

# 火星非球形引力位田谐项联合摄动分析解\*

周垂红<sup>1,2†</sup> 喻圣贤<sup>1,2</sup> 刘林<sup>1,2,3</sup>

(1 南京大学天文与空间科学学院 南京 210093)  
(2 南京大学空间环境与航天动力学研究所 南京 210093)  
(3 宇航动力学国家重点实验室 西安 710043)

**摘要** 火星非球形引力场模型与地球有明显差别, 其非球形引力位中的田谐项系数基本都要比地球的相应值大一个量级, 尤其是  $J_{2,2}$  项(赤道椭率项)的大小接近它的动力学扁率项  $J_2$ . 对于低轨探测器, 若要使轨道外推 1 d 弧段的精度达到 500 m(相当于标准单位  $10^{-4}$  量级), 在构造环火探测器的轨道分析解时, 田谐项与  $J_2$  项以及田谐项与田谐项之间的联合摄动不容忽视. 根据摄动量级分析和构造的摄动分析解证实, 上述联合摄动对轨道沿迹方向的影响可超过  $10^{-4}$ , 并给出了数值验证. 结果表明, 与地球低轨卫星不同, 在类似的问题中, 构造环火卫星摄动分析解时, 必须考虑这些联合摄动项的影响.

**关键词** 天体力学, 摄动理论, 方法: 分析, 方法: 数值

中图分类号: P 133; 文献标识码: A

## 1 引言

火星与地球类似, 自转速度相近, 其非球形引力位中的动力学扁率  $J_2$  的量级均为  $10^{-3}$ , 但由于质量分布不同, 非球形引力位中的其它细节也有明显差别. 为了对相关问题进行分析, 这里引用 Goddard Mars Model: GMM-2B, 其前 4 阶谐系数列于表 1 中.

不同的引力场模型并无本质差别, 不会影响本文要阐述的问题. 根据 GMM-2B 的谐系数与地球引力位的比较, 可以发现火星的动力学扁率  $J_2 = -\sqrt{5} \times \bar{C}_{2,0} \simeq 2 \times 10^{-3}$ , 与地球动力学扁率大小相当, 但其余谐系数几乎都要比地球相应项大一个量级左右. 特别是火星的赤道椭率  $J_{2,2} = \sqrt{5/12} \times (\bar{C}_{2,0}^2 + \bar{S}_{2,2}^2)^{1/2} \simeq 10^{-4}$ , 与火星动力学扁率  $J_2$  相比只差一个量级, 比地球的赤道椭率要大两个量级, 而火星非球形引力位的 3 阶田谐系数  $J_{3,3}$  与  $J_{2,2}$  相比也没有量级上的差别. 这给环火卫星分析解的构造以及相关的应用带来了如下麻烦:

由于  $J_{2,2} \simeq 10^{-4}$ , 仅比  $J_2$  值小一个量级, 而  $J_{2,2}$  摆动解中的火星自转项与  $J_2$  项短周期摄动量级相当,  $J_2$  与  $J_{2,2}$  的联合摄动量级可达  $10^{-6}$ . 可以证明: 虽然半长径的 1 阶短周期项  $a_s^{(1)}(t, J_2)$  和  $a_s^{(1)}(t, J_{2,2})$  中不含火星自转项, 而 2 阶短周期摄动项  $a_s^{(2)}(t, J_2 \cdot J_{2,2})$  却包含火星自转项, 这种项与  $J_2$  的 2 阶短周期摄动项相当. 对于低轨(如 500 km 高)卫

