

无需初值猜测的间接法小推力轨道设计*

林厚源^{1,2,3†} 赵长印^{1,2}

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210008)

(2 中国科学院空间目标与碎片观测重点实验室 南京 210008)

(3 中国科学院研究生院 北京 100049)

摘要 在间接法求解小推力轨道计算中, 通过先选取合适的性能指标, 并对小推力最优控制问题转化为两点边值问题的方程在开普勒轨道附近线性展开, 有效增强了协态变量初值收敛性, 使得该方法无需对协态变量初值进行反复的随机猜测, 迭代过程也不需要人工干预, 提高了轨道搜索应用中的计算效率. 之后再对性能指标进行迭代优化, 可获得逼近于 Bang-bang 控制的控制方案.

关键词 天体力学, 航天器, 方法: 数值

中图分类号: P 173; **文献标识码:** A

1 引言

小推力轨道设计方法主要有直接法、间接法和混合法. 直接法原理简单, 通常采用将轨道离散化, 把求最优解的问题转化为求离散的接近最优解的次优解的问题^[1]. 间接法是基于变分原理或 Pontryagin 极值原理, 获得最优控制律, 将问题化为两点或多点边值问题^[2]. 混合法则是将间接法的方程离散化后再优化求解^[3].

在间接法求解时, 对燃料最优控制问题, 最优控制力在最大和最小间切换, 使得方程右端项不连续, 传统数值积分方法很难保证精度^[4]. 方程对协态变量初值的收敛半径很小, 对初值猜测依赖性很强, 因此计算时需对无实际物理意义的协状态变量的初值进行反复猜测, 需要耗费大量的计算, 很大程度上限制了间接法的应用. Bertrand 等^[5]和 Haberkorn 等^[6]通过引入同伦方法, 改变性能指标使得两点边值问题求解的收敛性增强, 但仍需要对初值进行随机猜测. 任远等^[7]引入标称轨道的概念, 设计出一种可近似预估小推力轨道的方法. 标称轨道的核心思想即轨道方程线性化, 但文中方法得到的预估轨道和真实小推力轨道存在一定偏差, 且多圈转移中线性展开的收敛性问题没有得到很好的解决.

本文基于同伦思想和方程线性化, 力求提高间接法求解小推力转移问题的计算效率和轨道搜索效率. 应用本文方法在第 3 届全国深空轨道设计竞赛中获得亚军, 验证了该方法的适用性. 本文第 2 节为间接法的基本方程; 第 3 节在 Bertrand 的方法基础上选取

2011-09-09 收到原稿, 2011-10-24 收到修改稿

* 国家自然科学基金项目 (11033009) 资助

† linhouyuan@pmo.ac.cn

合适的性能指标, 并对间接法的方程作线性化处理, 得到收敛性增强的单圈设计方法; 第 4 节介绍了该方法在多圈转移轨道设计中的处理.

2 最优控制原理的基本方程

小推力轨道设计的间接法应用了最优控制的极小值原理, 将其转化为两点边值问题求解^[2]. 对于末端时间固定、推力大小和方向可变的小推力最优控制问题初步求解时, 可选取更有利于收敛的能量最优的性能指标 (1) 式, 之后再采用燃料最优与能量最优的混合型性能指标进行迭代优化 (见 3.3 节).

$$J = \int_{t_0}^{t_f} T^2 dt, \quad (1)$$

其中 t_0 、 t_f 分别为初、末时刻.

小推力控制问题的运动方程:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{T}{m} \mathbf{u}, \quad (3)$$

$$\dot{m} = -\frac{T}{g_0 I_{sp}}, \quad (4)$$

其中 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{v}$ 为小推力轨道坐标和速度, μ 为中心天体引力常数, $\mathbf{u}$ 为推力控制方向, T 为推力大小, m 为飞行器质量, I_{sp} 为小推力比冲, g_0 为地球海平面重力加速度.

