

# 自适应 Kalman 滤波用于实时求解原子钟运行参数\*

侯 娟<sup>1,2†</sup> 董绍武<sup>1</sup> 屈俐俐<sup>1</sup> 王继刚<sup>3</sup> 何在民<sup>1,2</sup>

(1 中国科学院国家授时中心 西安 710600)

(2 中国科学院研究生院 北京 100049)

(3 淮海工学院测绘工程学院 连云港 222005)

**摘要** 实时准确掌握原子钟运行情况, 对卫星导航和守时工作来说有着重要意义. 针对标准 Kalman 滤波实时求解原子钟运行参数存在的问题, 提出了运用基于预报残差的自适应 Kalman 滤波模型实时求解钟参数. 该模型在标准 Kalman 滤波模型基础上, 构造了一个自适应因子, 使得当原子钟在调频或调相后能较快地给出准确可靠的运行参数估值. 最后结合导航和守时工作的 3 个算例, 验证了该方法的有效性.

**关键词** 时间, 方法: 数据分析

**中图分类号:** P 127; **文献标识码:** A

## 1 引言

实时掌握原子钟的运行参数, 在导航定位以及守时工作中具有重要意义. 在卫星导航定位中, 导航电文实时播报卫星钟运行参数, 以满足实时导航定位需要<sup>[1]</sup>; 在时间频率实验室中, 控制守时参数, 以输出高精度的同步时间信号<sup>[2]</sup>. 求解实时参数的方法很多, 其中 Kalman 滤波方法是最常用的方法<sup>[3-5]</sup>. 应用 Kalman 滤波算法求解原子钟的时差、频差和频漂参数, 必须构造合理的函数模型和可靠的随机模型以及合理的估计方法. 当观测量无粗差, 原子钟无异常扰动时, 经典 Kalman 滤波可以给出精确可靠的原子钟状态参数估值<sup>[6]</sup>. 但由于原子钟在运行过程中受复杂环境因素的影响, 会发生频率跳变; 为了使原子钟的频偏和同步精度保持在一定范围内, 还需要对原子钟进行调频、调相操作<sup>[7]</sup>. 此时标准 Kalman 滤波收敛速度变慢, 进而影响实时参数的准确性. 为解决该问题可以采用实时修正函数模型和随机模型的方法, 以加快 Kalman 滤波收敛速度, 这就是所谓的自适应 Kalman 滤波. 自适应 Kalman 滤波的类型很多, 包括极大似然法, 贝叶斯法, 相关法以及协方差匹配法等<sup>[8]</sup>. 杨元喜等学者提出了基于预报残差的自适应滤波方法, 该方法在观测信息不足时仍能有效地抑制动态模型误差影响<sup>[9]</sup>. 考虑到原子钟每个历元的观测数据小于未知参数个数, 本文将主要讨论基于预报残差的自适应 Kalman 滤波在实时求解原子钟运行参数中的应用.

2011-12-29 收到原稿, 2012-02-15 收到修改稿

\* 中国科学院重要方向性项目 (0808YC6801) 资助

† hhoujuan@126.com

## 2 Kalman 滤波

### 2.1 标准 Kalman 滤波

设系统的状态方程和观测方程分别为

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{H}_{k,k-1} \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{W}_k, \quad (1)$$

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{e}_k, \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{X}_k$  为状态向量,  $\mathbf{H}_{k,k-1}$  为状态转移矩阵,  $\mathbf{L}_k$  为观测向量,  $\mathbf{A}_k$  为设计矩阵,  $\mathbf{W}_k$  和  $\mathbf{e}_k$  是均值为零且协方差矩阵分别为  $\sum \mathbf{W}_k$  和  $\sum_k$  的相互独立的正态白噪声. 状态向量  $\mathbf{X}_k$  的最佳估值可以由下面一组递推公式实现<sup>[10-11]</sup>.

