第 50 卷 第 1 期 天 文 学 报 Vol.50 No.1
2009 年 1 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Jan., 2009

灰色 – 自回归动态模型用于原子时尺度计算*

袁海波 [1,2†] 董绍武 [1]

(1 中国科学院国家授时中心 西安 710600)
(2 中国科学院研究生院 北京 100039)

摘要 由于各种噪声和其他因素的影响，原子钟运行情况十分复杂. 为了准确地预测其确切的频率变化或钟速，有必要研究建立一个可靠的预测模型，通过模型预测原子钟的钟速，以便在地方协调时的监控和地方原子时计算中采用. 讨论了如何利用灰色模型与自回归模型对原子钟钟速进行预测，研究并提出了二者的综合模型，结合国家授时中心原子钟实际数据进行了验证，并给出了不同原子钟对应模型的预测精度计算方法.

关键词 天体测量学，时间
中图分类号： P 127; **文献标识码**： A

1 引言

原子钟本身是一个非常复杂的设备，其运行受到的各种可能的因素的影响，而且具有一定的随机性 [1]. 对于造成这种随机性变化的因素并不十分明了，所以可视其为灰色系统 (此处将原子钟视为一个完整的信号输出设备，而不是一个振荡器). 目前国际上主要授时钟为铯原子钟和氢原子钟，两种类型的原子钟所具有的稳定度不同，一般情况下铯原子钟的长期稳定度优于氢原子钟，而其短期稳定度却不如氢原子钟 [2]. 以国家授时中心一台 Agilent 5071A 铯原子钟 Cs1016 和一台 Sigma τ 氢原子钟 H226 为例， Cs1016 的长期 (大于一天) 稳定度优于同期 H226 的稳定度，而短期稳定度刚好相反.

灰色模型建模所需的样本采样少、计算简单，对于满足建模条件的样本，具有建模精度高的特点，同时由于原子钟速率每月由国际计量局 (Bureau International des Poids et Mesures, 简写为 BIPM) 发布，数据量很少，所以可以考虑使用灰色模型. 但是其也有一定的局限性 [1], 对于累加序列并非指数序列的数据预测考虑较少. 为了适应原子钟本身的特点，需要对模型的进行必要的修正，特别是在遇到某些原子钟运行有一个较为明显的线性 (或近似线性) 趋势时，必须进行模型修正. 为了适应一般情况，在建立原子钟运行的模型时，我们采用了灰色与自回归模型相结合的方法 —— 灰色 — 自回归动态模

2008-02-25 收到原稿， 2008-04-07 收到修改稿
* 国家自然科学基金 (60272067) 资助
† yuanhb@ntsc.ac.cn

型. 如果模型精度有保证, 那么就可以利用该模型预测的钟速进行参考原子时 (Reference Atomic Time, 简写为 RTA) 与地方原子时的计算，进而提高地方协调时的控制精度与地方原子时的稳定度.

2 灰色理论与自回归模型

2.1 灰色理论 [3]

在灰色系统理论中， GM(1,1) 模型是最常用的一种灰色模型，它是由一个只包含单变量的一阶微分方程构成的模型，适合于对本身数据的预测.

设有变量 $X^{(0)}$ 的原始数据序列:

$$X^{(0)}=\left\{x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n)\right\},n\text{为原始数据个数;} \tag{1}$$

与之对应的时间为 $t_{\rm i}(i=1,2,\cdots,n)$.

用 AGO(Accumulated Generating Operation) 生成一阶累加模块 $X^{(1)}$

$$X^{(1)}=\left\{\ x^{(1)}(1),\quad x^{(1)}(2),\quad \cdots\quad x^{(1)}(n)\ \right\}, \tag{2}$$

由一阶灰色模块 $X^{(1)}$ 构成的微分方程为:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b\,, \tag{3}$$

根据导数离散化形式，微分方程以矩阵形式可写成:

$$\left[\begin{array}{c} x^{(0)}(2)\\ x^{(0)}(3)\\ \vdots\\ x^{(0)}(N)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{2}\left[x^{(1)}(1)+x^{(1)}(2)\right] & 1\\ -\frac{1}{2}\left[x^{(1)}(2)+x^{(1)}(3)\right] & 1\\ \vdots & 1\\ -\frac{1}{2}\left[x^{(1)}(N-1)+x^{(1)}(N)\right] & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c} a\\ b\end{array}\right], \tag{4}$$

