

OJ287 双黑洞轨道计算: 3.5 阶后牛顿近似*

武曙光 张杨[†] 付正文

(中国科学技术大学天文学系星系宇宙学联合重点实验室 合肥 230026)

摘要 大质量双黑洞 OJ287 是一个强引力辐射源。为了探测其引力波信号，需要知道波形，而这主要是由轨道运动所决定。为此，从广义相对论 3.5 阶后牛顿近似的运动方程出发对 OJ287 的轨道进行仔细研究，取大黑洞位置固定作为近似，给出了后牛顿近似下 3.5 阶的次黑洞轨道解，比他人 2.5 阶的工作高了一阶。次黑洞撞击吸积盘面到光学爆发存在时间延迟，这对于确定轨道参数有很大影响。利用径向距离与爆发时间关系的线性模型，对最近 7 次爆发时刻的观测值拟合，给出了更精确的 OJ287 双黑洞的轨道参数及其运动轨道。分析了计算结果，研究运动特征，并且发现了两个新性质：次黑洞进动在初期增加，在晚期接近并和时，进动达到最大值，然后减小并越过 0 而趋于负值。尚不能确定晚期的这个行为是否由 3.5 阶近似不够准确所造成。运动方程中耗散性的辐射项，后牛顿 2.5 阶和 3.5 阶的系数具有相反的符号。这意味着 3.5 阶项反而是从外界吸收能量。但 2.5 阶与 3.5 阶之和仍然是向外辐射引力波的，体系能量变化率为负。这个工作的计算结果可以用来更精确地计算 OJ287 的引力辐射。

关键词 类星体: 个别: OJ287, 星系: 运动学和动力学, 引力: 后牛顿近似, 引力波

中图分类号: P 135; **文献标识码:** A

1 引言

目前国际上的引力波探测器，如正在运转的 LIGO (<http://www.ligo.caltech.edu/>, <http://www.ligo.caltech.edu/advLIGO>)、VIRGO^[1] 以及计划建设的 LCGT^[2]、LISA (<http://lisa.nasa.gov/>, <http://www.srl.caltech.edu/~shane/sensitivity/MakeCurve.html>)、Parkes Array^[3] 等，科学目标是探测引力波辐射和宇宙残余引力波，其中主要是探测引力波辐射。宇宙中有很多过程都可以产生引力辐射，其中，双星系统是一类很重要的源。宇宙中大部分恒星都是以双星、聚星等形式存在的。若它们质量足够大，距离我们足够近，就有可能探测到其辐射出的引力波。当双星近距互绕，进而发生合并时，会辐射出强烈的引力波。引力波存在的第一个间接证据就是通过对脉冲双星的观测得出的^[4–6]。

2011-09-26 收到原稿

* 国家自然科学基金项目 (11073018) 和教育部博士点基金项目 (20103402110026) 资助

[†] yzh@ustc.edu.cn

为了更好地探测这类源辐射出的引力波，需要较精确地给出这类双星的运动轨道，进而给出引力波波形，作为探测分析的模板。这类近距双星的引力辐射较强，轨道进动等相对论效应非常明显，须要用广义相对论的后牛顿近似 (PN) 方法。目前对于二体轨道问题，理论公式推导已经推进到 3.5PN 阶^[7-15]。

本文研究红移 $z = 0.306$ 的 BL 型天体 OJ287，对它的累积观测已长达一个多世纪。该天体有着准周期的光变，这被认为是中心区域存在两个相互绕转的超大质量黑洞的证据，质量分别为 $m_1 = 1.84 \times 10^{10} M_{\odot}$, $m_2 = 1.46 \times 10^8 M_{\odot}$, 周期约 12 yr, 是一个强引力辐射源。目前通过准周期的爆发时刻、光谱等现象，已初步知道其轨道参数等^[16-32]。为了得到其引力辐射，首先要对其轨道运动进行细致计算和研究。文献 [16-17] 做了 2PN 轨道计算，但未考虑 2.5PN 引力辐射对于轨道的反作用，而对轨道计算的自洽性来说，引力辐射的影响很重要，必须考虑 2.5PN 耗散项。包括了 2.5PN 的轨道计算由文献 [18-20] 给出，其中文献 [20] 计算到了 3PN。而我们将进一步把轨道计算推进到 3.5PN，即包括了 3PN 项和 3.5PN 耗散项对于轨道的贡献。

目前对 OJ287 光变已有解释。从几何位形来看，假设次黑洞围绕主黑洞运动的轨道平面和主黑洞的吸积盘面相互垂直，每当次黑洞经过吸积盘面时就会产生一次光学爆发。但是，光学爆发并不是在次黑洞打到吸积盘面时就立刻产生的，而是有一定的时间延迟。只有当被次黑洞带出的吸积盘物质由光学厚变为光学薄时，爆发才能辐射出来并被观测到^[22]。从次黑洞撞击到吸积盘面到爆发辐射出来这一过程的时间差就是时间延迟。必须确定这个延迟，才能更准确地定出轨道等参数。爆发延迟是一个较为复杂的辐射过程，涉及到吸积盘模型等，文献 [23, 27] 做了研究。我们将采用其径向距离与时间延迟为线性关系的经验模型，来拟合观测到的爆发时刻，以定出轨道参数。

下面第 2 节将给出 3.5PN 的运动方程和物理量的记号。第 3 节分析时间延迟效应和线性模型，第 4 节由此确定轨道参数，这是本工作关于 OJ287 轨道的主要结果。在此基础上，第 5 节比较 3.5 阶和 2.5 阶近似对于轨道运动的贡献及其辐射特性的差别，这是本工作的主要新发现。