(1) 计算预测状态向量

$$\bar{\mathbf{X}}_k = \mathbf{H}_{k,k-1} \hat{\mathbf{X}}_{k-1}. \quad (3)$$

(2) 计算预测状态向量协方差矩阵

$$\sum_{\bar{\mathbf{X}}_k} = \mathbf{H}_{k,k-1} \sum_{\hat{\mathbf{X}}_{k-1}} \mathbf{H}_{k,k-1}^T + \sum \mathbf{W}_k. \quad (4)$$

(3) 计算预测残差

$$\bar{\mathbf{V}}_k = \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{X}}_k - \mathbf{L}_k. \quad (5)$$

(4) 计算预测残差协方差矩阵

$$\sum_{\bar{\mathbf{V}}_k} = \mathbf{A}_k \sum_{\bar{\mathbf{X}}_{k-1}} \mathbf{A}_k^T - \mathbf{L}_k. \quad (6)$$

(5) 计算增益矩阵

$$\bar{\mathbf{K}}_k = \sum_{\bar{\mathbf{X}}_k} \mathbf{A}_k^T \left( \mathbf{A}_k \sum_{\bar{\mathbf{X}}_k} \mathbf{A}_k^T + \sum_k \right)^{-1}. \quad (7)$$

(6) 计算新的状态估值

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \bar{\mathbf{X}}_k + \bar{\mathbf{K}}_k (\mathbf{L}_k - \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{X}}_k). \quad (8)$$

(7) 计算新的状态向量协方差矩阵

$$\sum_{\hat{\mathbf{X}}_k} = [\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{A}_k] \sum_{\bar{\mathbf{X}}_k}. \quad (9)$$

其中  $\mathbf{I}$  为单位矩阵. 从以上公式可以看出, Kalman 滤波实际就是一个预报并利用新的测量信息进行更新的递推过程, 并通过协方差矩阵  $\sum_{\bar{\mathbf{X}}_k}$  和  $\sum_k$  来决定测量值的权.

### 2.2 基于预报残差的自适应 Kalman 滤波

自适应 Kalman 滤波是根据预测残差  $\bar{\mathbf{V}}_k$  的量级反映了状态方程模型的误差原理, 构造了统计量<sup>[11]</sup>

$$\Delta \tilde{V}_k = \frac{\bar{\mathbf{V}}_k^T \bar{\mathbf{V}}_k}{tr(\sum \bar{\mathbf{V}}_k)}. \quad (10)$$

建立了自适应因子  $\alpha_k$ , 通常  $\alpha_k$  可以构造成 3 段、2 段或指数函数形式<sup>[11]</sup>, 此处仅给出指数自适应因子:

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 & |\Delta\tilde{V}_k| \leq c, \\ e^{-(|\Delta\tilde{V}_k|-c)} & |\Delta\tilde{V}_k| > c. \end{cases} \quad (11)$$

式中  $c$  为常数, 一般取为  $1 \sim 1.5$ . 结合 (10) ~ (11) 式可以看出,  $c$  取值愈大,  $\alpha_k$  取 1 的几率就愈大, 即对标准 Kalman 滤波模型干扰愈小; 反之,  $c$  取为 1, 抑制模型噪声能力最强. 本文中  $c$  取值为 1.

将自适应因子加入到标准 Kalman 滤波中, 得到自适应 Kalman 滤波的解为

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \bar{\mathbf{X}}_k + \bar{\mathbf{K}}_k(\mathbf{L}_k - \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{X}}_k). \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_k = \frac{1}{\alpha_k} \sum \bar{\mathbf{X}}_k \mathbf{A}_k^T \left( \mathbf{A}_k \frac{1}{\alpha_k} \sum \bar{\mathbf{X}}_k \mathbf{A}_k^T + \sum_k \right)^{-1}. \quad (13)$$

当  $\alpha_k = 1$  时, (13) 式就转化为标准 Kalman 滤波.

综合上述分析,  $\alpha_k$  是利用预报残差向量构造的, 因此将这种方法命名为基于预报残差的自适应 Kalman 滤波.

该学习统计量和相应的自适应因子有如下特点<sup>[6]</sup>:

- (1) 由统计量 (10) 式构造的自适应因子主要用来控制模型误差影响.
- (2) 该自适应因子计算简单, 不需要由观测信息计算钟差模型的预报值, 当观测量不足时, 仍能抑制钟差预报模型误差影响.
- (3) 该自适应因子依赖于观测信息, 因此有必要确保钟差数据观测质量, 才能改善模型异常误差.

对照标准 Kalman 滤波模型, 自适应 Kalman 滤波模型中, 每次滤波时都要依据 (10) 式判别  $\Delta\tilde{V}_k$  的大小, 进而得到  $\alpha_k$  和  $\mathbf{K}_k$ , 这样增加了程序计算量, 一般使得程序运行时间增加  $1 \sim 2$  倍, 但这对于现在的计算机来说影响不大.

