

月球探测中的无动力返回轨道*

侯锡云^{1,2†} 赵玉晖^{1,2,3} 刘 林^{1,2,3}

(1 南京大学天文与空间科学学院 南京 210093)

(2 南京大学空间环境与航天动力学研究所 南京 210093)

(3 北京航天飞行与控制指挥中心 北京 100094)

摘要 首先在平面圆型限制性三体问题模型下给出了白道面内 4 种类型的对称无动力返回轨道, 之后针对其中较实用的一种, 考虑了其在白道面内的非对称情形, 并探讨了其三维情形及近月、近地的轨道倾角限制. 最后给出了地-月系真实引力模型下无动力返回轨道的设计方法和相应算例.

关键词 天体力学; 三体问题, 限制性问题, 方法: 数值

中图分类号: P 173; **文献标识码:** A

1 引言

当今国际社会正掀起新一轮探月热潮. 随着探月工程的顺利开展, 载人登月也是我国作为一个航天大国将要完成的任务. 与一般探月任务相比, 载人登月多出了对宇航员生命安全的保障要求, 因此在任务设计中, 必须尽可能地提高任务的安全系数. 单纯就轨道设计方面而言, 希望设计出的轨道即使在任务出现问题时仍能够返回地球. 上世纪美国与前苏联的载人登月活动中经常采用的无动力返回轨道就是这种安全要求的产物^[1]. 如果在近月点处入轨发动机点火失败, 这样的转移轨道可以无动力地返回地球而无需再次变轨. 虽然这类无动力返回轨道经常出现于各类文献中, 但有关它们的设计细节却相对较少. 基于这种状况, 本文对这一类转移轨道做了较详细的研究, 在我国大力开展月球探测之际, 希望本文的工作能给有关的航天工作者提供一定的参考.

就地-月系内的转移轨道而言, 地球、月球和探测器组成的圆型限制性三体问题是很好的力模型近似, 该模型下的轨道演化情形可为实际力模型下的轨道设计提供良好的依据. 基于这种考虑, 本文首先在平面圆型限制性三体问题模型下给出了白道面内的 4 种对称无动力返回轨道, 之后针对其中较实用的一种, 考虑了非对称情形, 并将之推广到三维情形, 探讨了该类无动力转移轨道在近月端和近地端的轨道倾角变化. 以圆型限制性三体问题模型下的结果为基础, 文章最后考虑地-月系的真实引力模型, 给出了相应的轨道设计方法和算例.

2011-11-22 收到原稿, 2012-02-23 收到修改稿

* 国家自然科学基金项目 (10903002) 资助

† silence@nju.edu.cn

2 圆型限制性三体问题

探测器在地月空间运行时, 主要受到地球和月球的引力作用, 同时由于月球的轨道偏心率很小, 因此圆型限制性三体问题是很好的力模型近似. 通常在随两个大天体 (地 - 月系指地球和月球) 共同绕转的坐标系中研究小天体 (本文指月球探测器) 的运动, 坐标系的原点取在两个大天体的质心, 这样的坐标系称为质心会合坐标系, 如图 1 所示. $x-y$ 平面为两个大天体的运动平面 (对地 - 月系而言, 指白道面), z 轴与 x 、 y 轴构成右旋正交坐标系.

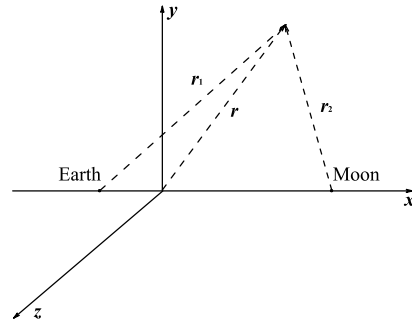


图 1 质心会合坐标系示意图 (地 - 月系统)

Fig.1 An illustration picture of the barycentric synodic frame (for the Earth-Moon system)

以地月平均距离为距离单位, 地球和月球质量之和为质量单位, 小天体 (探测器) 在地 - 月系质心会合坐标系^[2]下的运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} + 2(-\dot{y}, \dot{x}, 0) = \partial\Omega/\partial\vec{r} \\ \Omega = (\mu(1-\mu) + x^2 + y^2)/2 + (1-\mu)/r_1 + \mu/r_2 \end{cases}, \quad (1)$$

其中 $\mu = m_{\text{Moon}}/(m_{\text{Moon}} + m_{\text{Earth}})$, m_{Moon} 和 m_{Earth} 分别为月球和地球的质量. $\vec{r} = (x, y, z)$ 为探测器相对地 - 月系质心的位置矢量. r_1 、 r_2 分别为探测器距地球和月球的距离. 在质心会合坐标系下, 地球和月球的位置坐标分别为 $(-\mu, 0, 0)$ 和 $(1-\mu, 0, 0)$.

