U_{\rm M}+W_{\oplus})}{g_{\rm M}}\,. \tag{13}$$

在这 $h_{\rm f}=1.934$, 是流体勒夫数 [14]. 液体月球在引潮力和自转离心力的作用下，由于液态物质的自吸引，形变增加了几乎一倍. 设记 $V_{\rm M}$ 为月球形变后的自身引力位，随着月球逐渐冷却和凝固，以及月球轨道的演变，月球逐渐远离地球，自转逐渐变慢，$U_{\rm M}$ 和 $W_{\oplus}$ 的数值也越变越小，但是固化的月球使得 $V_{\rm M}$ 被保留下来. 据文 [15] 的研究，原始月球的岩石圈，在一亿年中，它的二阶项仅仅回复 20%. 因此月球形变的绝大部分仍然能被保持. 假定月球引力场仍然保持凝固时的状况，那么今天观测到的月球引力位，基本上反映了月球凝固时的情况.

以下利用最近给出的 JGL 月球引力场模型 JGL150Q1[16], 主要研究与二阶位有关的月球形状，只需取月球引力场 $V_{\rm M}$ 的低阶引力位，设取到六阶，

$$\begin{aligned} V_M \;=\; & \frac{GM_{\rm M}}{r}[1+\frac{R_{\rm M}^2}{r^2}(C_{20}P_2^0(\sin\vartheta)+P_2^2(\sin\vartheta)(C_{22}\cos(2\lambda)+S_{22}\sin(2\lambda)))\\ & +\frac{R_{\rm M}^3}{r^3}(C_{30})P_3^0(\sin\vartheta)+P_3^1(\sin\vartheta)(C_{31}\cos\lambda+S_{31}\sin\lambda)+P_3^2(\sin\vartheta)\\ & \times(C_{32}\cos(2\lambda)+S_{32}\sin(2\lambda))+P_3^3(\sin\vartheta)(C_{33}\cos(3\lambda)+S_{33}\sin(3\lambda))\\ & +\frac{R_{\rm M}^4}{r^4}C_{40}P_4^0(\sin\vartheta)+\frac{R_{\rm M}^5}{r^5}C_{50}P_5^0(\sin\vartheta)+\frac{R_{\rm M}^6}{r^6}C_{60}P_6^0(\sin\vartheta)]\,. \end{aligned} \tag{14}$$

二阶位 C_{20}, C_{22} 是与惯量矩 A, B, C 有关的,

$$\begin{cases} C_{20}=\frac{(2C-B-A)}{2M_{\rm M}R_{\rm M}^2} \\ C_{22}=\frac{(B-A)}{4M_{\rm M}R_{\rm M}^2} \end{cases}\,, \tag{15}$$

将 (10) 式求得的 A, B, C 数值代入，可以验证它是与 JGL 月球引力场模型给出的数值

$$\begin{cases} C_{20}=2.0326\times10^{-4} \\ C_{22}=2.23584\times10^{-5} \end{cases}\,. \tag{16}$$

是互相符合的.

为了与前一节的结果比较，不必考虑月球的自转离心力位，只计算 $V_{\rm M}$ 所对应的月球形状。取 $V_{\rm M}=$ 常数，因此有： $V_{\rm M}=GM_{\rm M}K/R_{\rm M}$, 在这 K 是常数. 取向地球一点上的

月面坐标为 $(R_{\rm M}, 90^\circ, 0^\circ)$, 代入到 (14) 式，可求得此常数 K 的值. 月球引力位系数一般小于 10^{-4} 量级， r 与 $R_{\rm M}$ 相比只有不到千分之一的差异，可近似地取 $R_{\rm M}^n/r^n = 1$. 由 (14) 式可以导出计算月球的向径长度 r 的公式，