### 3 算例分析

结合导航定位和守时工作的实践, 给出如下 3 个算例:

算例 1: 以 IGS 钟差产品序列作为算例. 从 <http://igscb.jpl.nasa.gov/components/prods.html> 网站上下载了 2009 年 1 月 1 日 (MJD54832) IGS 精密卫星钟差数据, 该数据为 24 h 观测序列, 时间间隔是 5 min, 共有 288 个样本. 本文随机选取了 17、18、26 和 31 号这 4 颗卫星钟差数据. 这 4 颗卫星钟差数据在 MJD54832 这天不存在跃变和阶跃, 也就是说钟差序列比较平稳.

算例 2: 以算例 1 中数据为基础, 在第 250 历元及其以后加入阶跃为 10 ns 的信号, 用于模拟原子钟在运行过程中及调相后的情形. 在卫星导航中为了保持和主控站时间同步, 常遇到此类对星载钟调相情况.

算例 3: 选取 2011 年 7 月 (MJD55743 ~ 55773) 中国科学院国家授时中心守时实验室的主钟信号, 期间对主钟进行了多次调频, 用以维持时间尺度的高度稳定性. 主钟系一个

用来标识纸面时间的原子钟, 这个纸面时间是由一个原子钟组维持的时间尺度的结果. 为了保持与钟组所指示的时间同步, 主钟可根据钟组的结果进行频率驾驭来维持或保持钟组的时间尺度. 主钟系统由 1 台铯原子钟、相位微调器、高性能数字钟组成, 通过自动监控软件自动或手动调整地方原子时 (MC) 的频率, 产生一个与 UTC (协调世界时) 同步的 UTC (NTSC, MC), 同步精度参考国际电信联合会的要求达到  $|\text{UTC}-\text{UTC}(k)| < 100$  ns ( $k$  为时间实验室代码, 国家授时中心缩写为 NTSC). 因此实时掌握主钟运行参数对于播报标准时间有着重大而深远的意义<sup>[12-13]</sup>. 为了便于比较, 算例中我们分别采用标准 Kalman 滤波和基于预报残差的自适应 Kalman 滤波两种算法对本文给出的 3 个算例进行比较. 通常在评价 Kalman 滤波方法的有效性时, 分析滤波结果与原始观测比对后的 RMS. 表 1 给出了算例 1 和算例 2 的相应 RMS, 在表 1 和表 2 中标准 Kalman 滤波用 S 表示, 自适应 Kalman 滤波用 A 表示. 为了充分体现当有阶跃信号存在时, 两种滤波方法的收敛速度和参数可靠性的差异, 表 2 给出了阶跃前后各 10 个历元两种滤波结果与原始观测较差. 图 1 给出了主钟两种滤波结果与原始观测比较后的 RMS, 以 d 为单位.

表 1 算例 1 和算例 2 两种滤波结果与原始观测比较后的 RMS (单位: ns)

Table 1 RMS's of the two filter models compared with original observations in example 1 and example 2 (unit: ns)

| Clock number | Example 1 |        | Example 2 |        |
|--------------|-----------|--------|-----------|--------|
|              | S         | A      | S         | A      |
| 17           | 0.0344    | 0.0307 | 0.1210    | 0.1008 |
| 18           | 0.0824    | 0.0695 | 0.1422    | 0.1185 |
| 26           | 0.0786    | 0.0662 | 0.1399    | 0.1166 |
| 31           | 0.0412    | 0.0362 | 0.1232    | 0.1028 |

表 2 阶跃前后各 10 个历元两种滤波结果与原始观测较差 (单位: ns)

Table 2 RMS's of the two filter models compared with original observations before and after the jump in example 2 (unit: ns)