当然, 实际的地 - 月系统相比圆型限制性三体问题还存在各种摄动因素, 本文首先在圆型限制性三体问题模型下研究无动力返回轨道, 最后再以该模型下的结果为基础, 给出实际力模型下无动力返回轨道的计算方法与算例.

3 白道面内的对称无动力返回轨道

以转移轨道起始端的近地点高度为 200 km, 返回端的近地点高度为 200 km, 近月点高度为 100 km 为例. 由于出发和返回时刻近地点高度相同, 因此设计出的转移轨道在会合坐标系中关于 x 轴对称, 这表明在月球附近无动力返回轨道与 x 轴的交点的速度方向

垂直于 x 轴. 记会合坐标系下交点处的状态量为

$$\mathbf{X}_0 = (\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0) = (x_0, 0, 0, \dot{y}_0). \quad (2)$$

由于位置与速度垂直, \mathbf{X}_0 即为转移轨道的近月点, 因此 x_0 可由近月点高度给出, 可调变量为速度分量 \dot{y}_0 以及单向转移时间 T (所谓单向转移时间, 是指由起始点到达近月点的时间或者由近月点到达返回点的时间, 由于轨道是对称的, 两者相同), 记探测器相对地心的位置和速度分别为 \vec{r} 、 $\dot{\vec{r}}$, 则探测器在转移轨道起始端或末端的约束条件为 (由于轨道的对称性, 在一端满足, 在另一端一定满足)

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0, \quad r = a_{\text{Earth}} + 200 \text{ km}, \quad (3)$$

其中 a_{Earth} 为地球赤道半径. 约束条件 (3) 式可通过微分方程边值求解方法^[3] 调整 \dot{y}_0 、 T 得到满足. 图 2 给出在月球背面入轨的结果, 单向转移时间为 2.863 4 d, 左图为会合坐标系下的图像, 右图为地心惯性系下的相应结果 (同图 3~6). 图中虚线表示发射轨道, 实线表示返回轨道, EM 表示采用的单位为地-月平均距离 $[L] = 3.84747981 \times 10^8 \text{ m}$, 同下图. 对图 2 所示的无动力返回轨道, 单向转移时间随着近地点高度的增加而增加, 也随着近月点高度的增加而增加^[4]. 图 2 所示的轨道在地球附近是顺行出发的, 相应地在地球附近逆行出发的无动力返回轨道亦存在, 如图 3 所示. 单向转移时间为 2.825 6 d. 与图 2 所示的轨道类似, 图 3 所示的无动力返回轨道单向转移时间随着近地点高度的增加而增加, 亦随着近月点高度的增加而增加^[4].

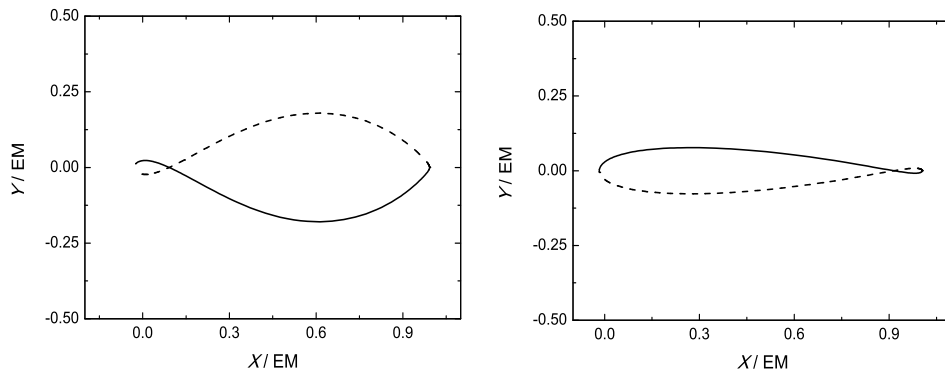


图 2 一条月球背面入轨的无动力返回轨道, 地球附近顺行出发

Fig. 2 A free return trajectory departs from the Earth in a prograde orbit and reaches the far side of the Moon.

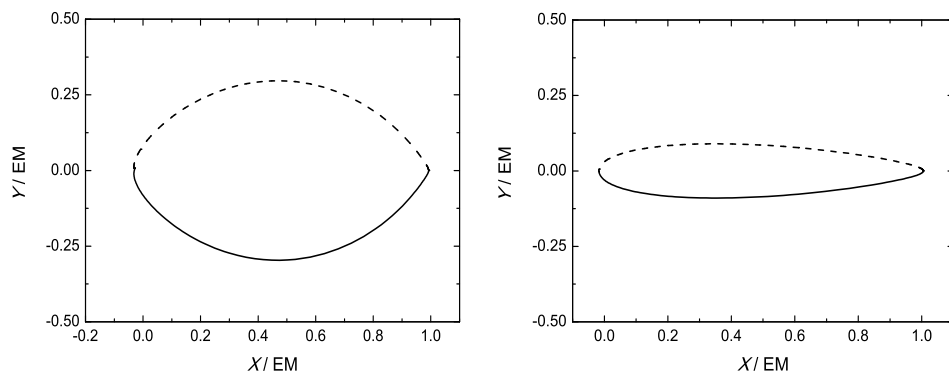


图3 一条月球背面入轨的无动力返回轨道, 地球附近逆行出发

Fig. 3 A free return trajectory departs from the Earth in a retrograde orbit and reaches the far side of the Moon.