$$\begin{aligned} r &= R_{\rm M}[1 + \frac{R_{\rm M}^2}{r^2}(C_{20}P_2^0(\sin\vartheta) + P_2^2(\sin\vartheta)(C_{22}\cos(2\lambda) + S_{22}\sin(2\lambda))) \\ &+ \frac{R_{\rm M}^3}{r^3}(C_{30})P_3^0(\sin\vartheta) + P_3^1(\sin\vartheta)(C_{31}\cos\lambda + S_{31}\sin\lambda) + P_3^2(\sin\vartheta) \\ &\times(C_{32}\cos(2\lambda) + S_{32}\sin(2\lambda)) + P_3^3(\sin\vartheta)(C_{33}\cos(3\lambda) + S_{33}\sin(3\lambda)) \\ &+ \frac{R_{\rm M}^4}{r^4}C_{40}P_4^0(\sin\vartheta) + \frac{R_{\rm M}^5}{r^5}C_{50}P_5^0(\sin\vartheta) + \frac{R_{\rm M}^6}{r^6}C_{60}P_6^0(\sin\vartheta)]/K\,. \end{aligned} \tag{17}$$

以月球引力场模型的数据代入，取向地球方向的向径长度 $R_{\rm M} = 1.73753 \times 10^6$m, 由 (17) 式可求得近似的月球水准面形状. 由于月球引力场系数 $S_{\rm ij}$ 与 $C_{\rm ij}$ 一样，也是 10^{-4} 量级，因此月球的水准面形状无论在那一个方向，都是不对称的. 在图 1 中给出了沿三个主轴方向的月球向径与 $R_{\rm M}$ 数值之差. 可以看出， $a > b > c$, 而且每个方向的向径长度，其正向和反向也不相同，有几十米的差别.

需要特别注意的是，真正的月面形状与水准面形状是大有区别的. 由 (13) 式可知，月面形变几乎增加了一倍. 由图 1 中的数值可求出月球水准面的三个半长径之差：

$$\begin{cases} a' - b' = 233.1m \\ b' - c' = 340.3m \\ a' - c' = 573.4m \end{cases}, \tag{18}$$

与 (12) 式比较， (12) 式的数值比 (18) 式的几乎都大了一倍. 这也验证了前面的说法：即在研究月球形状时，必需考虑流体勒夫数的影响. 真正的月面形变比由月球引力场求得的水准面平衡潮高几乎要大一倍.

5 对月球凝结时形状和自转周期的估计

设 ξ 为地球引潮力位 $W_\oplus$ 在月球上引起的最大平衡潮高， η 为月球自转离心力位 U_M 在月球赤道上所引起的平衡潮高. 若月球在自转和地球引潮力的作用下，是按照平衡潮的方式发生形变，则月球三个主轴 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ 的长度为：

$$\begin{cases} \bar{a} = R_{\rm M} + \xi + \eta \\ \bar{b} = R_{\rm M} - \frac{1}{2}\xi + \eta \\ \bar{c} = R_{\rm M} - \frac{1}{2}\xi \end{cases}, \tag{19}$$

因此只要知道月球三个主轴长度相互之间的差就可以推算 ξ 和 η 的数值，

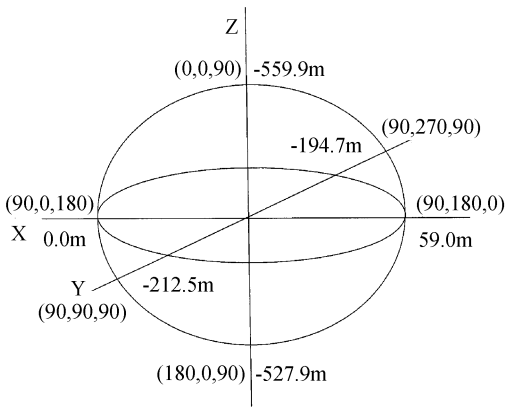

图 1 根据月球引力场绘出的月球水准面图，括号中的三个数字，分别为余纬 ϑ, 经度 λ 和 Z, 另一数字为水准面相对于圆形月球高.