| Epoch | Satellite No.17 |         | Satellite No.18 |         | Satellite No.26 |         | Satellite No.31 |         |
|-------|-----------------|---------|-----------------|---------|-----------------|---------|-----------------|---------|
|       | S               | A       | S               | A       | S               | A       | S               | A       |
| 240   | 0.0094          | 0.0093  | 0.0232          | 0.0221  | 0.0370          | 0.0366  | 0.0026          | 0.0026  |
| 241   | 0.0087          | 0.0086  | -0.0203         | -0.0205 | -0.0111         | -0.0116 | -0.0192         | -0.0191 |
| 242   | 0.0084          | 0.0083  | 0.0292          | 0.0291  | 0.0181          | 0.0177  | 0.0153          | 0.0154  |
| 243   | -0.0301         | -0.0302 | -0.0576         | -0.0480 | 0.0043          | 0.0039  | 0.0026          | 0.0027  |
| 244   | -0.0371         | -0.0372 | 0.0607          | 0.0535  | 0.0016          | 0.0011  | 0.0195          | 0.0195  |
| 245   | 0.0770          | 0.0640  | 0.0060          | 0.0046  | -0.0373         | -0.0378 | 0.0225          | 0.0226  |
| 246   | -0.0171         | -0.0203 | 0.0338          | 0.0335  | 0.0132          | 0.0127  | -0.0347         | -0.0346 |
| 247   | -0.0542         | -0.0457 | -0.0765         | -0.0638 | 0.0035          | 0.0030  | 0.0316          | 0.0316  |
| 248   | -0.0031         | -0.0016 | 0.0184          | 0.0213  | -0.0176         | -0.0181 | 0.0056          | 0.0057  |
| 249   | 0.0067          | 0.0070  | -0.0213         | -0.0208 | -0.0406         | -0.0408 | 0.0006          | 0.0007  |
| 250   | 1.9072          | 1.5867  | 1.9115          | 1.5904  | 1.9116          | 1.5916  | 1.9207          | 1.5980  |
| 251   | 0.3688          | 0.2622  | 0.3217          | 0.2217  | 0.3447          | 0.2414  | 0.3284          | 0.2273  |
| 252   | 0.0499          | 0.0299  | 0.1087          | 0.0764  | 0.0206          | 0.0002  | 0.0573          | 0.0387  |
| 253   | -0.0120         | -0.0160 | -0.0488         | -0.0473 | -0.0036         | -0.0079 | 0.0046          | 0.0010  |
| 254   | -0.0239         | -0.0247 | -0.0403         | -0.0410 | -0.0659         | -0.0558 | -0.0633         | -0.0532 |

表 2 续

Table 2 (continued)

| Epoch | Satellite No.17 |         | Satellite No.18 |         | Satellite No.26 |         | Satellite No.31 |         |
|-------|-----------------|---------|-----------------|---------|-----------------|---------|-----------------|---------|
|       | S               | A       | S               | A       | S               | A       | S               | A       |
| 255   | -0.0452         | -0.0415 | -0.0575         | -0.0481 | -0.0772         | -0.0647 | -0.0373         | -0.0363 |
| 256   | -0.0298         | -0.0295 | -0.0411         | -0.0404 | -0.0786         | -0.0655 | -0.0127         | -0.0125 |
| 257   | -0.0266         | -0.0266 | 0.0008          | 0.0009  | -0.0397         | -0.0386 | -0.0463         | -0.0411 |
| 258   | -0.0258         | -0.0259 | -0.0682         | -0.0567 | -0.0128         | -0.0129 | -0.0139         | -0.0131 |
| 259   | -0.0831         | -0.0692 | -0.0039         | -0.0018 | -0.0268         | -0.0271 | -0.0460         | -0.0414 |
| 260   | -0.0549         | -0.0447 | -0.0878         | 0.0728  | -0.0293         | -0.0297 | -0.0325         | -0.0321 |

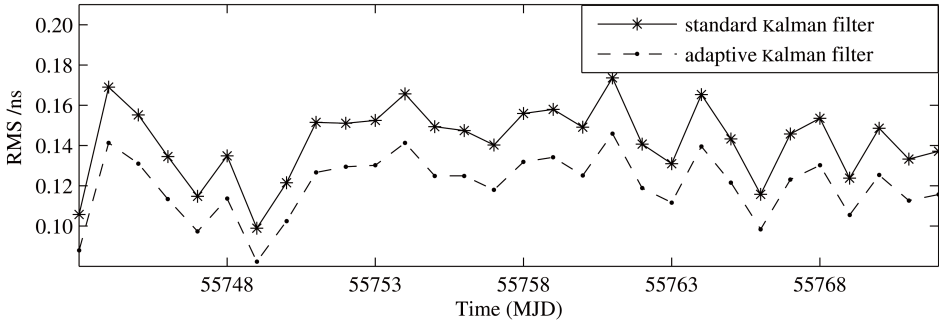


图 1 算例 3 两种滤波结果与原始观测比较后的 RMS

Fig. 1 RMS's of the two filter models compared with original observations in example 3