当入轨点在月球正面时, 相应的无动力返回轨道转移时间会大大增加, 图4给出了地球附近顺行出发的结果, 单向转移时间为 13.765 7 d. 图5给出了地球附近逆行出发的结果, 单向转移时间为 15.015 8 d. 对图4~5所示的无动力返回轨道, 单向转移时间随着近地点高度的增加而增加, 但随着近月点高度的增加而减小^[4].

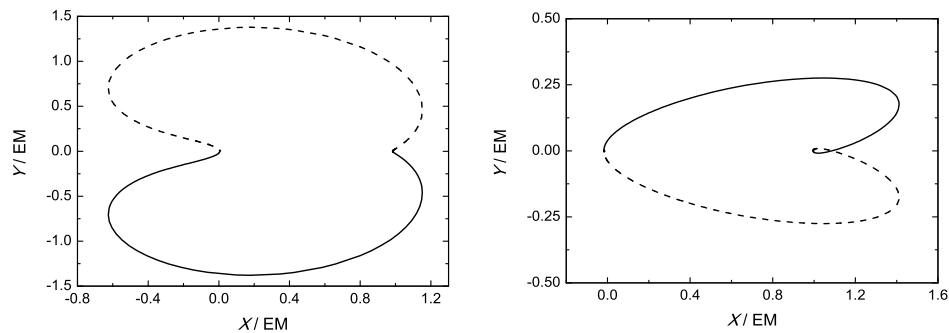


图4 一条月球正面入轨的无动力返回轨道, 地球附近顺行出发

Fig. 4 A free return trajectory departs from the Earth in a prograde orbit and reaches the near side of the Moon.

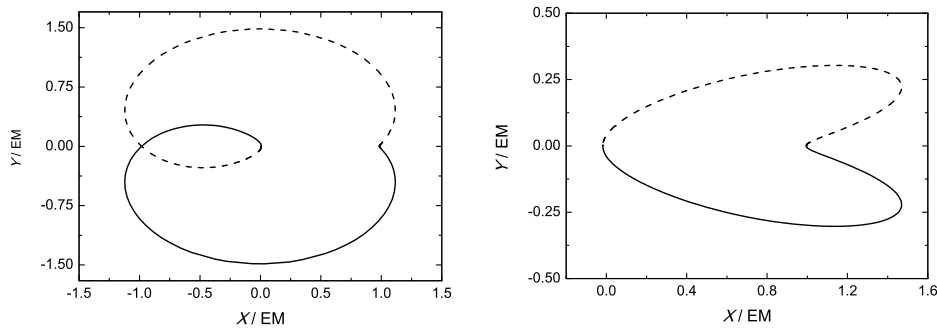


图 5 一条月球正面入轨的无动力返回轨道，地球附近逆行出发

Fig. 5 A free return trajectory departs from the Earth in a retrograde orbit and reaches the near side of the Moon.

这 4 种类型的转移轨道都限制在白道面内且关于 x 轴对称，文献 [4] 中称为 I 型对称无动力返回轨道并对它们作了详细研究，这里就不再重复，有兴趣的读者可参见该文献。需要说明的是，图 2 ~ 5 中的轨道在地球附近并不闭合，因此并不是周期轨道。

4 白道面内的非对称无动力返回轨道

通常从地球上发射逆行轨道需要耗费较大的能量，因此不予考虑。当入轨点在月球正面时，耗费的时间比入轨点在背面耗费的时间大大增加，不适合载人航天的任务需求，所以图 2 所示的无动力返回轨道较实用，下述研究将针对这种类型的轨道进行。当然，对其他类型的无动力返回轨道，下述研究方法亦适用。

对于返回型月球探测器而言，地月转移轨道的近地点高度是由火箭滑行段末端高度决定的，而月地转移轨道的近地点高度是由再入大气层时刻探测器所处的再入点高度决定的。由于两段轨道近地点高度的不同，无动力返回轨道将不再关于 x 轴对称。记返回时近地点高度为 h_F ，出发时近地点高度为 h_B ，记探测器在近月点的状态量为

$$\mathbf{X}_0 = (\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0) = (x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0). \quad (4)$$