2 3.5PN 的运动方程

我们所要处理的是 OJ287 双黑洞的运动问题。对于这样的二体运动问题，在不考虑黑洞自转时，目前理论计算公式所给出轨道运动方程，已经达到 3.5PN^[8-15]。由于次黑洞的质量约为主黑洞质量的 1/126，作为近似，可以认为次黑洞围绕位置固定的主黑洞运动。这个二体问题的 3.5PN 运动方程为^[12,15]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{Gm}{r^2} [(1 + A_{1\text{PN}} + A_{2\text{PN}} + A_{2.5\text{PN}} + A_{3\text{PN}} + A_{3.5\text{PN}}) \mathbf{e}_r + (B_{1\text{PN}} + B_{2\text{PN}} + B_{2.5\text{PN}} + B_{3\text{PN}} + B_{3.5\text{PN}}) \mathbf{v}], \quad (1)$$

其中 \mathbf{x} 是从主黑洞到次黑洞的位置矢量， $r \equiv |\mathbf{x}|$ 是两个黑洞之间的距离， $\mathbf{e}_r = \mathbf{x}/r$ 为单位矢量， $\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ 是它们的相对速度， $m = m_1 + m_2$ 是两个黑洞的总质量。两组系数

$A_{i\text{PN}}$ 和 $B_{i\text{PN}}$ 是后牛顿近似贡献的项, 它们具体的表达式为

$$A_{1\text{PN}} = \frac{1}{c^2} \left[-\frac{3\dot{r}^2\nu}{2} + v^2 + 3\nu v^2 - \frac{Gm}{r}(4+2\nu) \right], \quad (2)$$

其中 $\nu \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)^2 \approx 0.0078$ 是约化质量与总质量的商, $v = |\mathbf{v}|$, $\dot{r} \equiv \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} A_{2\text{PN}} = & \frac{1}{c^4} \left[\frac{15\dot{r}^4\nu}{8} - \frac{45\dot{r}^4\nu^2}{8} - \frac{9\dot{r}^2\nu v^2}{2} + 6\dot{r}^2\nu^2 v^2 + 3\nu v^4 - 4\nu^2 v^4 + \right. \\ & \left. \frac{Gm}{r} \left(-2\dot{r}^2 - 25\dot{r}^2\nu - 2\dot{r}^2\nu^2 - \frac{13\nu v^2}{2} + 2\nu^2 v^2 \right) + \frac{G^2 m^2}{r^2} \left(9 + \frac{87\nu}{4} \right) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

$$A_{2.5\text{PN}} = \frac{1}{c^5} \left(-\frac{24\dot{r}\nu v^2}{5} \frac{Gm}{r} - \frac{136\dot{r}\nu}{15} \frac{G^2 m^2}{r^2} \right), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} A_{3\text{PN}} = & \frac{1}{c^6} \left[-\frac{35\dot{r}^6\nu}{16} + \frac{175\dot{r}^6\nu^2}{16} - \frac{175\dot{r}^6\nu^3}{16} + \frac{15\dot{r}^4\nu v^2}{2} - \frac{135\dot{r}^4\nu^2 v^2}{4} + \right. \\ & \frac{255\dot{r}^4\nu^3 v^2}{2} - \frac{15\dot{r}^2\nu v^4}{2} + \frac{237\dot{r}^2\nu^2 v^4}{8} - \frac{45\dot{r}^2\nu^3 v^4}{2} + \frac{11\nu v^6}{4} - \\ & \frac{49\nu^2 v^6}{4} + 13\nu^3 v^6 + \frac{Gm}{r} \left(79\dot{r}^4\nu - \frac{69\dot{r}^4\nu^2}{2} - 30\dot{r}^4\nu^3 - 121\dot{r}^2\nu v^2 + \right. \\ & 16\dot{r}^2\nu^2 v^2 + 20\dot{r}^2\nu^3 v^2 + \frac{75\nu v^4}{4} + 8\nu^2 v^4 - 10\nu^3 v^4 \left. \right) + \frac{G^2 m^2}{r^2} \left(\dot{r}^2 + \right. \\ & \frac{22717\dot{r}^2\nu}{8} + \frac{11\dot{r}^2\nu^2}{7\dot{r}^2\nu^3} - 7\dot{r}^2\nu^3 + \frac{615\dot{r}^2\nu\pi^2}{64} - \frac{20827\nu v^2}{840} + \nu^3 v^2 - \\ & \left. \frac{123\nu\pi^2 v^2}{64} \right) + \frac{G^3 m^3}{r^3} \left(-16 - \frac{1399\nu}{12} - \frac{71\nu^2}{2} + \frac{41\nu\pi^2}{16} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} A_{3.5\text{PN}} = & \frac{1}{c^7} \left[\frac{Gm}{r} \left(\frac{366\dot{r}\nu v^4}{35} + 12\dot{r}\nu^2 v^4 - 114\nu^2 v\nu r^3 - 12\nu^2 v^2 \dot{r}^3 + 112\nu \dot{r}^5 \right) + \right. \\ & \frac{G^2 m^2}{r^2} \left(\frac{692\dot{r}\nu v^2}{35} - \frac{724\dot{r}v^2\nu^2}{15} + \frac{294\nu \dot{r}^3}{5} + \frac{376\nu^2 \dot{r}^3}{5} \right) + \\ & \left. \frac{G^3 m^3}{r^3} \left(\frac{3956\dot{r}\nu}{35} + \frac{184\dot{r}\nu^2}{5} \right) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

其中 3.5 阶项 $A_{3.5\text{PN}}$ 含有一个因子 \dot{r} , 文献 [12, 15] 漏写, 此处已改正过来.