分析表 1、表 2 和图 1 可知：

- (1) 当卫星钟时差数据平稳时，基于残差预报的自适应 Kalman 滤波方法得到的原子钟运行参数精度能提高大约 13% 左右。
- (2) 当原子钟出现阶跃跳变时，基于残差预报的自适应 Kalman 滤波方法能以较小的误差和较快的速度收敛，得到可靠的原子钟运行参数。
- (3) 当原子钟存在调频时，也就是模型异常时，基于预报残差的自适应 Kalman 滤波能减弱模型误差，从而给出精度较高的参数估值，而经典 Kalman 滤波其先验状态方程由于不能可靠预测原子钟未知状态导致收敛较慢，运行参数误差较大。

4 结论与讨论

基于预报残差的自适应 Kalman 滤波继承了标准 Kalman 滤波的特性，能实时给出原子钟的运行参数。该算法与其他类型自适应滤波相比较而言，理论严密，计算简单，算法复杂度低。基于预报残差的自适应 Kalman 滤波用于实时求解原子钟运行参数时，无论原子钟运行是否平稳，是否有调频调相存在，该算法优于标准 Kalman 滤波算法，二者都能较好地估计原子钟状态参数。运用该算法实时求解原子钟运行参数，可以明显提高导航卫星发布的星载钟参数精度，进而提高实时导航定位的精度；对于时间频率实验

室的主钟来说, 在调频或调相后及时得到可靠的运行参数, 对于播报标准时间具有重大意义.

最后, 需要指出的是, 基于预报残差的自适应 Kalman 滤波有一个应用前提, 即观测测量可靠. 因此, 原子钟在进行调频调相时应该确保观测质量, 对于导航卫星和守时主钟来说, 这个要求是容易满足的.

总之, 基于预报残差的自适应 Kalman 滤波能在生成系统时间方面获得更好的估计结果, 有必要进一步深入研究.

### 参 考 文 献

- [1] 周忠谟, 易杰军, 周琪. GPS 卫星测量原理与应用. 修订版. 北京: 测绘出版社, 1997
- [2] 陈小敏, 李孝辉. 吉林大学学报: 理学版, 2009, 47: 591
- [3] 王继刚, 胡永辉, 何在民, 等. 天文学报, 2011, 52: 54
- [4] Wang J G, Hu Y H, He Z M, et al. ChA&A, 2011, 35: 318
- [5] 王继刚, 胡永辉, 何在民, 等. 天文学报, 2012, 53: 213
- [6] 郭海荣. 导航卫星原子钟时频特性分析理论与方法研究. 郑州: 中国人民解放军信息工程大学, 2006
- [7] 漆贯荣. 时间科学基础. 北京: 高等教育出版社, 2006
- [8] 帅平, 李明, 陈绍龙, 等. 中国空间科学技术, 2008, 28: 1
- [9] 杨元喜, 何海波, 徐天河. 测绘学报, 2001, 30: 293
- [10] 戴吾蛟, 伍锡锈. 大地测量与地球动力学, 2009, 29: 88
- [11] 杨元喜. 自适应动态导航定位. 北京: 测绘出版社, 2006
- [12] 袁海波, 王正明. 宇航计测技术, 2003, 23: 1
- [13] 王正明. 时间频率学报, 2008, 31: 1

## Real-time Solving Atomic Clock Operation Parameters Based on Adaptive Kalman Filter

HOU Juan<sup>1,2</sup> DONG Shao-wu<sup>1</sup> QU Li-li<sup>1</sup> WANG Ji-gang<sup>3</sup> HE Zai-min<sup>1,2</sup>

(1 National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600)

(2 Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

(3 School of Geodesy & Geomatics Engineering, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang 222005)

**ABSTRACT** Accurately grasping the real-time operation situation of atomic clocks is of important significance in the working range of satellite navigation and keeping time. The adaptive Kalman filter based on the residual forecast model is proposed in order to solve the problem arisen in the process of real-time solving atomic clock operation parameters with the standard Kalman filter. In this model, an adaptive factor is constructed to resist model error on the basis of the standard Kalman filter. Therefore, the atomic clock parameters can be obtained reliably and rapidly after the frequency or phase adjustments which often happen in the satellite navigation and keeping time community. Finally, the examples for both numerical simulation and a real-life situation are presented, and the results are analyzed in detail to demonstrate the efficiency of the proposed method.

**Key words** time, methods: data analysis