2011-09-15 收到原稿, 2011-11-16 收到修改稿

\* 国家自然科学基金项目(11033009)、青年基金项目(11003009)和宇航动力学国家重点实验室资助

† zhouchuihong@nju.edu.cn

星轨道外推 1 d 的弧段, 要到达 500 m 的精度, 就必须考虑  $J_2$  与  $J_{2,2}$  的联合摄动项, 这主要是因为  $a_s^{(2)}(t, J_2 \cdot J_{2,2})$  中包含火星自转项的缘故. 由于火星非球形引力摄动中的其它田谐项也很大, 类似  $J_2$  与  $J_{2,2}$  的联合摄动项, 其它田谐项的联合摄动项  $a_s^{(2)}(t, J_2 \cdot J_{l,m})$  以及  $a_s^{(2)}(t, J_{l,m} \cdot J_{I,J})$  也包含火星自转项, 同样需要考虑. 因此, 在处理与地球卫星的同类问题中(包括轨道分析、地面测控和星上自主外推等领域), 不仅需要考虑田谐项的影响, 相应的联合摄动项也需要考虑.

表 1 GMM-2B 的部分球谐系数

Table 1 Some of the harmonic coefficients in Mars gravity model GMM-2B

$l$	$m$	$\bar{C}_{l,m}$	$\bar{S}_{l,m}$
2	0	$-8.745054708 \times 10^{-4}$	0
3	0	$-1.188691065 \times 10^{-5}$	0
4	0	$5.125798718 \times 10^{-6}$	0
2	1	$1.3938449166 \times 10^{-10}$	$1.704428064 \times 10^{-10}$
2	2	$-8.417751981 \times 10^{-5}$	$4.960534884 \times 10^{-5}$
3	1	$3.905344232 \times 10^{-6}$	$2.513932404 \times 10^{-5}$
3	2	$-1.586341103 \times 10^{-5}$	$8.485798716 \times 10^{-6}$
3	3	$3.533854114 \times 10^{-5}$	$2.511398426 \times 10^{-5}$
4	1	$4.227157505 \times 10^{-6}$	$3.741321503 \times 10^{-6}$
4	2	$-1.025388411 \times 10^{-6}$	$-8.962295163 \times 10^{-6}$
4	3	$6.446128873 \times 10^{-6}$	$-2.729779031 \times 10^{-7}$
4	4	$9.638433482 \times 10^{-8}$	$-1.286136169 \times 10^{-5}$

文中给出  $a_s^{(2)}(t, J_{l,m} \cdot J_{I,J})$  的通项表达式,  $a_s^{(2)}(t, J_2 \cdot J_{l,m})$  归到  $a_s^{(2)}(t, J_{l,m} \cdot J_{I,J})$  中, 并给出  $J_2$  与  $J_{2,2}$  以及  $J_{2,2}$  与  $J_{2,2}$  联合摄动项的具体形式, 以便对相关问题进行分析. 最后数值验证, 从定性和定量两方面表明联合摄动的重要性以及通项公式的正确性.

## 2 研究火星低轨卫星受摄运动的数学模型

为了分析问题和计算方便, 本文采用了如下计算单位:

$$\begin{cases} [L] &= a_m = 3397 \text{ km}, \\ [M'] &= M', \\ [T] &= (a_m^3/(GM'))^{1/2} \approx 956.7038853 \text{ s}. \end{cases} \quad (1)$$

其中  $M'$ 、 $GM'$ 、 $a_m$  分别为火星的质量、引力常数和参考椭球体赤道半径. 在此单位选取下,  $G = 1$ ,  $\mu = GM' = 1$ . 在历元 (J2000) 火心天球坐标系<sup>[1-3]</sup>中, 火星探测器的运动方程为

$$\ddot{r} = \vec{F}_0 + \vec{F}_\varepsilon, \quad (2)$$

其中  $\vec{F}_0$  是中心天体 (火星) 的质心引力加速度,  $\vec{F}_\varepsilon = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t; \varepsilon^k)$  是各摄动源对应的摄动加速度,  $\varepsilon \ll 1$  是小参数. 对于火星低轨卫星, 可取  $\varepsilon = O(J_2) = 10^{-3}$  作为小参数, 同时  $J_{2,2}$  项的摄动量级也按一阶摄动考虑, 其它摄动项考虑为 2 阶摄动. 若用  $\sigma$

表示 6 个轨道根数, 即

$$\boldsymbol{\sigma} = (a, e, i, \Omega, \omega, M)^T, \quad (3)$$

上式右端的上标 T 表示转置, 相应摄动运动小参数方程如下:

