

线性加权组合 Kalman 滤波在钟差预报中的应用*

王继刚^{1†} 胡永辉² 何在民^{2,3} 杨海彦^{2,3} 侯 娟^{2,3}

(1 淮海工学院测绘学院 连云港 222005)

(2 中国科学院国家授时中心 西安 710600)

(3 中国科学院研究生院 北京 100049)

摘要 建立原子钟运行模型, 实时预报钟差, 在时频工作以及卫星导航定位中有着非常重要的意义. 目前, Kalman 滤波是一类重要的钟差预测模型. 为了充分利用各种 Kalman 滤波模型的特点, 提出了线性加权组合 Kalman 滤波模型. 因此详细讨论了如何对每种 Kalman 滤波模型赋权, 并且给出了两种简单而又实用的赋权方法. 最后, 以 IGS (International GNSS Service) 精密铷钟数据为例, 运用该模型计算了预报误差. 结果表明, 线性加权组合 Kalman 滤波模型有利于提高钟差预报的准确性和可靠性.

关键词 时间, 方法: 数据分析

中图分类号: P 127; **文献标识码:** A

1 引言

原子钟是目前最准确的时间测量和频率标准, 建立原子钟运行模型, 预报钟差, 对于形成实时的时间尺度^[1] 以及保证卫星导航定位的精度^[2] 有着极其重要意义.

原子钟在运行过程中不可避免地受到各种因素的影响而产生噪声^[3-4]. 因此建立精确的原子钟运行模型非常困难, 相应地精确预报钟差也是非常困难, 在众多的模型中 Kalman 滤波方法具有重要的地位. 例如, GPS 主控站采用 Kalman 滤波模型来实时监测所有卫星钟的运行状况得到钟差预报值^[5]. 因此国内外众多学者研究了 Kalman 滤波模型. 在函数模型方面, 研究了滤波函数模型的维数^[6] 以及用谱密度经验值估计状态噪声^[7], 而随机模型方面主要是 Hutsell^[8] 推导了基于哈达玛方差的噪声参数公式. 国内学者的研究成果主要集中在研究模型建立、过程噪声参数的求解^[9-12] 以及自适应和方差递推方法实现 Kalman 滤波^[13-14] 等方面.

对于这些 Kalman 滤波模型, 每种模型都有各自的特点, 为此我们考虑组合 Kalman 滤波方法, 以充分有效地利用这些 Kalman 滤波的信息. 而线性加权是一种有效的组合方法, 利用线性加权组合不同方法预报结果, 已取得了较好的结果^[15-16]. 因此本文探讨线性加权组合 Kalman 滤波模型, 以期提高结果的准确性和稳定性.

2011-11-02 收到原稿, 2011-12-19 收到修改稿

* 国家自然科学基金项目 (41004003) 资助

† wjigang@sina.com

2 Kalman 滤波

2.1 Kalman 滤波步骤

以 3 维模型为例, 原子钟的 Kalman 滤波状态方程可表示为^[5]

$$\begin{bmatrix} x(t+\tau) \\ y(t+\tau) \\ z(t+\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau & \tau^2/2 \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中 τ 为采样时间间隔; $x(t)$ 、 $y(t)$ 和 $z(t)$ 分别为 t 时刻时差、频差和频漂; ε_x 、 ε_y 和 ε_z 为随机模型误差. 写成矩阵形式为

$$\mathbf{X}_k = \Phi \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{W}_k, \quad (2)$$

式中 $\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} x(t+\tau) & y(t+\tau) & z(t+\tau) \end{bmatrix}^T$ 为 t_k 时刻的 3 维状态向量, $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \tau & \tau^2/2 \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{W}_k$ 为动态模型误差向量.

原子钟相位数据的观测方程可表示为

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{X}_k + \Delta_k, \quad (3)$$

式中 $\mathbf{L}_k = [x(t+\tau)]$ 为 1 维观测向量; $\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$; Δ_k 为 1 维观测噪声向量, 其协方差为 Σ_k .