简写成:

$$Y=AU \tag{5}$$

其中,

$$Y=\left[\begin{array}{c} x^{(0)}(2)\\ x^{(0)}(3)\\ \vdots\\ x^{(0)}(N)\end{array}\right],A=\left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{2}\left[x^{(1)}(1)+x^{(1)}(2)\right] & 1\\ -\frac{1}{2}\left[x^{(1)}(2)+x^{(1)}(3)\right] & 1\\ \vdots & 1\\ -\frac{1}{2}\left[x^{(1)}(N-1)+x^{(1)}(N)\right] & 1\end{array}\right],U=\left[\begin{array}{c} a\\ b\end{array}\right]$$

利用最小二乘原理，可求得参数估计值为:

$$\hat{U}=(A^TA)^{-1}(A^TY)=\left[\begin{array}{c}\hat{a}\\ \hat{b}\end{array}\right], \tag{6}$$

回到原来的微分方程有：

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+\hat{a}x^{(1)}=\hat{b}\,, \tag{7}$$

得解为：

$$\hat{x}^{(1)}(t)=\left[x^{(1)}(0)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right]e^{-\hat{a}t}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\,, \tag{8}$$

离散形式为：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left[x^{(0)}(1)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right]e^{-\hat{a}k}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\,, \tag{9}$$

其中， k 为参与预报的原始数据个数.

一般形式为：

$$\hat{x}^{(1)}(k+p)=\left[x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right]e^{-a\cdot(k+p-1)}+\frac{b}{a}\,, \tag{10}$$

其中， $p\geq 1$ 为预报点. 则预报后的原始观测序列为：

$$\hat{x}^{(0)}(k+p)=\left[x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right]e^{-a\cdot(k+p-1)}\cdot(1-e^{a})\,, \tag{11}$$

或者，可以简化地表达为：

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1)\,. \tag{12}$$

整个灰色模型预报过程可以表达为：

$$\hat{x}^{(0)}(k+p)=IAGO\cdot GM(1,1)\cdot AGO\cdot x^{(0)}\,. \tag{13}$$

其中， IAGO, AGO 分别为累减生成序列和累加生成序列.

2.2　自回归线性模型 [4]

首先假设线性方程有如下形式：

$$X^{(0)}(t)=ct+d\,, \tag{14}$$

其中 t 为时间， c 、 d 为模型系数. 线性自回归关键在于确定模型系数，根据 $\{X^{(0)}(t)\}$ 的实际数据，可以通过最小二乘法来确定 c 、 d 的值，记为 $\hat{c}$ 、 $\hat{d}$, 若 k 表示模型所采用的样本总数，则对第 k+1 个数据的预测公式为：

$$\hat{X}^{(0)}(k+1)=\hat{c}(k+1)+\hat{d}\,. \tag{15}$$

3 灰色 — 自回归动态模型

3.1 灰色 — 自回归动态模型具体形式

虽然灰色模型预测具有计算简单、所需数据量较少、精度高的特点，但其对线性系统的预测存在缺陷，为了解决这个问题，我们考虑利用线性自回归模型对原灰色模型进行修正，这样综合的两种预测模型的优势，而且预测模型所采用的原始数据随着时间不同按照排队原理先进先出，从而实现动态变化．这种新模型类似于 “等维新息 GM(1, 1) 模型”, 但又有不同.

原始序列 $X^{(0)}$, 设预测序列为 $\hat{X}^{(0)}$, 记 σ^2 为 $X^{(0)}-\hat{X}^{(0)}$ 的方差，若 $\hat{X}^{(0)}$ 为灰色预测记为 $\hat{X}^{(0)}_{\rm grey}$, 对应的方差为 $\sigma^2_{\rm grey}$; 若 $\hat{X}^{(0)}$ 为自回归预测记为 $\hat{X}^{(0)}_{\rm ar}$, 对应的方差为 σ^2_{ar}, 根据加权理论确定不同预测结果在预测中的权重．根据式 (9) 、 (11) 可得到动态加权预测模型为：

$$\begin{cases} w_{\rm grey}(t)=\frac{1/\sigma^2_{\rm grey}}{1/\sigma^2_{\rm grey}+1/\sigma^2_{\rm ar}}, w_{\rm ar}(t)=\frac{1/\sigma^2_{\rm ar}}{1/\sigma^2_{\rm grey}+1/\sigma^2_{\rm ar}} \\ \hat{X}^{(0)}(k+1)=w_{\rm grey}(t)\hat{X}^{(0)}_{\rm grey}+w_{\rm ar}(t)\hat{X}^{(0)}_{\rm ar} \end{cases}, \tag{16}$$

其中权的计算也是随着 t 的变化而变化，所以整个模型都是建立在数据动态更新的基础上.