引入协态变量 λ , 对于能量最优性能指标, 哈密顿量为

$$H = T^2 + \lambda_r^T \mathbf{v} + \lambda_v^T \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{T}{m} \mathbf{u} \right) - \lambda_m \frac{T}{g_0 I_{sp}}, \quad (5)$$

易得最优控制方向为

$$\mathbf{u} = -\frac{\lambda_v}{|\lambda_v|}. \quad (6)$$

协态方程:

$$\dot{\lambda}_r = \frac{\mu}{r^3} \lambda_v - \frac{3\mu (\lambda_v^T \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r}, \quad (7)$$

$$\dot{\lambda}_v = -\lambda_r, \quad (8)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} (\lambda_v^T \cdot \mathbf{u}) = -\frac{T}{m^2} |\lambda_v|, \quad (9)$$

由极小值原理易得极值条件为

$$2T - \frac{|\lambda_v|}{m} - \frac{\lambda_m}{g_0 I_{sp}} = 0. \quad (10)$$

定义开关函数:

$$s = \frac{|\lambda_v|}{m} + \frac{\lambda_m}{g_0 I_{sp}}, \quad (11)$$

小推力发动机最大推力为 $T_{\max}$, 可得小推力开关机策略:

$$\begin{cases} T = 0, & s < 0 \\ T = T_{\max}, & s > 2T_{\max} \\ T = s/2, & 0 \leq s \leq 2T_{\max} \end{cases}. \quad (12)$$

方程的边界条件与横截条件:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad m(t_0) = m_0, \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \quad \lambda_m = 0. \quad (13)$$

方程 (2) ~ (4) 和 (7) ~ (9) 组成的 14 维非线性方程组和 (13) 式的 14 个边界条件构成两点边值问题. 求解该方程组, 获得协态变量的初值, 即可由 (6) 式获得所求弧段小推力转移的最优控制方案.

3 单圈小推力轨道设计

3.1 轨道线性化方程

用打靶法求解上述 14 维两点边值问题时, 收敛半径非常小, 7 个协态变量初值都需要反复猜测, 求解难度很大. 可考虑将 14 维方程线性化处理, 增大收敛范围. 通常可求解的小推力转移轨道与由 Lambert 方程求解得到的开普勒轨道较为接近, 因此可以将小推力轨道 $\mathbf{x}$ 在已知的开普勒轨道 $\mathbf{z}$ 附近作线性展开^[7]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{z}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}, \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ -\frac{\mu}{R^3} \mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{3\mu}{R^5} \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \frac{T}{m} \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix}_{6 \times 3}, \quad (17)$$

$\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{U}$ 为开普勒轨道坐标和速度. 取线性化坐标 $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$, 则可得线性化的运动方程:

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}. \quad (18)$$

对协态方程也可作近似处理, 使得迭代时不受状态量的影响, 有利于收敛:

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{\mu}{R^3} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{3\mu}{R^5} \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \\ -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_r \\ \boldsymbol{\lambda}_v \end{pmatrix}. \quad (19)$$

3.2 迭代求解协态变量

由于质量协态变量方程不易线性化处理, 为了增强收敛性, 在第 1 步线性预估求解时先假定轨道转移过程中质量不变, 即去除质量消耗方程 (4) 和相应的协态变量方程 (9). 这样处理也可加快轨道搜索中的可解性判断. 则哈密顿函数化为

$$H = T^2 + \lambda_r^T v + \lambda_v^T \left(-\frac{\mu}{r^3} r + \frac{T}{m} u \right), \quad (20)$$

开关机策略化为

$$\begin{cases} T = T_{\max}, & \frac{|\lambda_v|}{m} \geq 2T_{\max} \\ T = \frac{|\lambda_v|}{2m}, & \frac{|\lambda_v|}{m} < 2T_{\max} \end{cases}, \quad (21)$$

边界条件

$$\kappa(t_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ v_0 - U_0 \end{pmatrix}, \quad \kappa(t_f) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ v_f - U_f \end{pmatrix}, \quad (22)$$

其中 v_0 、 v_f 为目标轨道初、末速度, U_0 、 U_f 为 Lambert 方程求解得到的开普勒轨道初、末速度.

利用打靶法求解 (18) ~ (19) 式组成的 12 维方程组, 协态变量 λ_r 、 λ_v 初值可任意选取, 通常取为 1 即可. 实际计算结果显示, 通过线性化处理后, 对于非零的任意协态变量初值, 只需 3 ~ 5 次迭代, λ_r 、 λ_v 就可以收敛到 10^{-6} 精度. 而对于小推力转移无解的情况, 通常 1 ~ 2 次迭代就会发散.

第 2 步加入质量消耗方程和质量协态变量方程, 则哈密顿函数为 (5) 式, 开关机策略为 (12) 式. 相应边界条件与横截条件:

$$m(t_0) = m_0, \lambda_m(t_f) = 0. \quad (23)$$

将在质量固定条件下收敛得到的 λ_r 、 λ_v 的初值预估值代入, 得到在有质量损耗的转移过程中 λ_r 、 λ_v 的初值的修正值, 和线性化方程下的 λ_m 的收敛初值.