$\mathbf{X}_k$ 的最佳估值可以由下面一组递推公式实现^[17]:

(1) 计算预测状态向量及其协方差矩阵

$$\bar{\mathbf{X}} = \Phi \hat{\mathbf{X}}_{k-1}, \quad (4)$$

$$\Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_k} = \Phi \Sigma_{\hat{\mathbf{X}}_{k-1}} \Phi^T + \Sigma_{\mathbf{W}_k}. \quad (5)$$

(2) 计算预测残差及其协方差矩阵

$$\bar{\mathbf{V}}_k = \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{X}}_k - \mathbf{L}_k, \quad (6)$$

$$\Sigma_{\bar{\mathbf{V}}_k} = \mathbf{A}_k \Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_{k-1}} \mathbf{A}_k^T + \Sigma_k. \quad (7)$$

(3) 计算增益矩阵

$$\mathbf{K}_k = \Phi \mathbf{A}_k \Sigma_{\bar{\mathbf{V}}_k}^{-1}. \quad (8)$$

(4) 计算新的状态估值及其协方差矩阵

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \bar{\mathbf{X}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{L}_k - \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{X}}_k), \quad (9)$$

$$\Sigma_{\hat{X}_k} = (I - K_k A_k) \Sigma_{\bar{X}_{k-1}} (I - K_k^T A_k^T) + K_k \Sigma_{\bar{X}_k} K_k^T. \quad (10)$$

从以上公式可以看出, Kalman 滤波实际就是一个预报并利用新的测量信息进行更新的递推过程, 并通过协方差矩阵 $\Sigma_{\bar{X}_k}$ 和 Σ_k 来决定测量值的权.

2.2 Kalman 滤波预报钟差

2.2.1 确定噪声矩阵法

为实现 Kalman 滤波方法, 在 (5) 式中必须已知 W_k 协方差阵 Σ_{W_k} , 对于原子钟 Σ_{W_k} 可表示成如下矩阵^[7]

$$\Sigma_{W_k} = \begin{bmatrix} q_1\tau + q_2\tau^3/3 + q_3\tau^5/20 & q_2\tau^2/2 + q_3\tau^4/8 & q_3\tau^3/6 \\ q_2\tau^2/2 + q_3\tau^4/8 & q_2\tau + q_3\tau^3/3 & q_3\tau^2/2 \\ q_3\tau^3/6 & q_3\tau^2/2 & q_3\tau \end{bmatrix}, \quad (11)$$

式中 q_1 对应于 ε_x 的过程噪声参数, 表现为调相随机游走噪声; q_2 对应于 ε_y 的过程噪声参数, 表现为调频随机游走噪声; q_3 对应于 ε_z 的过程噪声参数, 表现为调频随机奔跑噪声.

而对于 (7) 式中, 观测噪声向量的协方差阵 Σ_k , 可取为 q_0 , 也可以根据实际情况确定观测向量的精度, 进而确定该向量的协方差阵.

对于这些参数, 可以根据长期的观测结果求得^[10-12]. 在一般的模拟仿真计算中, 铷钟通常取 $q_1 = 1.11 \times 10^{-22}$ 、 $q_2 = 2.22 \times 10^{-32}$ 和 $q_3 = 6.66 \times 10^{-46}$.

为了保持文章的简洁性, 以下将利用噪声矩阵预测的 Kalman 滤波模型称为标准模型 (CKF).

2.2.2 基于方差递推法

不同类型的原子钟噪声特性不一样, 即使是同一类型的原子钟在不同时长表现的噪声特性也不一样^[12], 而直接将 q_0 、 q_1 、 q_2 和 q_3 用于短时预报, 可能会带来较大的误差, 因此文献 [13] 选择了近似处理方法, 得到 Σ_{W_k} 和 Σ_k . 对 (2) 式移项可得

$$W = X_k - \Phi X_{k-1}, \quad (12)$$

于是可以近似地估计

$$\Sigma_{W_k} = (X_k - \Phi X_{k-1})(X_k - \Phi X_{k-1})^T, \quad (13)$$

顾及上一时刻的 Σ_{W_k} , 可以取

$$\Sigma_{W_k} = \frac{1}{2}\Sigma_{W_{k-1}} + \frac{1}{2}(X_k - \Phi X_{k-1})(X_k - \Phi X_{k-1})^T. \quad (14)$$

同理

$$\Sigma_k = \frac{1}{2}\Sigma_{k-1} + \frac{1}{2}(L_k - A_k X_k)(L_k - A_k X_k)^T. \quad (15)$$

这种近似处理方法在控制守时原子钟时得到了理想的结果, 该方法有两个突出的优点: 其一, 应用自身的建模过程推求噪声矩阵; 其二, 应用距离最近影响最大的原则. 这

样使得模型能较好地符合当前卫星钟运行状态, 对短期预报来说有利. 该模型存在的问题是 $\Sigma_{\mathbf{w}_k}$ 和 Σ_k 线性相关, 影响了 Kalman 滤波的效果. 因此在实际应用中, 尽量不要同时使用 (14) 式和 (15) 式.