$$B_{1\text{PN}} = \frac{1}{c^2} \left(-4\dot{r} + 2\dot{r}\nu \right), \quad (7)$$

$$B_{2\text{PN}} = \frac{1}{c^4} \left[\frac{9\dot{r}^3\nu}{2} + 3\dot{r}^3\nu^2 - \frac{15\dot{r}\nu v^2}{2} - 2\dot{r}\nu^2 v^2 + \frac{Gm}{r} \left(2\dot{r} + \frac{41\dot{r}\nu}{2} + 4\dot{r}\nu^2 \right) \right], \quad (8)$$

$$B_{2.5\text{PN}} = \frac{1}{c^5} \left(\frac{8\nu v^2}{5} \frac{Gm}{r} + \frac{24\nu}{5} \frac{G^2 m^2}{r^2} \right), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} B_{3\text{PN}} = & \frac{1}{c^6} \left[-\frac{45\dot{r}^5\nu}{8} + 15\dot{r}^5\nu^2 + \frac{15\dot{r}^5\nu^3}{4} + 12\dot{r}^3\nu v^2 - \frac{111\dot{r}^3\nu^2 v^2}{4} - \right. \\ & 12\dot{r}^3\nu^3 v^2 - \frac{65\dot{r}\nu v^4}{8} + 19\dot{r}\nu^2 v^4 + 6\dot{r}\nu^3 v^4 + \\ & \frac{Gm}{r} \left(\frac{329\dot{r}^3\nu}{6} + \frac{59\dot{r}^3\nu^2}{2} + 18\dot{r}^3\nu^3 - 15\dot{r}\nu v^2 - 27\dot{r}\nu^2 v^2 - 10\dot{r}\nu^3 v^2 \right) + \\ & \left. \frac{G^2 m^2}{r^2} \left(-4\dot{r} - \frac{5849\dot{r}\nu}{840} + 25\dot{r}\nu^2 + 8\dot{r}\nu^3 - \frac{123\dot{r}\nu\pi^2}{32} \right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$B_{3.5\text{PN}} = \frac{1}{c^7} \left[\frac{Gm}{r} \left(-\frac{626\nu v^4}{35} - \frac{12\nu^2 v^4}{5} + \frac{678\nu v^2 \dot{r}^2}{5} + \frac{12\nu^2 v^2 \dot{r}^2}{5} - 120\nu \dot{r}^4 \right) + \right. \\ \left. \frac{G^2 m^2}{r^2} \left(\frac{164\nu v^2}{21} + \frac{148\nu^2 v^2}{5} - \frac{82\nu \dot{r}^2}{3} - \frac{848\nu^2 \dot{r}^2}{15} \right) + \right. \\ \left. \frac{G^3 m^3}{r^3} \left(-\frac{1060\nu}{21} - \frac{104\nu^2}{5} \right) \right]. \quad (11)$$

这些系数 $A_{i\text{PN}}$, $B_{i\text{PN}}$ 每高出半阶, 都会多出因子 v 或者 \dot{r} (取 $c = 1$), 而每高出一阶, 会多出 v^2 , \dot{r}^2 , $v\dot{r}$, 或 Gm/r . 我们也注意到了反映辐射效应的耗散性系数 $A_{2.5\text{PN}}$, $A_{3.5\text{PN}}$, $B_{2.5\text{PN}}$, $B_{3.5\text{PN}}$ 导致轨道衰减, 都至少含有一个因子 ν , 而非耗散性系数 $A_{1\text{PN}}$, $A_{2\text{PN}}$, $A_{3\text{PN}}$, $B_{1\text{PN}}$, $B_{2\text{PN}}$, $B_{3\text{PN}}$ 各自至少有一项不含因子 ν . 所以, 这些耗散性系数的实际值, 比仅基于后牛顿阶次估计的值要小大约和 ν 相当的量级.

以上公式给出了 3.5 阶后牛顿近似下双黑洞 OJ287 主黑洞固定、次黑洞运动轨道的方程. 具体计算时, 我们取极坐标 (r, ϕ) , 把方程(1) 投影到这两个方向上, 其中 $v = \dot{r}e_r + r\dot{\phi}e_\phi$, e_ϕ 为 ϕ 方向的单位矢量, 得到一组联立的两个二阶常微分方程. 给定一组初始条件即次黑洞的轨道运动的初始值: $r_0, \dot{r}_0, \phi_0, \dot{\phi}_0$, 运动方程就有对应的一个解, $r = r(t), \phi = \phi(t)$. 注意次黑洞的轨道参数, 如偏心率等, 实际上是由初始条件完全确定的. 下面我们结合观测到的 OJ287 光学爆发时刻, 并考虑时间延迟效应, 给出其轨道参数.

3 爆发的延迟效应

天体 OJ287 已经有一百多年的观测历史 [22,24,27,29], 每隔大约 12 yr 左右就会有一次爆发. 正是由于这个准周期现象, 以及每次爆发间隔 $1 \sim 2$ yr 的双峰结构, OJ287 被认为是双黑洞 [18–32]. 由于轨道进动效应, 次黑洞各次经过吸积盘之间的时间间隔并不是固定的, 所以观测到的爆发是准周期的 [20,24,31]. 必须考虑广义相对论的轨道进动和引力辐射的效应, 计算出的光学爆发时刻与观测才有更好的吻合 [28–29]. 也曾有非双黑洞模型来描述 OJ287, 但其困难是难以解释爆发时快速增长的光学流量的特征 [26,29].