Fig. 1 The Moon's equilibrium figure produced from lunar spherical-harmonic gravity coefficients. The three numbers in brackees are ϑ, λ and Z. The another number is the relative altitude to the spherical Moon.

$$\begin{cases} \bar{a}-\bar{b}=\frac{3}{2}\xi \\ \bar{b}-\bar{c}=\eta \\ \bar{a}-\bar{c}=\frac{3}{2}\xi+\eta \end{cases}, \tag{20}$$

(12) 式给出了月球三个主轴的长度差. 在前一节已经证明，这是对于液态月球的结果，要归算为平衡潮高，必需除以流体勒夫数 h_{f}, 考虑到形变的回弹，以及 (12) 式与 (18) 式的比值，取 $h_{\mathrm{f}}=1.9$, 由 (12) 式，将 3 个半长径的差值分别除以 1.9 , 有：

$$\begin{cases} \bar{a}-\bar{b}=209.5m \\ \bar{b}-\bar{c}=371.6m \\ \bar{a}-\bar{c}=581.1m \end{cases}, \tag{21}$$

(21) 式三个方程右边的数值，是分别独立求得的，然而令作者感到十分奇妙的是，他们竟然非常地互相符合. 将 (21) 式代入到 (20) 式，可以算出，

$$\begin{cases} \xi=139.7m \\ \eta=371.6m \end{cases}, \tag{22}$$

首先讨论 ξ, 最大潮高 139.7 m 是现在最大潮高 13.078 m 的 10.68 倍. 由于潮高与月地距离的立方成反比，因此可推出月球临凝结时的月地距离 $l=3.844\times10^8/\sqrt[3]{10.68}=1.7455\times10^8$ m, 比现在的月地距离近了 2.2 倍，相当于地球半径的 27.4 倍. 利用开普勒第三定律可以推算出那时的恒星月周期 (轨道周期) 为 8.34 day.

再讨论 η, 由 (1) 式和 (4) 式，取 $\vartheta = 90°$, $g_{\rm M} = 1.62{\rm ms}^{-2}$, 可求得在月球临凝结时的自转角速度 ω,

$$\omega = \left(\frac{2 \times 371.6 \times 1.62}{R_{\rm m}^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.997 \times 10^{-5} s^{-1}\,, \tag{23}$$

相对与空间参考系，日长等于 86164.0945s, 因此月球相对于空间参考系的自转周期为 $P = 2\pi/(\omega \times 86164.0945) = 3.652\,{\rm day}$. 即在二十多亿年前月球的自转周期为 3.652 天.

6 总结与讨论

根据本文的论证，可以得到如下 3 个结论：

(1) 现在的月球形状基本上是保留了大约三十亿年前月球凝结时的形状.

(2) 在自转离心力位和地球的引潮力位的作用下，液体月球形状发生变化. 由于流体勒夫数 $h_{\rm f} = 1.934$, 所以月面形变的高度变化几乎增加了一倍. 作者将利用天平动参数求得的月球三个主轴长度，与用月球引力场求得的结果进行了比较，证明了如上结论. 因此若想用月球引力场推算月球的形状，必需考虑到流体勒夫数的影响.

(3) 在几十亿年前月球曾经离地球很近，而且以较快的速率自转. 根据月球三个主轴长度之差，推算了月球临凝固时的自转周期为 3.652 天，月地距离为 $1.7455 \times 10^8\,{\rm m}$, 比现在月地距离近了 2.2 倍，相当于地球半径的 27.4 倍，由此算出恒星月长度为 8.34 day. 因此月球的自转速率与绕地轨道速率之比约为 2.2:1, 很接近于共振. 为了解释月球为什么会形成三轴椭球体的形状， Garrick-Bethell 等认为：月球曾经沿着一条椭率很大的近地轨道运行，而且月球的自转周期与轨道周期共振 [13]. 在月球通过近地点时，强大的地球引潮力使得月球在向地球的方向上被拉长，共振保证了月球上的形变是比较固定的. 月球岩石圈形变的弛豫时间远远长于轨道周期，因此月球的形变被积累和保留下来. 本文的结果支持了这种观点.