以下将基于方差递推法 Kalman 滤波模型简称为递推模型 (VRKF).

3 线性组合 Kalman 滤波

线性组合 Kalman 滤波模型基本算法是依据一定的准则给定不同的 Kalman 滤波模型 (以下简称局部 Kalman 滤波) 适当的权, 取各局部滤波结果的加权平均值即得组合模型的结果. 为了简化计算, 通常要求权之和等于 1. 假设有 n 种不同的局部 Kalman 滤波模型, 那么组合模型可以表述为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{X}} = \sum_{j=1}^J \omega_j \hat{\mathbf{X}}_j \\ \sum_{j=1}^J \omega_j = 1 \\ 0 \leq \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \leq 1 \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, J), \quad (16)$$

其中 $\hat{\mathbf{X}}$ 为线性组合结果, ω_j 为第 j 种预测模型的权, $\hat{\mathbf{X}}_j$ 为第 j 种模型得到的预测的结果.

由 (16) 式可以看出, 实现线性组合的关键是确定权的方法. 下面给出两种相对简单的定权方法.

1. 等权. 如果不考虑每种局部滤波器的特点, 不考虑结果间的任何差异, 认为每种滤波器都独立地完成了预报任务, 那么组合滤波的结果就是所有局部滤波结果的平均值, 换句话说, 即每种局部滤波方法的权相等, 由 (16) 式易得

$$\omega_j = \frac{1}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (17)$$

可见这种定权方法, 权始终保持不变, 因此称这种模型为线性等权 Kalman 滤波模型 (EWCKF), 简称等权.

2. 运用残差构造权. 我们知道, 残差 $\mathbf{V}_k$ 是状态估值 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 与当前历元观测信息 $\mathbf{L}_k$ 的函数, 即

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{X}}_k - \mathbf{L}_k. \quad (18)$$

显然, 如果观测信息 $\mathbf{L}_k$ 可靠, 则残差的大小主要反映 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 的可靠性. 如果 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 与当前观测信息具有良好的一致性, 则 $\mathbf{V}_k$ 的数值一般较小; 反之, $\mathbf{V}_k$ 的数值一般较大, 甚至显著异常. 由于 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 是模型状态估值, 于是 $\mathbf{V}_k$ 的量级反映了 Kalman 滤波模型的误差. 因此, 可以以残差为变量构造模型误差的判别统计量

$$p_k = \frac{\mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k}{tr(\Sigma_{\mathbf{V}_k})}, \quad (19)$$

式中 $tr(\Sigma_{\mathbf{V}_k})$ 为 $\mathbf{V}_k$ 的协方差矩阵的迹. p_k 的大小反映了模型误差的大小.

我们可以从另外一个角度进一步解释 (19) 式. 理论上 $\mathbf{V}_k$ 的数学期望为零, 即

$$E(\mathbf{V}_k) = \mathbf{0}. \quad (20)$$

于是, 可将 $\mathbf{V}_k$ 的协方差矩阵写成

$$\Sigma_{\mathbf{V}_k} = E(\mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T), \quad (21)$$

相应的近似估值可取为

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{V}_k} = E(\mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T), \quad (22)$$

而由 (18) 式, 运用误差传播定律^[17]

$$\Sigma_{\mathbf{V}_k} = \Sigma_k - \mathbf{A}_k \Sigma_{\hat{\mathbf{X}}_k} \mathbf{A}_k^T. \quad (23)$$

如果模型误差较小, 则 $tr(\Sigma_{\mathbf{V}_k})$ 和 $tr(\hat{\Sigma}_{\mathbf{V}_k})$ 应该比较接近, 也就是说

$$\frac{tr(\Sigma_{\mathbf{V}_k})}{tr(\hat{\Sigma}_{\mathbf{V}_k})} \approx 1. \quad (24)$$

对于

$$tr(\hat{\Sigma}_{\mathbf{V}_k}) = tr(\mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T) = tr(\mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k) = \mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k, \quad (25)$$

代入 (24) 式, 即得到了判别统计量的表达式.