如前所述, 次黑洞撞击到主黑洞的吸积盘面, 并不是立刻产生光学爆发, 而是存在时间延迟效应. 按照文献 [22] 的分析, 假设主黑洞的吸积盘是一个辐射压主导的光学厚几何薄的吸积盘, 当次黑洞穿过的时候, 它周围的气体运动较复杂. 大致的情形是次黑洞周围的气体会被次黑洞带着一起运动, 它前面的气体会被压缩, 温度提高, 在被拖曳出吸积盘时依然是光学厚的, 其后面的气体将形成湍流. 从次黑洞经过吸积盘的中剖面时刻到这团气体被次黑洞拖曳出吸积盘, 所用的时间为 τ_{dyn} . 之后, 经过一段时间 t_0 的扩散冷却, 次黑洞前部的气体才变为光学薄的, 这时光学辐射才能发出, 而被观测到 [22]. 所以光学爆发的时间延迟 $t_d = \tau_{\text{dyn}} + t_0$.

距离主黑洞越远, 吸积盘的厚度越厚, 所用时间 τ_{dyn} 越大. 另外, 根据分析, t_0 与撞击点处的盘厚度、次黑洞的速度有关. 具体的效应是, 距离主黑洞越远, t_0 越大. 总之, 距离主黑洞越远, 光学爆发的时间延迟 t_d 越大. 文献 [22] 的表 3 中列出了当碰撞点的径向距离 R 取不同值时, τ_{dyn} 和 t_0 对应的具体数值. t_d 作为 R 的函数比较复杂, 但是, R 较小时, t_d 与 R 的函数关系可以近似为线性关系 [27]. 而对于我们处理的 OJ287

的最近几个周期, R 值较小, 可以使用近似线性关系. 参照文献 [23] 表 1 的数据, 以及文献 [27] 的图 3, 我们写出 t_d 和 R 之间的线性函数关系:

$$t_d = 0.210569R - 0.200576, \quad (12)$$

其中 t_d 以 yr 为单位, R 以次黑洞到主黑洞的最近距离 ($\approx 20Gm_1/c^2$) 作为单位.

4 轨道参数确定

现在, 每给定一组初始值: $r_0, \dot{r}_0, \phi_0, \dot{\phi}_0$, 我们求解联立方程组 (1), 得到一个轨道 $r = r(t), \phi = \phi(t)$. 次黑洞撞击吸积盘的条件是 $\phi(t_i) = n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 由此就得到一系列时刻 t_i , 及其对应的碰撞点的径向距离 R_i . 再由 (12) 式给出对应的时间延迟 t_d 的值, 便得到了理论计算出的爆发时刻, 就可以与由观测得到的 OJ287 的 7 次光学爆发时刻进行直接比较了.

为了确定 OJ287 的轨道参数, 我们选用了文献 [19, 24] 给出的最近 7 次爆发的观测时刻, 列在表 1 中.

表 1 观测的爆发时间

Table 1 Observed outburst times

Outburst time	Estimated uncertainty(yr)
1972.945	± 0.012
1982.964	± 0.0006
1984.130	± 0.005
1994.75	—
1995.842	± 0.0015
2005.745	± 0.012
2007.692	± 0.0015

其中第 1 个爆发时刻的观测值 1972.945, 将作为我们理论计算爆发时刻值而固定下来. 注意, 在实际计算中, 对于上列随后的 6 次观测的爆发时刻, 需要折合为双黑洞当地的实际爆发时刻, 例如, 第 1 与第 2 次爆发的时间间隔 $(1982.964 - 1972.945)$ yr 需要除以 $(1 + 0.306)$, 这是由于双黑洞在红移 $z = 0.306$ 处. 理论计算出的爆发时刻与观测对应的时刻有差值: $\delta t_1, \dots, \delta t_6$. 为了在众多轨道中选择出与观测最接近的轨道, 我们采用最小二乘法的方法, 当误差平方和 $S \equiv \sum_{i=1}^6 (\delta t_i)^2$ 最小, 就认为理论爆发时刻和观测爆发时刻之间的差别最小. 按照这样的方法, 我们得到最佳轨道, 其在初始时刻 1971.48 ($t = 0$) 的初始条件为: $r_0 = 20.1193(Gm_1/c^2)$, $\dot{r}_0 = 0$, $\phi_0 = 238.35^\circ$ (即初相位角 Ω), $\dot{\phi}_0 = 0.01277 \text{ arc}/(Gm_1/c^3)$. 这里长度单位 $(Gm_1/c^2) = 181.448 \text{ Au}$, 时间单位 $(Gm_1/c^3) = 1.04725 \text{ d}$. 由此我们给出 OJ287 的次黑洞绕主黑洞的运动轨道. 图 1 展示了初期的 3 个周期的轨道, 可见其广义相对论的进动非常明显, 而图中标出的 7 个点: b, c, d, e, f, g, h, 是在观测到的爆发时刻附近次黑洞经过吸积盘的情形.

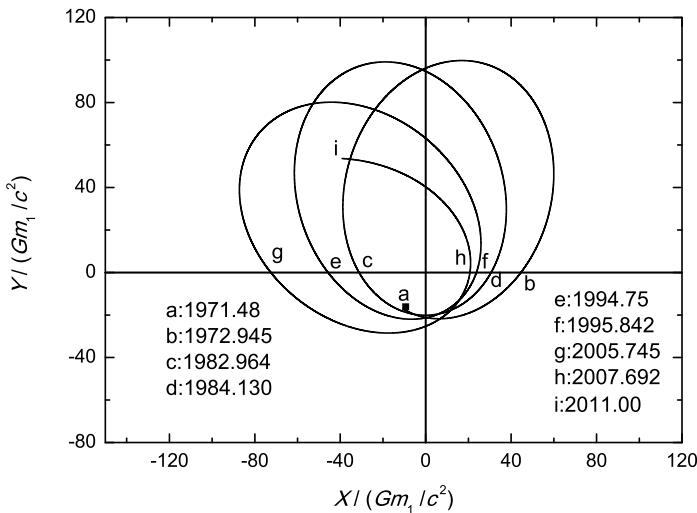


图 1 3.5 阶后牛顿近似下 OJ287 的轨道. 水平线 $Y = 0$ 表示吸积盘.