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = f(\boldsymbol{\sigma}, t, \varepsilon) = f_0(a) + f_1(J_2, J_{2,2}) + f_2(J_{lm}) \quad (l \geq 3, m = 0 \sim l). \quad (4)$$

### 3 摆动分析解的建立

#### 3.1 轨道摄动解的表达

考虑到各种奇点问题, 本文采用了拟平均根数法<sup>[4-8]</sup>, 即参考解同时包括长期变化和长周期变化. 拟平均根数法的参考解如下:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}(t) + (\sigma_1 + \sigma_2 + \dots)(t - t_0) + \Delta\sigma_l^{(1)}(t) + \Delta\sigma_l^{(2)}(t) + \dots, \quad (5)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}(t) & = & \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t_0) + \delta\bar{n}_0(t - t_0), \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t_0) & = & \boldsymbol{\sigma}(t_0) - [\sigma_s^{(1)}(t_0) + \sigma_s^{(2)}(t_0) + \dots], \\ \boldsymbol{\delta} & = & (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T. \end{array} \right. \quad (6)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \dots$  为长期变化率,  $\Delta\sigma_l^{(1)}(t) = \sigma_l^{(1)}(t) - \sigma_l^{(1)}(t_0)$ ,  $\Delta\sigma_l^{(2)}(t) = \sigma_l^{(2)}(t) - \sigma_l^{(2)}(t_0)$ ,  $\dots$  为长周期变化,  $\sigma_s^{(1)}(t_0), \sigma_s^{(2)}(t_0), \dots$  为短周期项. 相应的轨道摄动解便可写成下列形式:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + [\sigma_s^{(1)}(t) + \sigma_s^{(2)}(t) + \dots]. \quad (7)$$

#### 3.2 摆动解的构造

这里主要考虑非球形引力位的联合摄动项, 除联合摄动项外相关的结果不再列出, 详见参考文献 [8-9], 下面讨论非球形引力项的联合摄动部分.

在构造通常意义上的一阶摄动解时, 需要考虑半长径  $a$  的 2 阶短周期项, 其中包括  $J_2^2$ 、 $J_2 \cdot J_{2,2}$ 、 $J_{2,2}^2$  等项,  $J_2^2$  项已有结果<sup>[8-9]</sup>. 由于火星非球形引力位存在降阶, 半长径处于 2 阶和 3 阶之间的短周期项同样需要考虑, 如  $J_2 \cdot J_{3,3}$  等类型的项. 为此有必要给出任意两阶谐系数  $J_{lm}$  ( $l \geq 2, m = 0 \sim l$ )、 $J_{IJ}$  ( $I \geq 2, J = 0 \sim I$ ) 的联合摄动解. 根据拟平均根数法, 与谐系数  $J_{lm}$ 、 $J_{IJ}$  相关的轨道半长径联合摄动项可以表示为

$$a_s^{(2)}(t, J_{lm} \cdot J_{IJ}) = \begin{cases} \int^t \left[ \left( \sum_j \frac{\partial f_{as}(J_{lm})}{\sigma_j} \sigma_{sd}(J_{IJ})_j \right)_s + \left( \sum_j \frac{\partial f_{as}(J_{IJ})}{\sigma_j} \sigma_{sd}(J_{lm})_j \right)_s \right] dt & J_{lm} \neq J_{IJ} \\ \int^t \left( \sum_j \frac{\partial f_{as}(J_{lm})}{\sigma_j} \sigma_{sd}(J_{IJ})_j \right)_s dt & J_{lm} = J_{IJ} \end{cases}, \quad (8)$$

$a_s^{(2)}(t, J_2 \cdot J_{lm})$  可由上式取  $J_{IJ} = J_{2,0}$  计算, 其中  $f_{as}(J_{lm})$  为由拉格朗日摄动方程得到的  $J_{lm}$  部分贡献的半长径  $a$  的右函数,  $\sigma_{sd}(J_{lm})$  则为  $J_{lm}$  直接积分得到的摄动解, 即:

$$\sigma_{sd}(J_{lm}) = \int^t \left[ \delta \frac{\partial n}{\partial a} a_{sd}(J_{lm}) + f_s(J_{lm}) \right] dt, \quad (9)$$