考虑到权与方差的关系, $\mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k$ 越大, 权 ω_k 应该越小. 因此, 在历元 k 时刻, n 种不同局部 Kalman 滤波模型的权之比应为

$$\omega_k^1 : \omega_k^2 : \cdots : \omega_k^n = \frac{1}{p_k^1} : \frac{1}{p_k^2} : \cdots : \frac{1}{p_k^n}. \quad (26)$$

顾及 (16) 式, 易得在历元 k 时刻, 各种局部 Kalman 滤波的权 ω_k^i ($i = 1, 2, \cdots, n$).

可见这种依据残差的大小定权, 每一个历元权值是变化的, 因此称这种模型为线性变权 Kalman 滤波模型 (VWCKF), 简称为变权.

4 算例分析

在评价预报方法的有效性时, 最常用的指标是外符合精度, 本文考虑以 IGS 钟差产品序列作为算例, 这样可以方便地得到外符合精度, 对预报方法的评价也更为客观. 为此, 从 <http://igsb.jpl.nasa.gov/components/prods.html> 网站上下载了 2011 年 9 月 15 日 (MJD55819) IGS 精密卫星钟差数据, 对其建模, 进而预报 MJD55820 的钟差. 时间序列采样间隔是 5 min, 1 d 共 288 个数据, 序列的长度能完全保证每种局部 Kalman 滤波进入稳态, 进而得到组合后的滤波参数, 分别进行了时长为 1 h、2 h 和 6 h 钟差预报, 将得到的预报值与下载的 MJD55820 钟差数据进行比较, 获得预报序列 RMS 值, 记为 θ , 即

$$\theta = \sqrt{\frac{1}{N}(L_{\text{IGS}} - L_{\text{Pred}})}, \quad (27)$$

式中 N 为预报时长内钟差的数目, L_{IGS} 为 IGS 钟差, L_{Pred} 为预报钟差. 根据 RMS 的大小, 进一步分析比较线性加权组合 Kalman 滤波预报钟差的特性.

在导航仿真模拟计算时, 常常选用铷钟, 因为铷钟的参数得到了较为广泛的认可. 目前 GPS 系统中在轨的具有 PRN 编号的 32 颗星载钟中, 铷钟有 25 颗, 由于 PRN01 数据缺失, PRN04 和 PRN26 星载钟数据序列平稳性差而没有采用, 故选取了其余的 22 颗铷钟数据, 分别运用了标准、递推、等权和变权的方法计算了预报结果的 RMS. 在具体的建模中, 滤波的初值由前 5 个历元, 依据最小二乘法求得, q_0 依据目前 IGS 公布的精度情况取为 $q_0 = 1.0 \times 10^{-20}$. 而递推模型中, $\Sigma_{\mathbf{W}_0}$ 取至标准模型, 以确保模型初值偏差较小, 达到平稳滤波目的. 基本的 Kalman 滤波模型建好后, 依据上述相应公式可实现线性加权模型算法, 进而得到相应的 RMS 值.

图 1~3 为不同时长 4 种方法预报这 22 颗星载钟的 RMS. 每种方法中, 这 22 个 RMS 值构成了一个序列, 表 1 给出了这 4 个 RMS 序列的统计结果. 其中, 均值 m 和标准差 σ 的计算方法如下

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_i,$$

(28)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\theta_i - m)^2}{N}},$$

(29)

式中 N 为序列中元素的个数, 此处为 22.

表 1 预报精度统计 (单位: ns)

Table 1 Statistics of prediction precision (unit: ns)

Statistic	One-hour prediction				Two-hour prediction				Six-hour prediction			
	VWCKF	EWCKF	CKF	VRKF	VWCKF	EWCKF	CKF	VRKF	VWCKF	EWCKF	CKF	VRKF
m	0.2554	0.2560	0.2636	0.2748	0.3907	0.3836	0.4062	0.4199	1.1444	0.9981	1.2195	1.0333
σ	0.1776	0.1749	0.1792	0.1995	0.2808	0.2657	0.2856	0.3270	1.0062	0.9591	1.0096	1.0794