Fig. 1 The 3.5 post-Newtonian (PN) order orbit of OJ287. The horizontal line $Y = 0$ represents the accretion disk.

我们进而给出 OJ287 的轨道参数, 见表 2.

表 2 OJ287 的轨道参数

Table 2 The orbital parameters of OJ287

Orbital parameter	Value
m_1	$1.84 \times 10^{10} M_\odot$
m_2	$1.46 \times 10^8 M_\odot$
P	11.9248 yr
e	0.6693
a	0.0535 pc
Ω	238.35° at 1971.48
Ψ	32.6359°/period

其中黑洞质量 m_1, m_2 , 我们使用了文献 [20] 给出的值. P 是周期, e 是离心率, a 是半长轴, Ψ 是进动率. 由于进动的存在, 次黑洞的运动轨道不是严格的椭圆, 不封闭. 这里我们仍然采用了公式 $e = (r_{\max} - r_{\min}) / (r_{\max} + r_{\min})$, $a = (r_{\max} + r_{\min}) / 2$. 注意, 这里列出 P 值是我们地球上观测者测量到的周期, 对应于相邻两次径向距离取最小值的时间间隔. 由于该双黑洞在红移 $z = 0.306$ 处, 把计算出的双黑洞当地周期值, 乘以 $(1 + 0.306)$, 就给出表 2 中的 P 值. 进动率 Ψ 定义为相邻两次径向距离取最小值时角度的变化. 根据运动方程的解, 由于有引力辐射, 这些轨道参数都会随时间发生变化. 上面我们给出的参数值都是从 1971 年起 20 个周期的平均值. 需要说明的是, 这些参数值的确定都依赖于上一节所给出的时间延迟值. 由于轨道近似是一个椭圆, 所以次黑洞速度 v 在不同位置有不同的值. 对于最初几个周期, 当两黑洞距离最远时, v 最小, 约

是 $0.059c$. 而当两黑洞距离最近时, v 最大, 约是 $0.257c$. 一个周期中, v 的平均值约为 $0.11c$.

由于双黑洞引力辐射带走能量, 相互距离越来越近, 轨道逐渐变圆, v 的平均值也逐渐变大. 计算表明, P 、 a 和 e 随时间单调减小, Ψ 随时间增加, 在 $t = 16890.5$ yr 时 (3 323 圈), 达到最大值 $\Psi \approx 77^\circ/\text{period}$, $r_{\min} = 9.69Gm_1/c^2$. 随后 Ψ 却随着时间减小, 到 $t = 17007.1$ yr 时, 进动 $\Psi = 0$, $r_{\min} = 6.29Gm_1/c^2$. 之后, Ψ 变为负值, 即次黑洞的进动是反方向的. 作为验证, 我们检查了角速度 $\dot{\phi}(t)$ 的演化行为, 与 Ψ 的行为是一致的, 初期 $\dot{\phi}(t)$ 随着时间增大, 到 $t = 17026.7$ yr 时达到最大值, 随后迅速减小. 所发现的晚期角速度的这个行为很有趣. 但是, 考虑到这是双黑洞即将并和的晚期, 引力场非常强, 应该考虑比 3.5 阶更为可靠的计算, 或者更精确的数值计算.

图 2 画出 $t = 17006.5 \sim 17010.8$ yr 期间的轨道, 引力辐射导致周期变小, 约 0.58 yr. 这时轨道变得很圆了, $r \approx 6.6Gm_1/c^2$, 接近主黑洞的希瓦兹半径 $2Gm_1/c^2$, v 的平均值约为 $0.265c$. 这时, 双黑洞距离很靠近了, 处于合并期.

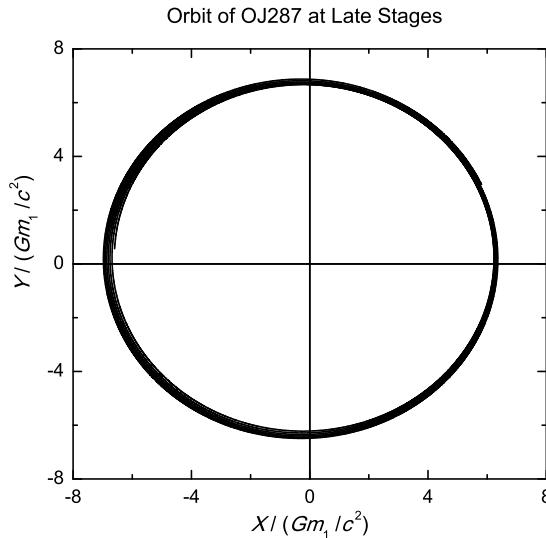


图 2 3.5 阶后牛顿近似下 OJ287 的晚期轨道 ($t = 17006.5 \sim 17010.8$ yr)

Fig. 2 The 3.5PN order orbit of OJ287 at late stages ($t = 17006.5 \sim 17010.8$ yr)