由于轨道不再对称，因此 $y_0 \neq 0, \dot{x}_0 \neq 0$ 。记出发时刻探测器相对地球的位置和速度分别为 \vec{r}_B 、 $\dot{\vec{r}}_B$ ，返回时刻相对地球的位置和速度分别为 \vec{r}_F 、 $\dot{\vec{r}}_F$ ，则约束条件为

$$\begin{cases} \vec{r}_B \cdot \dot{\vec{r}}_B = 0, & r_B = a_{\text{Earth}} + h_B \\ \vec{r}_F \cdot \dot{\vec{r}}_F = 0, & r_F = a_{\text{Earth}} + h_F \\ \vec{r}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0 = 0, & r_0 = a_{\text{Moon}} + h_M \end{cases}, \quad (5)$$

其中 a_{Moon} 为月球赤道半径， h_M 为近月点高度，可调变量为 x_0 、 y_0 、 \dot{x}_0 、 \dot{y}_0 以及从近月点正向积分的时间 T_F 及负向积分的时间 T_B (由于轨道不再关于 x 轴对称， $T_B \neq T_F$)。同样，约束条件 (5) 式可通过打靶法调整 x_0 、 y_0 、 \dot{x}_0 、 \dot{y}_0 、 T_B 及 T_F 得到满足。

计算表明, 如果 h_B 、 h_F 相差不大, 则轨道几乎是对称的, 只有当两者相差较大时, 轨道的不对称性才比较明显. 图 6 给出 $h_B = 3.6 \times 10^4$ km, $h_F = 200$ km, $h_M = 100$ km 的结果. 从出发点 to 近月点耗时 2.976 5 d, 从近月点返回地球耗时 3.184 4 d.

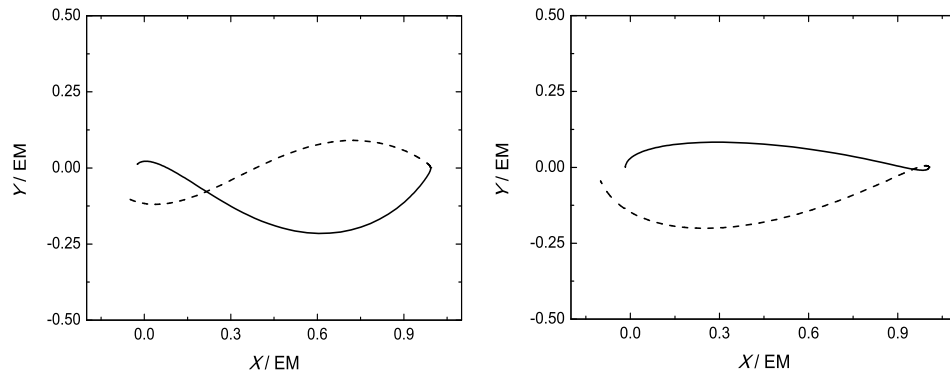


图 6 $h_B = 3.6 \times 10^4$ km, $h_F = 200$ km, $h_M = 100$ km 的无动力返回轨道

Fig. 6 A free return trajectory with $h_B = 3.6 \times 10^4$ km, $h_F = 200$ km, and $h_M = 100$ km

5 三维无动力返回轨道

尽管上述无动力返回轨道有着能够提供备用轨道的优点, 但是它要求飞行轨道在白道面上, 从而限制了着陆点位置必须在赤道附近 $\pm 5^\circ$ 的区域, 这对于某些科学目标的完成是不利的. 为了保证安全性, 在阿波罗早期的几个月球探测任务中 (包括阿波罗 8 号、10 号、11 号), 在进行轨道设计时几乎完全考虑了无动力返回轨道的条件, 保证如果中途出现故障, 只需服务舱的反作用控制系统 (Reaction Control System, RCS) 进行少量的轨道修正即可驾驶飞船安全返回并降落在预定位置. 然而由于发射条件和再入、回收条件的约束, 实际的地月和月地转移轨道往往不易于被局限在白道平面内, 这就需要将无动力返回轨道的研究由平面向空间中拓展, 从阿波罗 12 号开始, 无动力返回轨道的应用从白道面拓展到了空间. 对三维情形, 近月点的状态量为

$$\mathbf{X}_0 = (\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0) = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \quad (6)$$

约束条件同 (5) 式, 此时可调变量个数为 x_0 、 y_0 、 z_0 、 \dot{x}_0 、 \dot{y}_0 、 \dot{z}_0 及正负向的单向转移时间 T_B 、 T_F 共 8 个, 但约束条件只有 6 个, 因此解在局部区域并不唯一. 为解决此问题, 可先固定 z_0 、 \dot{z}_0 , 在给出一条无动力返回轨道后再变动 z_0 、 \dot{z}_0 , 给出其他的无动力返回轨道.