3.2 模型的检验

模型预测的准确度可以通过残差检验的方法进行检验．由于原子钟的实际钟速是 BIPM 每个月中旬根据国际原子时 (International Atomic Time, TAI) 的计算结果对外公布的，所以每月新钟速获得后，就可以对模型进行修改，并可检验前验预测结果，检验公式为：

$$\varepsilon(k)=\frac{X^{(0)}(k)-\hat{X}^{(0)}(k)}{X^{(0)}(k)}100\%\,. \tag{17}$$

模型的预测精度为：

$$p=(1-\frac{1}{n-1}\sum_{\rm k=2}^{n}|\varepsilon(k)|)100\%\,. \tag{18}$$

4 灰色 — 自回归动态模型计算步骤

由于使用 GM(1, 1) 模型建模所用的原始序列必须是非负的 [5], 所以在建模前需要对数据作必要的处理，在此为了保证序列性质不变，可以采用线性平移的方法，给原始序列加上一个常数．模型适用性证明主要证明灰色部分的适用性．然后再根据所预测的原子钟类型不同确定序列长度，进行建模、模型检验等．具体步骤如图 1 所示.

5　预测结果分析

上述模型是一个动态的灰色自回归综合模型 (下简称综合 synthetical model), 一方面考虑的自回归模型的优势，又利用灰色模型建立的动态模型，不仅可以保证具有线形运行规律的原子钟钟速预测的准确性，而且可以保证非线性变化的原子钟钟速预测的准确性和可靠性. 下面以国家授时中心守时实验室的几台铯原子钟和氢原子钟为例进行实际预测计算. 预测中使用的数据是国际计量局 (BIPM) 对外公布的国家授时中心原子钟实际数据. 为了预测结果准确性，实际上当无论采用多少点进行预测时，预测时间段越短准确度越高，所以在实际试算中只进行一步预测. 图 2 是 H227 利用 4 个月钟速预测的第五个月钟速与实际钟速的差异情况.

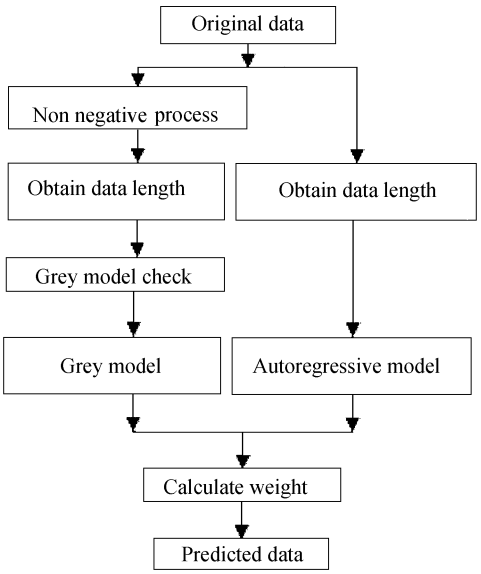

图 1　计算流程

Fig. 1　Calculation process

各种不同预测模型预测结果与真实钟速的差异具体见表 1 、表 2 、表 3.

从表 1 、 2 、 3 中可以看出，无论自回归模型还是灰色模型，都在某些原子钟钟速预测中表现较好，而综合 (即灰色 - 自回归动态模型) 模型无论是哪种原子钟，总是具有较好的预测精度.

根据模型预测精度计算公式 (式 18), 对新的综合模型精度进行检验，结果如表 4 所示.

另外，对于不同原子钟，当采用的预测点数不同时，可能出现不同的预测结果，这

必须根据实际情况，首先进行试算，以确定模型中最适合的原始点数. 表 5 给出了 H227 采用不同的原始预测点数预测钟速与真实钟速的偏差.