5 2.5PN 和 3.5PN 的结果比较

上面的计算包括了 3PN 和 3.5 阶耗散项的贡献. 现在分析其效应. 首先我们列出对前几个轨道周期各系数的量级大小, $A_{1\text{PN}} \approx 0.13$, $A_{2\text{PN}} \approx 0.023$, $A_{2.5\text{PN}} \approx 10^{-5}$, $A_{3\text{PN}} \approx 10^{-3}$, $A_{3.5\text{PN}} \approx 10^{-6}$; $B_{1\text{PN}} \approx 0.4$, $B_{2\text{PN}} \approx 0.007$, $B_{2.5\text{PN}} \approx 10^{-4}$, $B_{3\text{PN}} \approx 10^{-4}$, $B_{3.5\text{PN}} \approx 10^{-5}$. 正如预期, 各系数依后牛顿阶次而减小. 但是 $A_{2.5\text{PN}}$ 很小, 小于 $A_{3\text{PN}}$;

类似地, $B_{2.5\text{PN}}$ 与 $B_{3\text{PN}}$ 的大小同一量级。这是由于前面已注意到的 $A_{2.5\text{PN}}$ 和 $B_{2.5\text{PN}}$ 都含有因子 $\nu \approx 0.0078$ 所致。

另外, 计算结果表明, $A_{3.5\text{PN}}$ 比 $A_{2.5\text{PN}}$ 小一个量级, $B_{3.5\text{PN}}$ 比 $B_{2.5\text{PN}}$ 小一个量级。可见, 对次黑洞轨道运动的影响来说, 后牛顿 3.5 阶的贡献大约只是 2.5 阶贡献的 $1/10$ 。这是预期的结果。对于轨道来说, 2.5 阶项和 3.5 阶项是真正体现了引力辐射效应的耗散项 [8–11,13–14]。

为了更明显地看出 3.5PN 对于轨道的影响, 我们在表 3 中给出 2.5PN 计算的 OJ287 轨道参数, 和 3.5PN 的结果作比较。这些参数都是从 1971 年之后 20 个周期的平均值。可以看出, 两者的差别很小, 2.5PN 进动率略小一些。

表 3 后牛顿近似的轨道参数

Table 3 The orbital parameters of post-Newtonian approximation

	e	a	Ψ	P
2.5PN	0.6689	0.05345 pc	$32.6299^\circ/\text{period}$	11.9131 yr
3.5PN	0.6693	0.05349 pc	$32.6359^\circ/\text{period}$	11.9248 yr

图 3 显示 2.5PN 和 3.5PN 下分别计算出的轨道。左图显示, 最初几个周期, 3.5PN 轨道与 2.5PN 的轨道差别不大。右图是第 150 个周期附近的情形, 显示出随着时间的推移, 时间累积效应明显, 两者差距会越来越大, 2.5PN 轨道将逐渐落后。

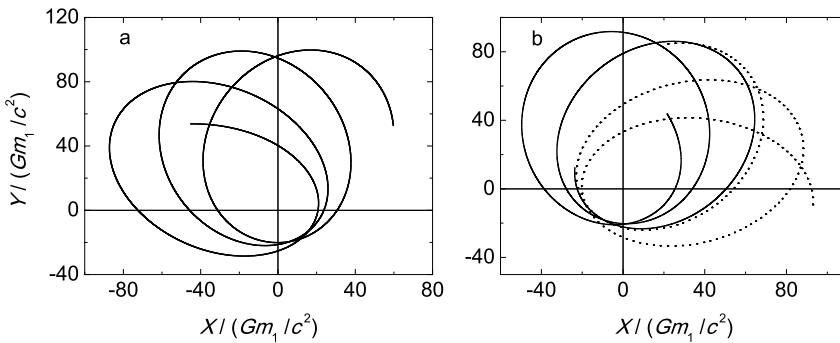


图 3 3.5PN 和 2.5PN 计算出的 OJ287 轨道的对比, 其中实线为 3.5PN, 点线为 2.5PN。吸积盘由 $Y = 0$ 直线表示。

Fig. 3 The orbits of 3.5PN (solid) compared with 2.5PN (dots). The horizontal line $Y = 0$ represents the accretion disk.

值得指出的是, 2 阶项以及更低阶项都不是耗散项, 不对应引力辐射。只是到了 2.5 阶项才是真正的耗散项, 才开始体现引力辐射对于轨道的反作用。我们的计算结果也显示了这个特征。图 4 展示了耗散项的衰减效应。左图是包括到 3.5 阶后牛顿近似的完整计算。双黑洞之间的距离 $r(t)$ 幅值随时间逐渐变小, 这表明引力辐射导致体系能量减少。右图是人为去掉了 2.5 阶项和 3.5 阶项这两个耗散项的计算, 结果 $r(t)$ 幅值不变, 表明

体系能量不变. 这就验证了 2.5 阶项和 3.5 阶项是真正反映引力辐射对轨道反作用的衰减项.