当近地的出发端和到达端的近地点高度 $h_B = h_F$ 时, 有两条特殊的三维周期轨道, 一条在会合坐标系下关于 $x-z$ 平面对称, 如图 7 所示, 此时近月点 z 轴方向的速度 $\dot{z}_0 = 0$. 另一条关于 $x-z$ 平面反对称, 如图 8 所示, 此时近月点在 $x-y$ 平面上, 即 $z_0 = 0$. 图 7 所示的轨道 $z_0 = 1.1 \times 10^{-3}$ (无量纲单位), 单向转移时间为 2.872 8 d, 图 8 所示的轨道

$\dot{z}_0 = 0.45$ (无量纲单位), 单向转移时间为 2.841 2 d.

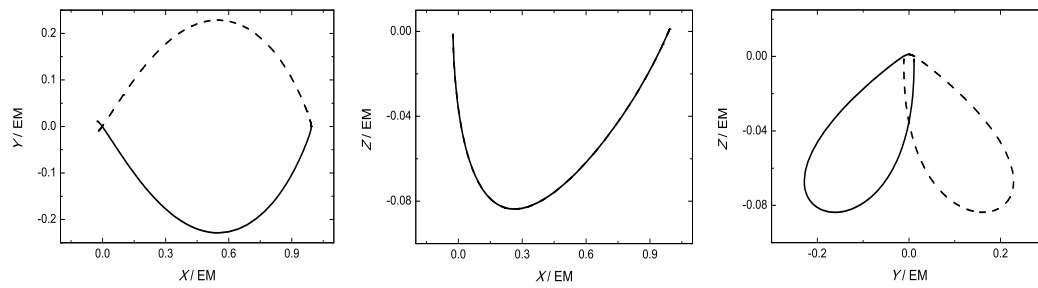


图 7 一条三维空间中的无动力返回轨道, 在近月点处 $z_0 = 1.1 \times 10^{-3}$, $\dot{z}_0 = 0$.

Fig. 7 A three-dimensional free return trajectory. At the perilune, $z_0 = 1.1 \times 10^{-3}$, $\dot{z}_0 = 0$.

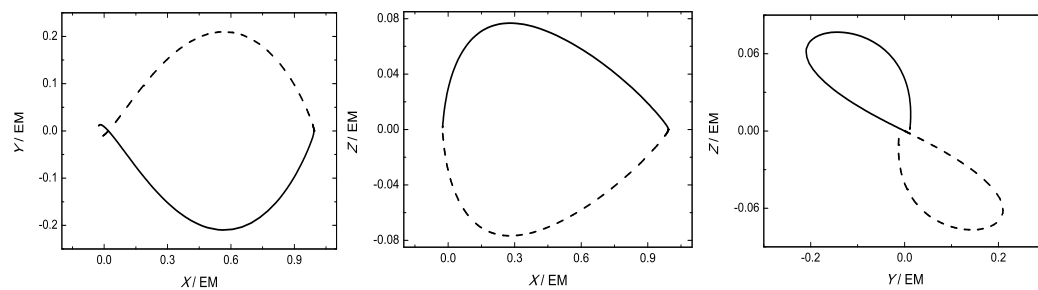


图 8 一条三维空间中的无动力返回轨道, 在近月点处 $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0.45$.

Fig. 8 A three-dimensional free return trajectory. At the perilune, $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0.45$.

6 近月、近地轨道倾角限制

通常当 h_B 、 h_F 、 h_M 给定时, 近月点的 z_0 、 \dot{z}_0 不能任意变化, 而是有一定的变化范围. 以 $h_B = h_F = 200$ km, $h_M = 100$ km 为例, 图 9 左上图给出了 z_0 、 \dot{z}_0 允许的变化范围. 图中每一个 z_0 、 \dot{z}_0 对应一条无动力返回轨道. 图中的等高线是近月点处探测器相对月心白道坐标系的轨道倾角. 由于轨道逆行进入月球引力范围, 因此轨道倾角大于 90° . 显然, 由于受到 z_0 、 \dot{z}_0 变化范围的限制, 近月点处的轨道面与白道面的夹角也受到限制. 随着近月点高度的增加, z_0 、 \dot{z}_0 的变化范围越大, 近月点处的轨道面与白道面的夹角的最大值也越大, 如图 9 右上图所示, 此时 $h_B = h_F = 200$ km, $h_M = 1000$ km. 类似地, 随着近地点高度的增加, z_0 、 \dot{z}_0 的变化范围也越大, 近月点处的轨道面与白道面的夹角的最大值也越大, 如图 9 左下图所示, 此时 $h_B = h_F = 10^4$ km, $h_M = 1000$ km. 这些图中的标示 “adim” 对应无量纲单位.

$$[L] = 384747981.000000000 \text{ m}, \quad [T] = 375699.843898365 \text{ s}, \quad [V] = [L]/[T]. \quad (7)$$

这些图中 z_0 、 \dot{z}_0 的变化区域关于 z_0 、 \dot{z}_0 轴对称, 这是因为 $h_B = h_F$, 如果两者相差较大, 无动力返回轨道的不对称性将会明显, 则 z_0 、 \dot{z}_0 的可行区域将呈现明显的不对称性, 如图 9 右下图所示, 此时 $h_B = 36000$ km, $h_F = 100$ km, $h_M = 100$ km.