从表 5 中不同的预测点数对应的精度可以明显的看到 H227 在采用 4 点预测时，预测钟速精度高于其它点数. 但对于铯原子钟 Cs1820, 分析结果却是当预测原始点数达到 8 时，得到的预测精度最高.

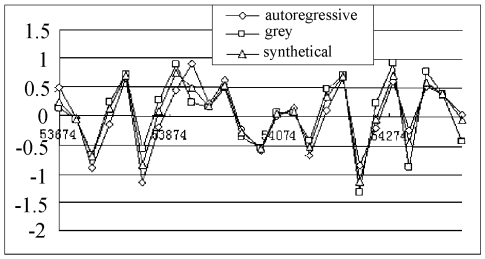

图 2 H227 不同预测模型预测结果比较

Fig. 2 Comparison of different forecast model of H227

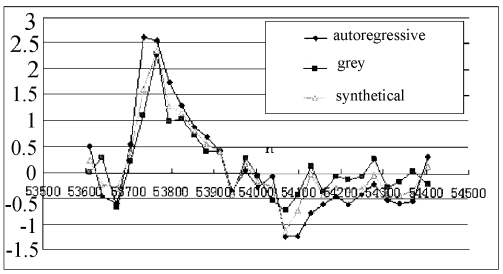

图 3 Cs1016 不同预测模型预测结果比较

Fig. 3 Comparison of different forecast model of Cs1016

表 1 H227 不同预测模型预测钟速精度比较

Table 1 Precision of different forecast model of H227

	autoregressive	grey	synthetical
average	0.102	0.155	0.125
stdev	1.000	0.650	0.763

表 2 Cs1016 不同预测模型预测钟速精度比较

Table 2 Precision of different forecast model of Cs1016

	autoregressive	grey	synthetical
average	0.026	0.013	0.020
stdev	0.530	0.653	0.534

表 3 Cs1820 不同预测模型预测钟速精度比较

Table 3 Precision of different forecast model of Cs1820

	autoregressive	grey	synthetical
average	-1.513	-0.044	0.116
stdev	1.236	0.353	0.329

表 4 新模型精度表

Table 4 Precision of the new model

Atomic clock	Precision of synthetical model
H227	99.18%
Cs1016	96.76%
Cs1820	90.70%

表 5 不同预测点数对预测结果的影响

Table 5 Influence of different point number original data

	4points	5points	6points	7points
average	-0.236	0.2313	0.4876	0.79
stdev	0.8244	0.8786	1.8636	3.2010

6 结论

通过上述分析, 可以明显地看出, 自回归 - 动态模型对原子钟运行规律拟合是实用可靠的. 相对于自回归模型与灰色模型, 其具有更好的鲁棒性. 对于不同的原子钟, 在建立该动态模型时首先要通过建立测试模型, 确定模型中须用的预测原始数据点的个数, 然后根据国家授时中心所采用的原子时算法 (ALGOS)[6,7] 将建立的模型应用于 UTC(NTSC) 的监控与地方原子时计算中.

参 考 文 献

1 Allan D W. Statistics of atomic frequency standards, Proc. IEEE, 1966, 54: 221

2 Thomas and .C Azoubib. J. Metrology, 1996, 33, 227

3 邓聚龙. 灰色系统基本方法, 华中工学院出版社, 2004, 38

4 Draper M R, Smith H. Applied Regression Analysis, 2^{nd} ed. John Wiley & Sons, New York,1981:27

5 熊和金, 徐华中. 灰色控制, 国防工业出版社, 2005, 37

6 Wang Z M, Yuan H B. AcASn, 2007, 48: 71(王正明, 袁海波. 天文学报, 2007, 48(1): 71)

7 Wang Z M, Yuan H B. CHA&A, 2007, 31: 308

Application of Dynamic Grey-Linear Auto-regressive Model in Time Scale Calculation

YUAN Hai-bo[1,2] DONG Shao-wu[1]

(1 *National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600*)

(2 *Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039*)

Abstract Because of the influence of different noise and the other factors, the running of an atomic clock is very complex. In order to forecast the velocity of an atomic clock accurately, it is necessary to study and design a model to calculate its velocity in the near future. By using the velocity, the clock could be used in the calculation of local atomic time and the steering of local universal time. In this paper, a new forecast model called dynamic grey-liner auto-regressive model is studied, and the precision of the new model is given. By the real data of National Time Service Center, the new model is tested.

Key words Astrometry, Time