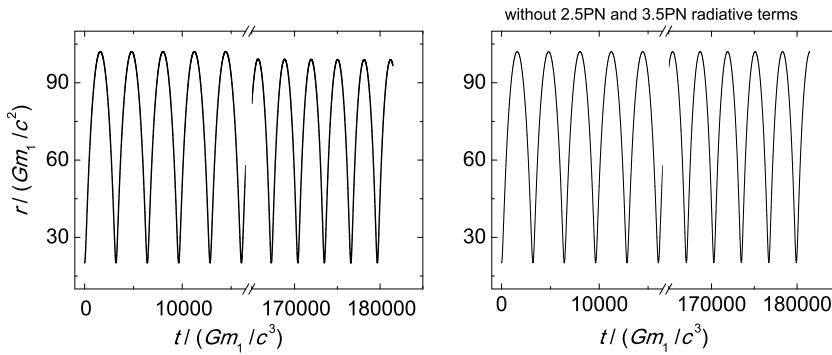


图 4 OJ287 的轨道半径 $r(t)$ 随时间的演化

Fig. 4 The evolution of OJ287's radius $r(t)$

作为本文的一个重要结果, 我们发现 3.5 阶项对轨道加速度的总贡献在 r 和 ϕ 方向上都是与 2.5 阶项符号相反的, 见图 5~6. 即 3.5 阶项自身将导致轨道半径会慢慢增大, 系统能量也会增大. 所以 3.5 阶项所对应的物理效应并不是向外辐射引力波, 而是从外界吸收能量的过程. 通过计算体系能量变化率 dE/dt 也证实了, 2.5 阶项贡献的变化率 $dE/dt < 0$, 体系辐射能量, 3.5 阶项贡献的 $dE/dt > 0$, 吸收能量. 当然, 2.5 阶项和 3.5 阶项共同所给出的仍然是 $dE/dt < 0$, 体系辐射能量. 对于这个 3.5 阶项导致的现象和物理起源等分析, 我们将在以后再详细研究.

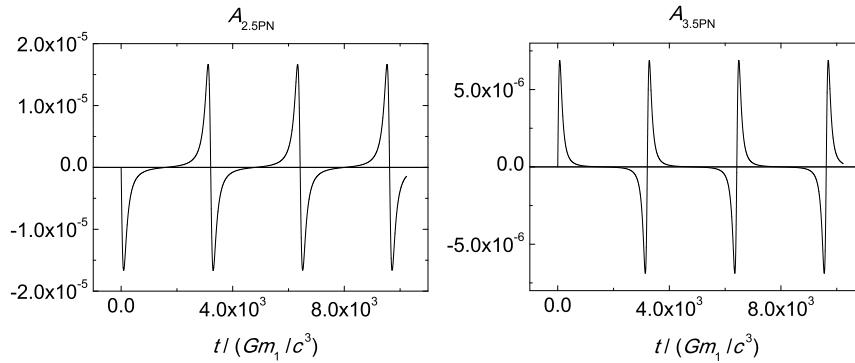
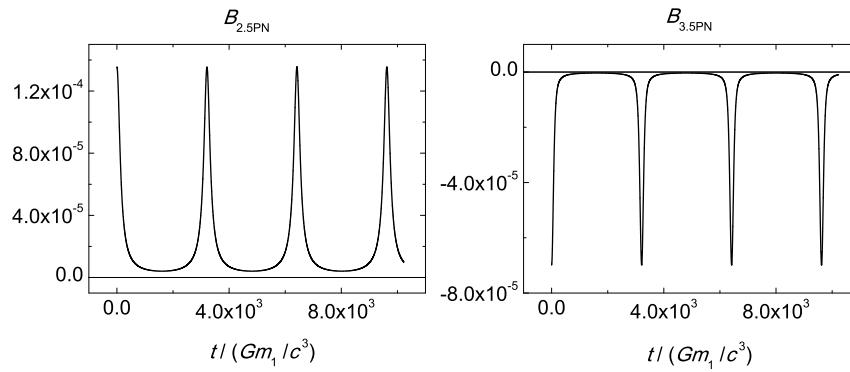


图 5 耗散性系数 $A_{3.5PN}$ 和 $A_{2.5PN}$ 的比较

Fig. 5 The coefficients of dissipative terms, $A_{2.5PN}$ (left), and $A_{3.5PN}$ (right)

图 6 耗散性系数 $B_{3.5\text{PN}}$ 和 $B_{2.5\text{PN}}$ 的比较Fig. 6 The coefficients of dissipative terms, $B_{2.5\text{PN}}$ (left), and $B_{3.5\text{PN}}$ (right)

另外, 轨道参数拟合的计算表明, 3.5PN 理论计算和观测的爆发时间的差别稍好于 2.5PN。具体的数值是, 3.5PN 理论计算的误差平方和 $S \approx 3780.41$, 而 2.5PN 的 $S \approx 3821.06$.

6 讨论

本文在广义相对论框架下研究了 OJ287 双黑洞的轨道运动问题。由于主黑洞质量远大于次黑洞质量, 作为近似, 设次黑洞围绕位置固定的主黑洞运动。对于次黑洞撞击吸积盘面的爆发时间延迟, 我们采用了径向距离与爆发时间的线性模型。通过计算得到了 3.5 阶后牛顿近似下运动方程的解, $r = r(t)$, $\phi = \phi(t)$, 比前人的后牛顿计算工作提高了一阶。根据观测到的 OJ287 最近时期的 7 次光学爆发时刻, 用最小二乘法挑选出了由初始值 r_0 , \dot{r}_0 , ϕ_0 , $\dot{\phi}_0$ 确定的理论计算轨道, 并且画出了轨道, 给出了在目前时期轨道参数的平均值: 周期 P 、离心率 e 、半长轴 a 、进动率 ϖ 。由于引力辐射带走能量, 导致这 4 个量是随时间变化的, 总的演化情况是, 轨道随时间而变小、变圆、进动加快, 经过多圈后达到最大, 随后减小。但这时双黑洞非常接近, 3.5PN 计算可能失效, 应该使用更精确的数值计算。

根据这个结果, 我们分析了不同阶的后牛顿近似计算出的运动轨道的差别, 发现根据最小二乘法来选择最佳轨道时, 3.5PN 的误差平方和小于 2.5PN 的。这两个后牛顿近似下给出的轨道运动在初期的几个周期的差别较小, 但随着时间积累, 差别逐渐明显, 3.5PN 的进动明显超前 2.5PN 的。

需要特别注意的是有耗散性质的 2.5 阶项和 3.5 阶项, 相对于牛顿引力而言, 2.5 阶项的贡献约 10^{-5} , 而 3.5 阶项的贡献约 10^{-6} , 即 3.5 阶项的幅值仅约为 2.5 阶的 $1/10$ 。而更重要的一点是, 这个工作一个主要的发现是 3.5 阶项系数与 2.5 阶项系数的符号相反。这意味着, 3.5 阶项本身并没有向外辐射引力波, 反而是从外界吸收能量。通过估算体系能量变化率, 也证明了这一结果, 即 2.5 阶项的体系能量变化率为负, 3.5 阶项的体系能

量变化率为正. 然而, 2.5 阶项与 3.5 阶项导致的体系能量变化率的总和仍然为负. 对于这个问题我们将进一步研究.