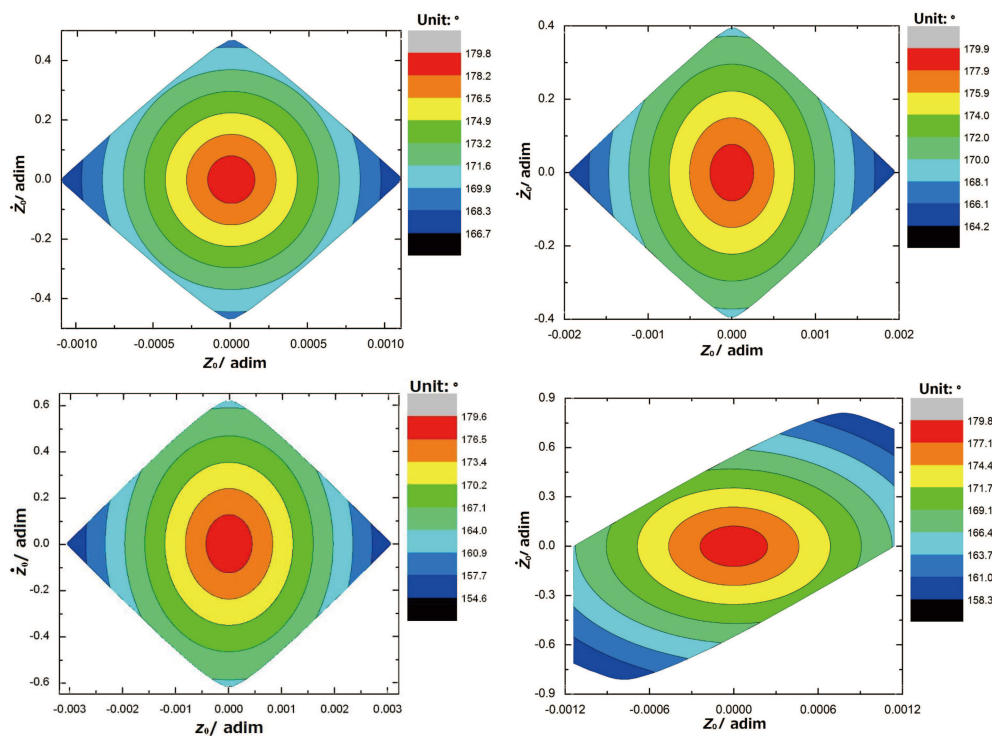


图 9 不同近地点及近月点高度时近月点 z_0 、 \dot{z}_0 的变化范围及近月轨道倾角的等高线.

左上图: $h_B = h_F = 200$ km, $h_M = 100$ km; 右上图: $h_B = h_F = 200$ km, $h_M = 10^3$ km;
左下图: $h_B = h_F = 10^4$ km, $h_M = 10^3$ km; 右下图: $h_B = 36000$ km, $h_F = 100$ km, $h_M = 100$ km.

Fig. 9 The feasible region of z_0 , \dot{z}_0 , and the contour curves of the inclination at the perilune for different perigee and perilune heights. Upper left: $h_B = h_F = 200$ km, $h_M = 100$ km; Upper right: $h_B = h_F = 200$ km, $h_M = 10^3$ km; Lower Left: $h_B = h_F = 10^4$ km, $h_M = 10^3$ km; Lower right: $h_B = 36000$ km, $h_F = 100$ km, $h_M = 100$ km.

图 10 给出了对应图 9 左上图的近地轨道倾角的等高线图 (由于对称性, 仅给出出发端的近地停泊轨道倾角变化曲线). 由图可知, 近地端的轨道倾角可在 $0 \sim 90^\circ$ 之间变化, 并不受到近月端的限制.

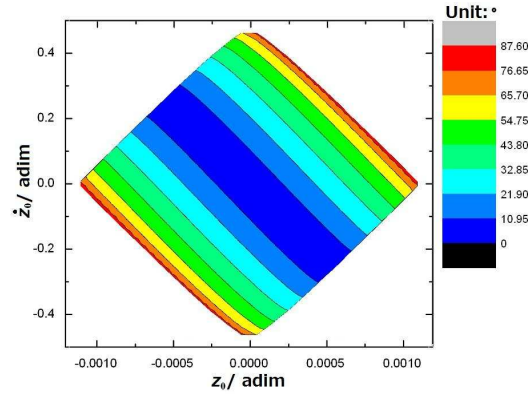


图 10 $h_B = h_F = 200$ km, $h_M = 100$ km 时近月点处 z_0 、 \dot{z}_0 的变化范围及近地轨道倾角的等高线.