将  $f_{\text{as}}(J_{lm})$  和  $\sigma_{\text{sd}}(J_{lm})$  带入上式得

$$\int_s^t \left( \sum_j \frac{\partial f_{\text{as}}(J_{lm})}{\sigma_j} \sigma_{\text{sd}}(J_{IJ})_j \right) dt = -\frac{2}{na^2} \left(\frac{1}{a}\right)^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{N=-\infty}^{\infty} (l-2p+q) \times \\ \{ [-a(l+0.5)F_{lmp}(i)G_{lpq}(e)C_{IJKN}^a + F_{lmp}(i)G_{lpq}'(e)C_{IJKN}^e + \\ F_{lmp}'(i)G_{lpq}(e)C_{IJKN}^i] \times S_{-S_{lmpq,IJKN}} + F_{lmp}(i)G_{lpq}(e)[(l-2p) \times \\ C_{IJKN}^{\omega} + mC_{IJKN}^{\Omega} + (l-2p+q)C_{IJKN}^M] S_{-S_{IJKN,lmpq}} \}, \quad (10)$$

该式求和号中要求  $(l-2p+q \neq 0)$ , 且当  $J=0$  时,  $I-2K+N \neq 0$ . 交换下标  $lmpq \leftrightarrow IJKN$  即可求得 (8) 式中另一项:

$$\int_s^t \left( \sum_j \frac{\partial f_{\text{as}}(J_{IJ})}{\sigma_j} \sigma_{\text{sd}}(J_{lm})_j \right) dt,$$

公式中的相关量为

$$S_{-S_{lmpq,IJKN}} = A_{-A_{lmpq,IJKN}} + B_{-B_{lmpq,IJKN}}, \quad (11)$$

$$A_{-A_{lmpq,IJKN}} = \begin{cases} -\frac{A_{lm}A_{IJ}}{2} \frac{\cos(\phi_{lmpq} + \phi_{IJKN})}{\dot{\phi}_{lmpq} + \dot{\phi}_{IJKN}} - \frac{A_{lm}B_{IJ}}{2} \frac{\sin(\phi_{lmpq} + \phi_{IJKN})}{\dot{\phi}_{lmpq} + \dot{\phi}_{IJKN}} - \\ \frac{B_{lm}A_{IJ}}{2} \frac{\sin(\phi_{lmpq} + \phi_{IJKN})}{\dot{\phi}_{lmpq} + \dot{\phi}_{IJKN}} + \frac{B_{lm}B_{IJ}}{2} \frac{\cos(\phi_{lmpq} + \phi_{IJKN})}{\dot{\phi}_{lmpq} + \dot{\phi}_{IJKN}} , \\ 0 \quad \text{当 } (l-2p+q-I+2K-N=0) \text{ 且 } m=J \end{cases}, \quad (12)$$

$$B_{-B_{lmpq,IJKN}} = \begin{cases} -\frac{A_{lm}A_{IJ}}{2} \frac{\cos(\phi_{lmpq} - \phi_{IJKN})}{\dot{\phi}_{lmpq} - \dot{\phi}_{IJKN}} + \frac{A_{lm}B_{IJ}}{2} \frac{\sin(\phi_{lmpq} - \phi_{IJKN})}{\dot{\phi}_{lmpq} - \dot{\phi}_{IJKN}} - \\ \frac{B_{lm}A_{IJ}}{2} \frac{\sin(\phi_{lmpq} - \phi_{IJKN})}{\dot{\phi}_{lmpq} - \dot{\phi}_{IJKN}} - \frac{B_{lm}B_{IJ}}{2} \frac{\cos(\phi_{lmpq} - \phi_{IJKN})}{\dot{\phi}_{lmpq} - \dot{\phi}_{IJKN}} , \\ 0 \quad \text{当 } (l-2p+q-I+2K-N=0) \text{ 且 } m=J \end{cases}, \quad (13)$$