参 考 文 献

- [1] Acernese F, Amico P, Al-Shourbagy M, et al. CQGrav, 2005, 22: S869
- [2] Kuroda K, The LCGT Collaboration. CQGrav, 2006, 23: S215
- [3] Manchester R N. ChJAA, 2006, 6: 139
- [4] Hulse R A, Taylor J H. ApJ, 1975, 195: L51
- [5] Taylor J H, Fowler L A, McCulloch P M. Natur, 1979, 277: 437
- [6] Taylor J H, Weisberg J M. ApJ, 1982, 253: 908
- [7] Wagoner R V, Will C M. ApJ, 1976, 210: 764
- [8] Iyer B R, Will C M. PhRvL, 1993, 70: 113
- [9] Iyer B R, Will C M. PhRvD, 1995, 52: 6882
- [10] Jaranowski P, Schäfer G. PhRvD, 1997, 55: 4712
- [11] Pati M E, Will C M. PhRvD, 2002, 65: 104008-1
- [12] Blanchet L. LRR, 2006, 9: 4
- [13] Königsdörffer C, Faye G, Schäfer G. PhRvD, 2003, 68: 044004-1
- [14] Nissanke S, Blanchet L. CQGrav, 2005, 22: 1007
- [15] Blanchet L. CRPhy, 2007, 8: 57
- [16] 孙玉涛, 刘杰英, 刘进忠, 等. 天文学报, 2010, 51: 348
- [17] Sun Y T, Liu J Y, Liu J Z, et al. ChA&A, 2011, 35: 123
- [18] Valtonen M J, Mikkola S, Merritt D, et al. IAU, 2009, 261: 1302
- [19] Valtonen M J, Mikkola S, Merritt D, et al. ApJ, 2010, 709: 725
- [20] Valtonen M J, Mikkola S, Lehto H J, et al. CeMDA, 2010, 106: 235
- [21] Sillanpää A, Haarala S, Valtonen M J, et al. ApJ, 1988, 325: 628
- [22] Lehto H J, Valtonen M J. ApJ, 1996, 460: 207
- [23] Sundelius B, Wahde M, Lehto H J, et al. ASP Conference Series, 1996, 110: 99
- [24] Sundelius B, Wahde M, Lehto H J, et al. ApJ, 1997, 484: 180
- [25] Valtonen M J, Lehto H J. ApJ, 1997, 481: L5
- [26] Valtonen M J, Lehto H J, Sillanpää A, et al. ApJ, 2006, 646: 36
- [27] Valtonen M J, Nilsson K, Sillanpää A, et al. ApJ, 2006, 643: L9
- [28] Valtonen M J. ApJ, 2007, 659: 1074
- [29] Valtonen M J, Lehto H J, Nilsson K, et al. Natur, 2008, 452: 851
- [30] Valtonen M, Kidger M, Lehto H, et al. A&A, 2008, 477: 407
- [31] Valtonen M J. RMxAA, 2008, 32: 22
- [32] Valtonen M J, Nilsson K, Villforth C, et al. ApJ, 2009, 698: 781

The Orbit of Binary Black Hole OJ287: A 3.5th Post-Newtonian Order Calculation

WU Shu-guang ZHANG Yang FU Zheng-wen

(Key Laboratory for Researches in Galaxies and Cosmology, Department of Astronomy,
University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

ABSTRACT Supermassive binary black hole OJ287 is a strong gravitational radiation source. To detect the signal of its gravitational wave, the knowledge of the waveform will

be of great help, which is mainly determined by the orbital motion of the binary. For this purpose, we carry out a detailed calculation of the orbital motion of OJ287, using the post-Newtonian (PN) approximation up to 3.5th order within the framework of general relativity. Our result is one order higher than the previous work made by others. As a radiation process, there is a time delay from the instance when the secondary black hole impacts on the accretion disk of the primary to the moment of the optical outburst. This time delay has to be taken into account when we try to fit the calculated orbit to the observed outburst times. Adopting a linear relation between the time delay and the impact distance as an empirical model, we fit the calculated orbit to the observed data of the recent seven outbursts of OJ287, obtain the solution of its orbital motion, and give the important orbital properties, including the averaged orbital parameters. By analyzing the result of 3.5PN order calculation of the binary system, we find some interesting features. The precession rate of secondary black hole is shown to increase to a maximum, and then to decrease at late stages, and to eventually turn into a negative value. This result might indicate the breakdown of 3.5PN approximation at late stages when a more accurate calculation is needed. More interestingly, as a main finding of this paper, we discover that the dissipative terms of 2.5th order and 3.5th order have opposite signs. This implies that the 3.5th order term itself does not radiate, but absorbs energy. However, the sum of the two terms still radiates gravitational waves outward. This is confirmed by the change rate of the energy of the system. Our results of the orbit of binary black hole OJ287 up to 3.5PN can be further used to calculate its radiated gravitational waves.

Key words quasars: individual: OJ287, galaxy: kinematics and dynamics, gravitation: post-Newtonian approximation, gravitational waves