Fig. 10 The feasible region of z_0 , \dot{z}_0 , and the contour curves of the inclination at the perigee for $h_B = h_F = 200$ km, $h_M = 100$ km.

7 真实力模型下的结果

相比圆型限制性三体问题,地-月系对应的真实力模型存在各类摄动.忽略影响很小的大行星摄动和地球、月球的非球形引力位摄动,主要需考虑月球轨道的偏心率摄动和来自太阳的引力摄动,因此本文所说的地-月系真实力模型,包括地球、月球和太阳的质点引力,它们的位置由 DE405 历表给出.

上述圆型限制性三体问题模型下的结果稍加改正即可得到真实力模型下的结果.记月心会合坐标系下探测器的位置与速度矢量为 \vec{r} 、 $\dot{\vec{r}}$,地心惯性系(我们采用了 ICRS (International Celestial Reference System) 坐标系)下的位置和速度矢量为 \vec{R} 、 $\dot{\vec{R}}$,有如下转换关系

$$\vec{R} = \vec{R}_M + \mathbf{C}\vec{r}, \quad \dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_M + \dot{\mathbf{C}}\vec{r} + \mathbf{C}\dot{\vec{r}}, \quad (8)$$

其中 \vec{R}_M 、 $\dot{\vec{R}}_M$ 为地心惯性系下月球的位置和速度矢量.旋转矩阵 \mathbf{C} 定义如下^[5]:

$$\mathbf{C} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3); \quad \hat{e}_1 = \frac{\vec{R}_M}{R_M}, \quad \hat{e}_3 = \frac{(\vec{R}_M \times \dot{\vec{R}}_M)}{\|\vec{R}_M \times \dot{\vec{R}}_M\|}, \quad \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1. \quad (9)$$

记月心会合坐标系下近月点状态量为

$$\mathbf{X}_0 = (\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0) = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \quad (10)$$

我们设定 $z_0 = \dot{z}_0 = 0$, 则可调变量为 x_0 、 y_0 、 \dot{x}_0 、 \dot{y}_0 以及从近月点正向积分的时间 T_F 及负向积分的时间 T_B . 约束条件为

$$\begin{cases} \vec{R}_B \cdot \dot{\vec{R}}_B = 0, & R_B = a_{\text{Earth}} + h_B \\ \vec{R}_F \cdot \dot{\vec{R}}_F = 0, & R_F = a_{\text{Earth}} + h_F \\ \vec{r}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0 = 0, & r_0 = a_{\text{Moon}} + h_M \end{cases}, \quad (11)$$

其中 \vec{r}_B 、 \vec{r}_F 、 $\dot{\vec{r}}_B$ 、 $\dot{\vec{r}}_F$ 分别为出发时刻和返回时刻地心惯性系下的位置和速度矢量, 它们可由 \vec{r}_B 、 \vec{r}_F 、 $\dot{\vec{r}}_B$ 、 $\dot{\vec{r}}_F$ 通过 (8) 式计算. 同样, 约束条件 (11) 式可通过打靶法调整 x_0 、 y_0 、 \dot{x}_0 、 \dot{y}_0 以及 T_F 、 T_B 得到满足 (在求解过程中我们固定了 $z_0 = \dot{z}_0 = 0$, 实际情形需视具体航天任务约束而定). 图 11 给出了地 - 月瞬时会合坐标系中的这样一条轨道. 地 - 月瞬时会合坐标系的原点在地 - 月系质心, 距离单位为地球与月球之间的瞬时距离, 因此与图 1 ~ 4 不同, 图 11 中的坐标单位 “EM” 表示地月瞬时距离, 随时间变化而变化. 探测器在近月点时刻为 MJD57700.9, 从近地点到近月点耗时 2.932 9 d, 从近月点到近地点耗时 2.708 1 d. 图 12 给出了相应的地心惯性系中的图像, 图中坐标单位 “Ae” 表示地球赤道半径 a_{Earth} .