最后, 将所有协态变量初值预估值代入原非线性方程组中, 边界条件与横截条件为 (13) 式不变, 迭代求解协态变量初值的校正值. 经过线性化处理后获得的初值基本可保证在非线性方程计算中的收敛性.

3.3 性能指标的优化

初步求解时选取的性能指标为能量最优, 这与 (24) 式燃料最优的性能指标的结果存在一定差别:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} T dt. \quad (24)$$

文献 [5] 中已证明, 对于混合型性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (T + \epsilon F(T)) dt, \quad (25)$$

有

$$J_{\min}(T, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} J(T, \epsilon) = J(T), \quad (26)$$

即当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时的性能指标为所有混合型性能指标中最小值, 此时结果逼近于燃料最优. 因此优化修正可采用混合型的性能指标, 将协态变量的初步结果代入, 逐步减小能量最优性能指标的比例, 使结果最终逼近燃料最优. 在实际计算时, 对于 (25) 式形式的性能指标, 每一次迭代减小 ϵ 后协态变量初值都会发生较大变化. 为保证收敛, 迭代时 ϵ 的变化步长很小, 迭代次数过多. 若将性能指标换为 (27) 式, 以迭代过程中 p 值的增加替代 ϵ 的减小. 此时 p 在同比例变化下, 协态变量初值改变较小, 可减少迭代次数, 提高计算效率.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (pT + T^2) dt. \quad (27)$$

对于 (27) 式的性能指标, 哈密顿量改写为

$$H = pT + T^2 + \lambda_r^T v + \lambda_v^T \left(-\frac{\mu}{r^3} r + \frac{T}{m} u \right) - \lambda_m \frac{T}{g_0 I_{sp}}, \quad (28)$$

定义开关函数:

$$s = \frac{|\lambda_v|}{m} + \frac{\lambda_m}{g_0 I_{sp}} - p, \quad (29)$$

开关机策略形式仍为 (12) 式. $p = 0$ 时即为能量最优性能指标. 以 $p = 0$ 的结果开始迭代, 最终可得到优化后小推力轨道.

图 1 与图 2 为性能指标优化的计算实例. 图 1 为随 p 值增加总燃料消耗 Δm 变化情况. 图中可见, 所采用的性能指标的优化在 p 增加到 10^3 时对于该弧段可节省约 25% 的燃料, p 继续增加对节省燃料的效果不明显, 考虑对计算速度影响可终止迭代. 图 2 为 3 种不同 p 值下推力方案的开关机策略, 横坐标为运动时间, 纵坐标为推力大小. 图中点线为 $p = 0$ 即未优化结果, 虚线为 $p \approx 100$ 的结果, 实线为 $p \approx 1000$ 的结果. 对于优化前, 推力变化较平滑, 且没有最大推力 (0.3 N) 和零推力段. 随着迭代优化, 推力出现最大和零推力. 当 p 逐渐增加, 满推力段与零推力段增多, 而两种模式间过渡段减少, 推力变化变陡. 可以预见当 $p \rightarrow \infty$, 推力仅在零与最大推力间切换, 即 Bang-bang 控制.