$S_{-S_{IJKN,lmpq}}$  可由  $S_{-S_{lmpq,IJKN}}$  交换下标得到, 其它符号相同仅仅脚标不同的量也可以由交换脚标得到. 公式中的其它量为

$$\begin{cases} A_{lm} = [(1-\delta_{lm})C_{lm} - \delta_{lm}S_{lm}], B_{lm} = [(1-\delta_{lm})S_{lm} + \delta_{lm}C_{lm}] \\ \delta_{lm} = \frac{1}{2}[1 - (-1)^{l-m}] \end{cases}, \quad (14)$$

$$\begin{cases} \phi_{lmpq} = (l-2p+q)M + (l-2p)\omega + m(\Omega - S(t)) \\ \dot{\phi}_{lmpq} = (l-2p+q)\dot{M} + (l-2p)\dot{\omega} + m(\dot{\Omega} - n_m) \end{cases}, \quad (15)$$

$n_m$  是中心天体自转速度,  $C_{lm}$ 、 $S_{lm}$  为非球形引力位的非归一化谐系数,  $S(t)$  为火星经度起量处的恒星时, 类似地球反映自转的格林尼治恒星时, 计算方法见参考文献 [1-3].

$$\begin{cases} F'_{lmp}(i) = \frac{d}{di} F_{lmp}(i) \\ G'_{lmp}(e) = \frac{d}{de} G_{lmp}(e) \end{cases}, \quad (16)$$

$F_{lmp}(i)$ 、 $G_{lmp}(e)$ 、 $C_{IJKN}^\sigma$  的具体形式见参考文献 [8]. 由上面的表达式即可计算任意两阶谐系数  $J_{lm}$ ,  $J_{IJ}$  的联合摄动项  $a_s^{(2)}(t, J_{lm} \cdot J_{IJ})$ . 前面提到的需要考虑的两部分联合摄动项为

$$a_s^{(2)}(J_2 \cdot J_{lm}) = \sum_{l \geq 2} \sum_{m=1}^l a_s^{(2)}(t, J_{lm} \cdot J_2), \quad (17)$$

$$a_s^{(2)}(J_{lm} \cdot J_{IJ}) = \frac{1}{2} \sum_{l \geq 2} \sum_{m=1}^l \sum_{I \geq 2} \sum_{J=1}^I a_s^{(2)}(t, J_{lm} \cdot J_{IJ}) + \frac{1}{2} \sum_{l \geq 2} \sum_{m=1}^l a_s^{(2)}(t, J_{lm} \cdot J_{lm}). \quad (18)$$

上面给出的是联合摄动解的通项公式. 为了清楚地了解联合摄动项的性质, 下面给出  $J_2$  与  $J_{2,2}$  以及  $J_{22}$  与  $J_{22}$  的联合摄动项的具体表达式, 保留到  $O(e^0, \alpha^0)$  项的结果如下:

$$\begin{aligned} a_s^{(2)}(t, J_2 \cdot J_{2,2}) &= \frac{9J_2J_{2,2}}{8\alpha^3} \left\{ \frac{40}{3} \sin^2 i (1 - \frac{5}{4} \sin^2 i) \cos(2\Omega_m) + \right. \\ &\quad [\sin^2 i (1 + \cos i) (\frac{2}{\alpha} + 2) - \sin^4 i (\frac{8}{\alpha} + 6) + \frac{28}{3} (1 - \frac{3}{2} \sin^2 i) (1 + \cos i)^2] \times \\ &\quad \cos(2M + 2\omega + 2\Omega_m) + \\ &\quad [-\sin^2 i (1 - \cos i) (\frac{2}{\alpha} + 2) + \sin^4 i (\frac{8}{\alpha} + 6) + \frac{28}{3} (1 - \frac{3}{2} \sin^2 i) (1 - \cos i)^2] \times \\ &\quad \cos(2M + 2\omega - 2\Omega_m) + \\ &\quad \left. \frac{4}{3} \sin^2 i [(1 + \cos i)^2 \cos(4M + 4\omega + 2\Omega_m) + (1 - \cos i)^2 \cos(4M + 4\omega - 2\Omega_m)] \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} a_s^{(2)}(t, J_{2,2} \cdot J_{2,2}) &= \frac{9J_{2,2}^2}{8\alpha^3} \left\{ \sin^2 i [24 \cos i \frac{1}{\alpha} + 28 (1 + \cos i)^2] \cos(2M + 2\omega) - \right. \\ &\quad \sin^2 i (1 + \cos i)^2 (\frac{8}{\alpha} + 2) \cos(2M + 2\omega + 4\Omega_m) + \frac{25}{3} \sin^4 i \cos(4\Omega_m) - \\ &\quad \sin^2 i (1 - \cos i)^2 (-\frac{8}{\alpha} + 2) \cos(2M + 2\omega - 4\Omega_m) + \frac{4}{3} \sin^4 i \cos(4M + 4\omega) + \\ &\quad \left. \frac{2}{3} (1 + \cos i)^4 \cos(4M + 4\omega + 4\Omega_m) + \frac{2}{3} (1 - \cos i)^4 \cos(4M + 4\omega - 4\Omega_m) \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Omega_m = \Omega - (S(t) + \lambda_{22}), \quad \lambda_{22} = \frac{1}{2} \arctan(S_{22}/C_{22}), \quad (21)$$

其中  $S(t)$  已在前面提到过, 具体计算方法见参考文献 [1-3].  $n$  为环火卫星轨道平运动角速度.  $a_s^{(2)}(t, J_2 \cdot J_{2,2})$  中含有火星自转因子的联合摄动部分如下:

$$a_s^{(2)}(t, J_2 \cdot J_{2,2}) = \frac{9J_2J_{2,2}}{4\alpha^3} \frac{1}{\alpha} \left\{ [\sin^2 i (1 + \cos i) - 4 \sin^4 i] \cos(2M + 2\omega + 2\Omega_m) - \right. \\ \left. [\sin^2 i (1 + \cos i) - 4 \sin^4 i] \cos(2M + 2\omega - 2\Omega_m) \right\}. \quad (22)$$

对于火星低轨卫星,  $\alpha \leq 0.1$ , 此即火星自转项重要性的根源, 相应项要比一般项大一个量级, 可使  $a_s^{(2)}(t, J_2 \cdot J_{2,2})$  的量级达到  $O(10^{-6}) \sim O(10^{-5})$ , 同样其它田谐项的联合摄动项  $a_s^{(2)}(t, J_{lm} \cdot J_{IJ})$  的值也可达  $O(10^{-6})$ , 从而外推 1~2 d 的时间弧段, 会对沿迹方向分别产生  $O(10^{-4}) \sim O(10^{-3})$  和  $O(10^{-4})$  量级的影响. 下面用高精度数值解验证这一结论.

## 4 联合摄动项摄动影响的数值验证

将摄动分析解与高精度数值解进行对比, 数值解采用嵌套的 RKF7(8) 积分器<sup>[10]</sup>, 分析解和数值解采用同一力学模型, 均只考虑火星非球形引力前 5 阶的摄动影响, 由于积分器的外推精度很高, 完全可以认为分析法与数值解的差别就是分析法的轨道预报误差。下面给出两个算例, 均源于某一深空探测任务的预研需求。

### 4.1 算例 1

初始时刻: 2010 年 6 月 1 日 0 时 (UTC)

初始轨道根数:  $a = 3797 \text{ km}$ ,  $e = 0.01$ ,  $i = 80^\circ$ ,  $\Omega = 40^\circ$ ,  $\omega = 40^\circ$ ,  $M = 280^\circ$ , 外推时间为一个火星日, 即  $\Delta t = 1477.3777 \text{ min}$ , 比对结果列于表 2 和图 1。