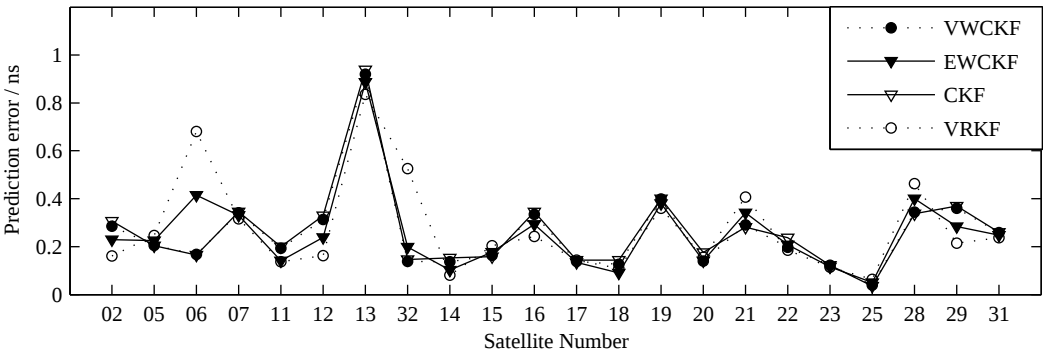


图 1 1 h 预报 RMS

Fig. 1 Prediction errors about one hour

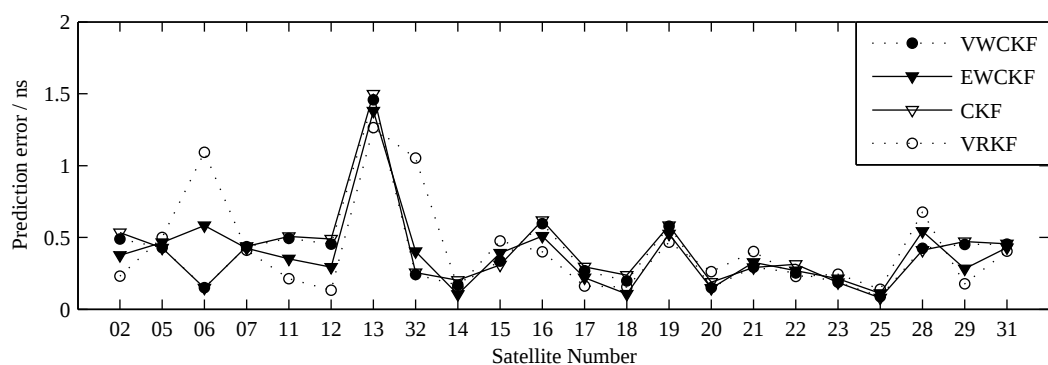


图 2 2 h 预报 RMS

Fig. 2 Prediction errors about two hours

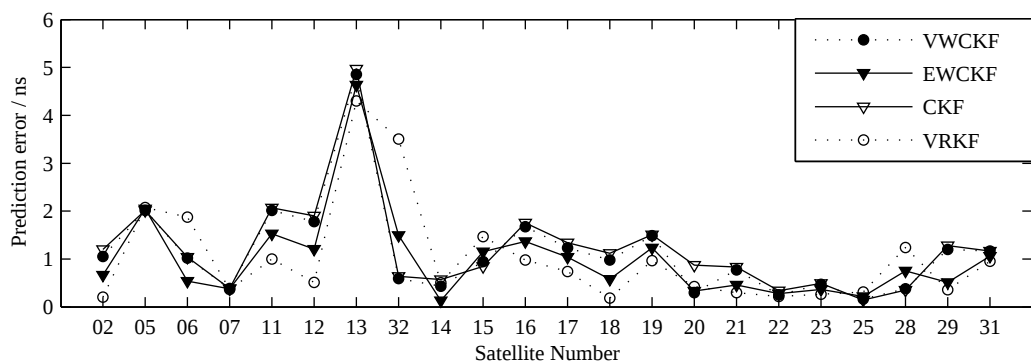


图 3 6 h 预报 RMS

Fig. 3 Prediction errors about six hours

分析图 1~3 和表 1 可知

(1) 线性加权组合 Kalman 滤波模型保留了 Kalman 滤波模型的优良特性, 并未改动 Kalman 滤波模型, 仍然得到物理意义明确的原子钟运行参数. 一般来说预报时间越短, 预报精度越高, 对于部分卫星, 部分时段出现了优组合预报, 即组合预报的精度高于任何一种局部模型.