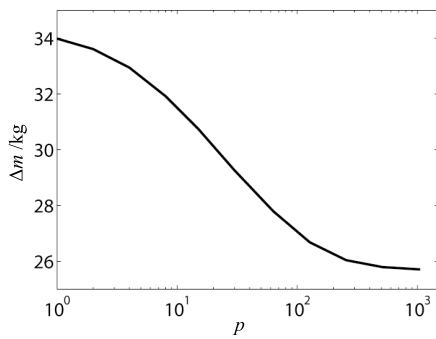


图 1 燃料消耗随 p 值变化关系

Fig.1 Fuel consumption versus p

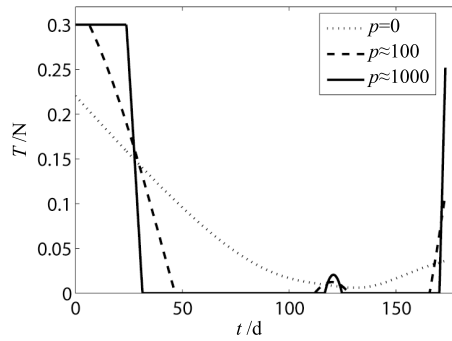


图 2 不同优化 p 值得到的机动策略

Fig.2 Maneuvering strategy of different p values

4 多圈转移处理

4.1 分段 Lambert 转移轨道节点选取

对于多圈转移, 由于小推力轨道半长径的不断变化, 若把小推力轨道在多圈 Lambert 转移的轨道 (一个固定的椭圆) 附近线性展开, 会造成沿迹方向误差增大, 这种误差的累积使得线性化方程结果与实际轨道相差甚远, 导致计算结果代入非线性方程时不收敛, 达不到线性化的目的. 因此只有采用分段拼接的开普勒轨道作为线性展开的原点, 减少线性化时的误差. 需要注意的是, 所选取的分段节点并非实际小推力轨道经过的点, 而是作为线性近似的一个参考原点. 由于实际小推力轨道在开普勒轨道附近线性展开时误差累积的主导因素是沿迹差, 因此只要保证所选取节点能让线性近似的沿迹差足够小, 选取节点时可以做一些近似的处理.

由于小推力在较短弧段内对轨道根数的最大改变量是一定的, 因此对于一段推力较平滑的小推力转移轨道, 可以近似假设为, 对于某个轨道根数的改变 (主要是偏心率和轨道倾角的改变), 在相同转移时间内它的变化量是相对不变的. 对于偏心率不大 ($e < 0.5$) 的情况, 进一步可假设为, 轨道根数在转移角相同的小推力轨道段, 其变化量是相对不变的.

将总转移角分成 N 段单圈转移弧段, 轨道根数选取:

$$\sigma = (a, e, i, \Omega, \varpi, L), \quad (30)$$

其中

$$\varpi = \Omega + \omega, \quad L = \Omega + \omega + f, \quad (31)$$

f 为真近点角, 对于第 i 个节点, 节点处轨道根数取为

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} + \frac{\sigma_N - \sigma_0}{N}, \quad (32)$$

取每段首尾节点的半长径和偏心率的平均值, 由转移角计算该弧段转移所需的理论时间:

$$\Delta t = \int_{\Delta f} \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a}\right)^2 df, \quad (33)$$

式中 n 为平均角速度. 利用每段弧段理论计算的近似转移时间来有效分配实际转移时间, 将节点处轨道根数转化为坐标速度, 即可用 Lambert 定理求解每段开普勒轨道.

节点数量 $N-1$ 的选取也关系到线性化结果的准确度. 节点数越多, 每段转移角越小, 可减小径向差, 但由于实际推力的不均匀性会增加沿迹差的累积; 节点数太少, 又会使得径向差增大, 轨道半长径出现较大偏差, 进而也会产生较大的沿迹差, 不利于计算. 根据实际算例的试验, 确定每段转移角在 $200^\circ \sim 250^\circ$ 左右最为合适. 特殊情况的转移角大小需根据节点的选取方式确定.

4.2 迭代修正与计算

对于大多数情况下, 轨道根数的变化并不是均匀的, 使得 4.1 节拼接所用的每段转移轨道与小推力轨道都存在偏差. 因此需要对上节选取的节点进行修正. 可在线性化方程得到的小推力轨道上, 用与节点同一时刻的轨道根数替换为新的分段节点的根数, 然后重复迭代计算. 通常迭代 2~3 次即可使得两种轨道在节点处坐标误差小于 1%.

图 3 为多圈转移的算例. 该段从金星出发, 在金星轨道附近绕两圈意图再飞越金星引力加速. 十字为采用 4.1 节方法获得的拼接节点, 虚线为连接节点的 3 段开普勒轨道, 实线为第 1 次线性方程下计算得到的小推力轨道, 圆点为小推力轨道上与节点相同时间的位置. 从图中可看出第 1 个节点附近存在较大沿迹差, 第 2 个节点附近有较大的径向差. 这些误差的累积会使线性结果与实际结果相差过大.

采用本节中的修正方法, 修正后结果如图 4. 修正后两处节点处的误差仅约 0.001 AU, 即 10^{-3} 量级. 图中可看出节点处沿迹差大大减小, 第 2 段和第 3 段的径向差也大幅减少.