表 2 完整考虑联合摄动和不考虑联合摄动的分析解轨道外推一个火星日的误差状况

Table 2 Prediction errors of analytical solutions considered the coupled terms or not at about one Mars day

Prediction time	Method	$a(\text{km})$	$e(10^{-2})$	$i(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$(\Omega + \omega + M)(^{\circ})$
$\Delta t$	A	3793.132	1.231	80.001	38.196	164.205
	B	3793.125	1.231	80.001	38.196	164.112
	C	3793.125	1.231	80.001	38.196	164.114
$\Delta t + \frac{1}{4}T$	A	3797.422	1.211	80.034	38.178	254.225
	B	3797.552	1.211	80.034	38.178	254.130
	C	3797.551	1.210	80.034	38.177	254.132

表 2 中  $T=118.3924 \text{ min}$ , 是 400 km 高度的卫星轨道周期。A、B、C 的含义如下: A 为未考虑联合摄动的分析解; B 为完整考虑了本文讨论的半长径联合摄动项的分析解; C 为数值解。

图 1 中的 Method A、Method B 和 Method C 即表 2 中的方法 A、B 和 C。

从算例 1 可以看出, 本文讨论的联合摄动项对沿迹误差的影响可以达到  $10^{-3}$  的量级 (即表 2 中的  $0.09^\circ = 1.6 \times 10^{-3} \text{ rad}$ , 见方法 A 的结果。完整考虑了联合摄动项后的分析解精度明显提高, 见方法 B 的结果, 精度优于  $10^{-4}$ , 符合本文的理论分析, 下面再看算例 2。

### 4.2 算例 2

初始时刻: 2010 年 6 月 1 日 0 时 (UTC)

初始轨道根数:  $a = 3797 \text{ km}$ ,  $e = 0.01$ ,  $i = 80^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$ ,  $\omega = 60^\circ$ ,  $M = 90^\circ$ , 对比结果列于表 3, 其中  $\Delta t$ 、 $T$ 、C、B 的含义同算例 1, E 的含义为只考虑了  $J_{2,2}$  相关联合摄动的分析解, 即考虑了  $a_s^{(2)}(t, J_2 \cdot J_{2,2})$  和  $a_s^{(2)}(t, J_{2,2} \cdot J_{2,2})$ , 没有考虑其他田谐项的联合摄动。

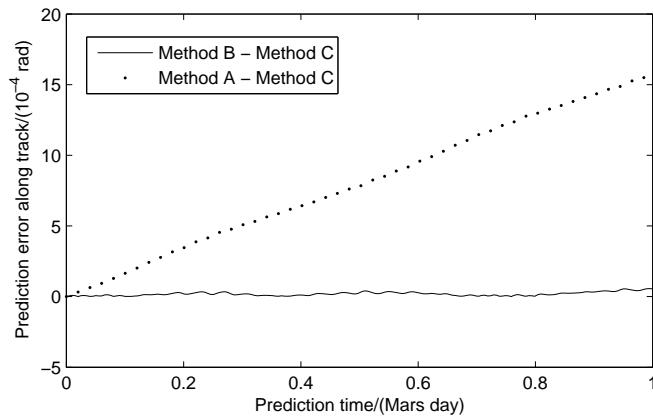


图 1 完整考虑联合摄动和不考虑联合摄动的分析解轨道外推一个火星日的沿迹误差状况

Fig. 1 Prediction errors of analytical solutions along track considered the coupled terms or not in about one Mars day

从算例 2 可以看出, 其它田谐项的联合摄动对沿迹方向的影响可以达到  $3 \times 10^{-4}$  (即表 3 中的  $0.016^\circ$ ), 见方法 E 的结果. 而考虑了完整联合摄动的分析解同算例 1, 精度优于  $10^{-4}$ , 见表 3 方法 B 的结果.