(2) 整体上来看, 在所选择的预报时间长度内, 线性加权组合 Kalman 滤波模型预报 RMS 序列的均值和标准差小于任何一种局部 Kalman 滤波模型, 因此说组合模型预报精度高于任何一种局部模型.

(3) 在选取相同的局部 Kalman 滤波模型的条件下, 对于线性加权组合 Kalman 滤波模型来说, 等权与变权方法构建组合模型预报精度大体相当, 等权法预报稳定性略优于变权法.

5 结论与讨论

线性加权组合 Kalman 滤波模型, 继承了 Kalman 滤波的优良特性, 没有对任何一种局部 Kalman 滤波做实质性的改变, 保持了每种局部 Kalman 滤波的相对独立性和有效性. 实现该模型的算法核心是定权, 等权和变权两种加权方法简单易行, 且有效, 几乎没有增加算法的复杂度. 由于该模型充分利用了每种局部 Kalman 滤波的特点, 提高了预报结果的准确性和可靠性.

需要说明的是, 在应用线性组合 Kalman 滤波时, 应确保每种局部滤波器的方法有效, 才能充分体现组合 Kalman 优势. 该模型存在的问题是由于每种局部 Kalman 滤波都采用了相同的或相近的状态方程, 使得每种 Kalman 滤波之间并不完全相互独立, 导致权的大小有一定的相关性, 这个问题还需要进一步研究.

参 考 文 献

- [1] 漆贯荣. 时间科学基础. 北京: 高等教育出版社, 2006: 60
- [2] Panfilo G, Tavella P. Metrologia, 2008, 45: S108
- [3] 王正明, 袁海波. 天文学报, 2007, 48: 71
- [4] Wang Z M, Yuan H B. ChA&A, 2007, 31: 308
- [5] 郭海荣. 导航卫星原子钟时频特性分析理论与方法研究. 郑州: 中国人民解放军信息工程大学, 2006: 150
- [6] Shmaliy Y S, Marienko A V, Savchuk A V. California: 31st Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting, 2000: 431
- [7] Stein S R. Cornell: 43rd Annual Frequency Control Symposium, 1989: 232
- [8] Hutsell S T. San Diego: 27th Annu PTTI Syst Applications Meeting, 1995: 291
- [9] 卫国. 陕西天文台台刊, 1990, 13: 73
- [10] 郭海荣, 杨元喜, 何海波, 等. 测绘学报, 2010, 39: 146
- [11] 朱祥维, 肖华, 雍少为, 等. 宇航学报, 2008, 29: 966
- [12] 黄观文, 张勤, 王继刚. 大地测量与地球动力学, 2009, 29: 118
- [13] 李孝辉, 吴海涛, 高海军, 等. 控制理论与应用, 2004, 20: 551
- [14] 陈小敏, 李孝辉. 吉林大学学报: 理学版, 2009, 47: 591
- [15] 王继刚, 胡永辉, 何在民, 等. 天文学报, 2011, 52: 54
- [16] Wang J G, Hu Y H, He Z M, et al. ChA&A, 2011, 35: 319
- [17] 杨元喜. 自适应动态导航定位. 北京: 测绘出版社, 2006: 59

Clock Bias Prediction Based on Linear Weighted Combination Kalman Filter

WANG Ji-gang¹ HU Yong-hui² HE Zai-min^{2,3} YANG Hai-yan^{2,3} HOU Juan^{2,3}

(1 Department of Geomatic Engineering, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang 222005)

(2 National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600)

(3 Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

ABSTRACT Establishing the operation model of atomic clock to predict the clock bias and errors plays an important role in the time and frequency community. Currently, Kalman filter (KF) is one kind of the most important prediction models. In order to make full use

of several KF models' characteristics and combine these models' results, the linear weighted combination KF (LWCKF) model is put forward. The essence of LWCKF model is the weighted average of all local KF models. Therefore, how to determine the weight of every local KF is discussed in detail. As a simple and effective method, every local KF model is directly given with the same weight regardless of the differences among them. On the contrary, variational weight is built based on relation between the residual error and precision matrix. Finally, to demonstrate the efficiency of LWCKF, the rubidium atomic clock data downloaded from IGS (International GNSS Service) website are taken as an example. The results show that the accuracy and reliability of the atomic clock prediction are improved with the LWCKF model.

Key words time, methods: data analysis