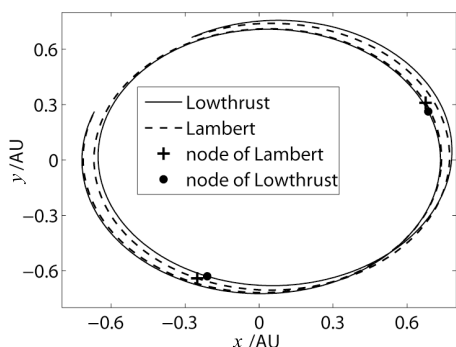


图 3 分段节点与小推力轨道

Fig. 3 The initial nodes and low-thrust orbits

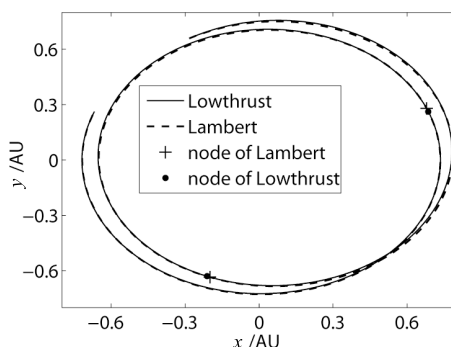


图 4 修正后节点与小推力轨道

Fig. 4 The adjusted nodes and low-thrust orbits

对于总转移弧段很长的多圈转移, 协态变量初值的收敛范围非常小. 若直接将线性方程得到的协态变量初值代入仍不易收敛. 但可以将修正后的节点作为分段点, 将每段弧段用第 3 节的单圈转移来求解, 各段协态变量初值可任意选取. 节点处的坐标速度是由线性化方程下根据极小值原理导出的推力方案得到的, 因此能够保证经过该节点的轨道的平滑性和可解性, 同时它也是逼近最优解的控制方案.

5 结论

本文通过选取合适的性能指标, 将非线性方程在开普勒轨道附近线性展开, 得到收敛性大幅增强的线性方程, 使得无需再对协态变量初值进行反复猜测, 有效提高了计算效率. 且线性化方程对于对应弧段的小推力方案可解性的判断也比原方程快得多, 通常可解轨道只需 3~5 次迭代就可收敛到 10^{-6} 精度, 而无解情况 1~2 次迭代就会发散, 适用于大批量的轨道搜索任务. 之后将性能指标由能量最优通过迭代逐步转化为燃料最

优, 可获得逼近于 Bang-bang 控制的控制方案.

对于多圈转移轨道, 由于不能使用多圈 Lambert 方法求解的转移轨道作为展开原点, 因此将其在多段拼接的开普勒轨道附近作线性展开, 拼接节点先取可能的轨道附近的近似值, 再对节点进行修正. 最后以单圈算法分段计算完成整段转移轨道, 获得逼近最优解的控制方案.

参 考 文 献

- [1] Betts J T. JCoAM, 2000, 120: 27
- [2] 胡寿松. 自动控制原理. 第 4 版. 北京: 科学出版社, 2001: 516-559
- [3] Gao Y, Kluever C A. Low-thrust Interplanetary Orbit Transfers Using Hybrid Trajectory Optimization Method with Multiple Shooting. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Providence, August 16-19, 2004
- [4] 李俊峰, 蒋方华. 力学与实践, 2011, 33: 1
- [5] Bertrand R, Epenoy R. OCAM, 2002, 23: 171
- [6] Haberkorn T, Gergaud J, Martinon P. JGCD, 2004, 27: 1046
- [7] 任远, 崔平远, 栾恩杰. 吉林大学学报: 工学版, 2006, 36: 998

Low-thrust Trajectory Optimization Using Indirect Shooting Method without Initial Costate Guess

LIN Hou-yuan^{1,2,3} ZHAO Chang-yin^{1,2}

(1 Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008)

(2 Key Laboratory of Space Object & Debris Observation, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008)

(3 Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

ABSTRACT Based on the optimal control theory, the optimal control problem of the low-thrust trajectory is transformed into a sequence of nonlinear two-point bound-value problem (TPBVP). In the process of solving the TPBVP, the initial constates need repeated random guesses and iterative computations. In order to enhance the convergence of the iteration, we select an appropriate performance index, and then linearize the equations of the TPBVP around the Keplerian orbits. For multi-revolution transfers, we use the multi-splicing Keplerian arcs instead of the multi-revolution Lambert trajectory to ensure the effectiveness of the linearization. The method is totally automatic with multiple iterations. With this method, we can get the results within 3 ~ 5 iterations, and the random guess of the initial constates is unnecessary. Then by iterative optimization of the performance index, we can get a better control strategy.

Key words celestial mechanics, space vehicles, methods: numerical