参 考 文 献

1 P. S. Laplace, Traité de Mécanique Céleste (Paris Duprat , Bachlier 1798-1827), Vol. 2, book 5, chap. 2

2 W. F. Sedgwick, Messenger Math. 27, 171(1898)

3 H. Jeffreys, Mem. R. Astron. Soc. 60, 187(1915)

4 H. Jeffreys, Men. Not. R. Astron. Soc. Geophys. Suppl. 4, 1(1937)

5 Kimmo Innanen, Solving Laplace's Lunar puzzle, Science, 4 August 2006, Vol. 313, 622-623

6 Yoder, C. F. Astrometric and Geodetic Properties of Earth and the Solar System, Global Earth Physics, A Handbook of Physical Constants, AGU Reference Shelf 1,1995. 1-31

7 A. S. Konopliv, et al. Improved gravity field of the Moon from lunar prospector, Science, vol. 281, 1998, 1476-1480

8 Dickey, H. O., Bender, P.L., et al. Lunar laser ranging: A Continuing Legaxy of Apollo Program, Science, 1994, 265, 482-490

9 Williams, J. G., Newhall, X. X., Dickey, J. O., Lunar gravitational harmonics and the reflector coordinates, in Proc. Int. Symp. Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets, Prague, 1986, Hotola, P. ed., 643-648, 1987

10 胡中为，萧耐园著，天文学教程，高等教育出版社， 1987 ， P225-227
11 Hartmann, W. K. and D.R. Davis, Satellite-sized planetesimals and lunar origin, Icarus 24, 505-515, 1975
12 Runcorn, S. K., Evidence from the Early Moon, The Origin of the Solar System (A79 13026 03-91), Chichester, Susser, England and New York, Wiley Interscience, 1978, P641-645
13 Ian Garrick-Bethell, Jack Wisdom, Maria T. Zuber, Evidence for a past high-eccentricity Lunar orbit, Science, 4 August 2006, Vol. 313, 652-655
14 地球自转的变化， K. 兰伯克著，李志安等译，地震出版社， 1988, (32-33).
15 S. Zhong, M. T. Zuber, J. Geophya. Res. 105. 4153(2000)
16 Lunar Prospector Gravity: Spherical Harm. Model and Digital Data Archive(PDS), NSSDC:PSPG-00623 http://nssdcgsfc.nasa.gov/database/MasterCatalog?ds=PSPG-00623, 1998

The Estimate on Lunar Figure

GAO Bu-xi
(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica, Wuhan* 430077)

Abstract In 1799 Laplace had discovered that the lunar three principal momentum are not in equilibrium with the Moon's current orbital and rotational state.Some authors suggested that the Moon may carry a fossil figure. Before more 3 billion years the liquid Moon was closer to the Earth and revolved faster.Then the Moon migrated outwards and revolved slow down. During the early part of this migration, the Moon was continually subjected to tidal and rotational stretching and formed into an ellipsoid. Then the Moon cooled and solidified quickly. Eventually, the solid Moon's lithosphere was stable, so that we may see the very early lunar figure.

In this paper, by using the lunar libration parameters and the spherical-harmonic gravity coefficient, the length of three radii a, b, c of the ellipsoid and the Moon's figure as an equilibrium tidal have been calculated. Then three conclusions can be obtained;

(1) In the beginning the Moon may be very close to the Earth, before about 3 billion years the moon may cooled and solidified, and the present Moon are in the fossil figure.

(2) In the third section of this paper, we demonstrate that the tidal deformation of liquid Moon was 1.934 times then the equilibrium tide. So that if to calculating the true lunar figure by using the lunar spherical-harmonic gravity coefficients, the effects of Liquid Love number $h_f = 1.934$ must be considered.

(3) According to the difference between a, b and c, the lunar distance ($1.7455 \times 10^8\, m$) and spin period 3.652day can be calculated. So that the lunar orbits period was 8.34day. Hence the Moon was locked closely into a resonance orbit in the ratio $2:1$ when the Moon froze.

Key words Moon: Libration, Moon: Gravity Field