表 3 完整考虑联合摄动和不考虑高阶联合摄动的分析解轨道外推一个火星日的误差状况

Table 3 Prediction errors of analytical solutions considered the coupled terms of high-order tesseral harmonics or not at about one Mars day

Prediction time	Method	$a$ (km)	$e(10^{-2})$	$i(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$(\Omega + \omega + M)(^{\circ})$
$\Delta t$	E	3794.160	0.915	79.988	88.184	48.910
	B	3794.168	0.915	79.988	88.184	48.893
	C	3794.168	0.915	79.989	88.183	48.894
$\Delta t + \frac{1}{4}T$	E	3790.415	0.802	79.994	88.171	138.997
	B	3790.431	0.802	79.994	88.171	138.980
	C	3790.431	0.803	79.994	88.171	138.980

## 5 结束语

由以上分析和对比可知, 由于火星引力场模型的特殊性, 环火卫星摄动分析解不能完全照搬人造地球卫星的分析解. 火星非球形引力位的联合摄动项对环火卫星轨道半长径的影响非常重要, 在构造环火卫星轨道分析解及相关应用中, 不可忽视. 同时需要注意的是, 在高精度要求下, 仅考虑  $J_{2,2}$  相关的联合摄动项是不够的, 在实际应用中还需要根据精度要求考虑其它田谐项的联合摄动.

## 参 考 文 献

- [1] 刘林, 赵玉晖, 张巍, 等. 天文学报, 2010, 51: 412
- [2] Liu L, Zhao Y H, Zhang W, et al. ChA&A, 2011, 35: 188
- [3] Archinal B A, A'Hearn M F, Bowell E, et al. CeMDA, 2011, 109: 101
- [4] 刘林. 天文学报, 1974, 15: 230
- [5] Liu L. ChA&A, 1977, 1: 31
- [6] 刘林. 天文学报, 1975, 16: 65
- [7] Liu L. ChA&A, 1977, 1: 63
- [8] 刘林. 航天器轨道理论. 北京: 国防工业出版社, 2000: 75-188
- [9] 刘林, 胡松杰, 王歆. 航天动力学引论. 南京: 南京大学出版社, 2006: 75-145
- [10] Fehlberg E. Classical Fifth-, Sixth-, Seventh- and Eighth-Order Runge-Kutta Formulas with Stepsize Control. Washington, DC: National Aeronautics and Space Administration, 1968

## Analytical Solutions of Coupled Perturbation of Tesseral Harmonic Terms of Mars Orbiters under Nonspherical Gravitational Potential

ZHOU Chui-hong<sup>1,2</sup>    YU Sheng-xian<sup>1,2</sup>    LIU Lin<sup>1,2,3</sup>

(1 School of Astronomy and Space Science, Nanjing University, Nanjing 210093)

(2 Institute of Space Environment and Astrodynamics, Nanjing University, Nanjing 210093)

(3 State Key Laboratory of Astronautic Dynamics, Xi'an 710043)

**ABSTRACT** The nonspherical gravitational potential of the Mars is significantly different from that of the Earth. The absolute value of the Mars's most tesseral harmonic coefficients are nearly ten times larger than the corresponding terms of the latter. Especially, the absolute value of the Mars's second degree and order tesseral harmonic coefficient  $J_{2,2}$  is nearly 40 times as large as that of the Earth, and approaches one-tenth of its second zonal harmonic coefficient  $J_2$ . Because of these differences, the coupled terms of  $J_2$  and the tesseral harmonics, and even those of the tesseral harmonics themselves all neglected for Earth satellites should be considered in the analytical perturbation solutions, which are used to predict the Mars's low-orbit orbiters and the prediction errors must be limited within 500 meters in a time span of one Mars day. In this paper, the analytical solutions of the coupled terms are presented. With the numerical method, it is proved that the coupled terms are effective to influence the analytical solutions up to more than 500 meters along track, which is emphasized by the analysis. The conclusion is that the solutions of Earth satellites cannot be simply used without modification when dealing with the analytical solutions of Mars' orbiters, and the coupled terms discussed in this paper should be considered.

**Key words** celestial mechanics, perturbation theory, methods: analytical, methods: numerical