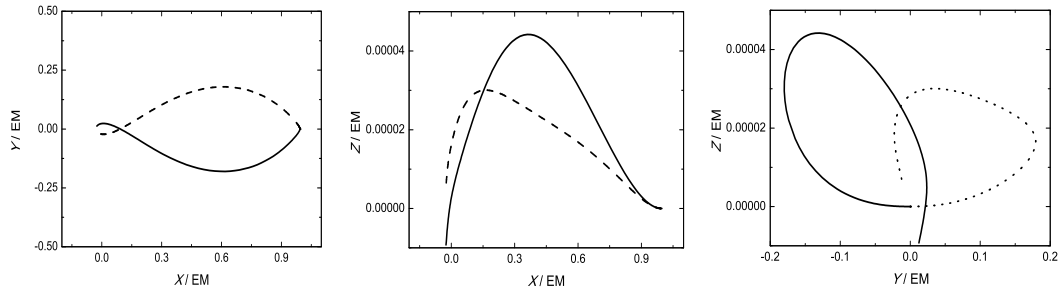


图 11 真实力模型下的一条无动力返回轨道 (地 - 月系瞬时会合坐标系)

Fig. 11 A free return trajectory in the real force model of the Earth-Moon system (drawn in the Earth-centered instantaneous synodic frame)

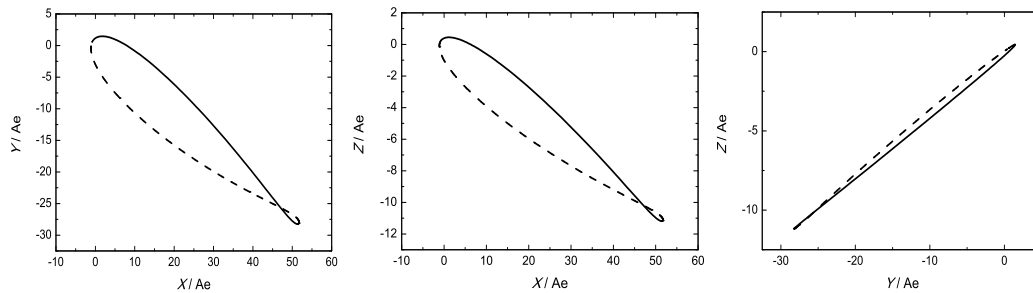


图 12 图 11 所示的轨道在地心惯性系下的图像

Fig. 12 The same trajectory as that in Fig. 11, but shown in Earth-centered celestial coordinate

8 讨论

与一般探月任务相比, 载人登月任务需要提供对宇航员生命安全的保障, 而无动力返回轨道为月球探测提供了一种备用轨道, 可以保证探测器在近月点轨道机动失败的情况下依然可以安全地返回地球. 本文基于圆形限制性三体问题模型, 系统地研究了约束条件不同的几种无动力返回轨道. 首先在较简单的平面圆型限制性三体问题模型下计算

了几种白道面内的对称无动力返回轨道, 并探讨了非对称情形. 之后结合具体工程中的实际需求描述了三维情形下月心和地心白道坐标系中转移轨道倾角受到的限制. 文章最后给出了实际力模型下设计这类无动力返回轨道的方法, 并给出了算例, 为我国即将进行的探月三期“采样返回”探月任务和载人登月任务的轨道设计策略提供相应的参考, 并为保证探月任务顺利完成的备用轨道设计提供一定的依据.

参 考 文 献

- [1] Woods W D. How Apollo Flew to the Moon. Berlin: Springer, 2008: 395-427
- [2] Szebehely V. Theory of Orbits. New York: Academic Press, 1967: 53-97
- [3] Stoer J, Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis. New York: Springer-Verlag, 1980: 539-577
- [4] Schwaniger A J. Trajectories in the Earth-Moon Space with Symmetrical Free Return Properties, NASA TN D-1833, 1963
- [5] Hou X Y, Liu L. CMDA, 2011, 110: 71

Free Return Trajectories in Lunar Missions

HOU Xi-yun^{1,2} ZHAO Yu-hui^{1,2,3} LIU Lin^{1,2,3}

(1 School of Astronomy and Space Science, Nanjing University, Nanjing 210093)

(2 Institute of Space Environment and Astrodynamics, Nanjing University, Nanjing 210093)

(3 Beijing Aerospace Control Center, Beijing 100094)

ABSTRACT Four types of symmetric free return trajectories in the planar circular restricted three-body problem are computed and compared with each other. One of these four types is most applicable in practice. Concentrating ourselves on this special type of free return trajectory, the corresponding planar asymmetric cases are studied. Then the studies are generalized to the three-dimensional case. The restrictions on the inclination angles of the probe at the perilune are discussed. It is found that the maximum inclination at the perilune between the probe's orbit plane and the Moon's orbit plane is restricted by the heights of the perigee and the perilune of the free return trajectory. However, the inclination at the perigee is nearly not affected by them. At last, a strategy to design free return trajectories in the real Earth-Moon system is proposed. Some numerical simulations are done to show the feasibility of this orbit design strategy. The discussions from the planar case to the spatial case and then to the real force model can also be applied to the other three types of planar free return trajectories.

Key words celestial mechanics: three-body problem, restricted problem, methods: numerical