倾角函数递推公式的两种推导方法*

吴连大 [1] 汪宏波 [1,2,3†]

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210008)
(2 中国科学院空间目标与碎片观测重点实验室 南京 210008)
(3 北京航天飞行控制中心航天飞行动力学技术重点实验室 北京 100094)

摘要 推导了超几何级数两种重要的递推关系，并利用这些关系，推导出 Gooding 的倾角函数递推公式. 此外，证明基于 Jacobi 多项式的递推关系，也可导出该递推公式，并且推导过程比超几何级数的递推更加简单. 揭示了 Gooding 方法的实质是 Jacobi 多项式的递推.

关键词 **天体力学，方法：数值**
中图分类号： P 133; **文献标识码：** A

1 引言

文献 [1-2] 将倾角函数 $\bar{F}_{lm}^k(I)$ 表达为两个部分 V_{lm}^k 和 A_{lm}^k 的乘积

$$\bar{F}_{lm}^k(I) = V_{lm}^k A_{lm}^k \,, \tag{1}$$

并给出了 A_{lm}^k 的一个递推公式：

$$\begin{aligned}(l-1)(l-m)(l+k)A_{lm}^k(I) \quad &= \quad (2l-1)\{l(l-1)\cos I - mk\}A_{l-1,m}^k(I) - \\ &\quad\ l(l+m-1)(l-k-1)A_{l-2,m}^k(I)\,,\end{aligned} \tag{2}$$

其中 I 为轨道倾角， l 、 m 、 k 为倾角函数的 3 个指标.

由于该公式的诸多优点，特别是该公式的计算稳定性，得到了广泛的应用，甚至其计算精度已作为现在倾角函数的计算标准. 因此，研究该公式的来源和本质非常重要. Gooding[1] 在证明该公式时，略去了与倾角 I 无关的量，使用了 A_{lm}^k 的如下表达式：

$$A_{lm}^k = \frac{(l+m)!}{(l+k)!}\sum_j (-1)^j \begin{pmatrix} l+k \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l-k \\ l-m-j \end{pmatrix} c^{2l-\gamma} s^{\gamma}\,, \tag{3}$$

其中， $\gamma = m-k+2j, c = \cos(\frac{1}{2}I), s = \sin(\frac{1}{2}I)$， j 为求和指标.

Gooding[1] 曾简要指出该公式可以利用超几何级数的方法加以证明，但并没有详细地阐述. 倾角函数作为一个理论问题，我们不仅要知道如何使用 Gooding 方法计算倾角

2011-08-19 收到原稿， 2012-02-22 收到修改稿
* 国家自然科学基金项目 (11033009, 11003049) 资助及航天飞行动力学技术重点实验室开放课题资助
† whb@pmo.ac.cn

函数，还应当探究方法的本质. 本文分别用超几何级数和 Jacobi 多项式，推导了 Gooding 方法. 我们发现：使用 Jacobi 多项式递推方法可以更加简便地证明该递推公式.

2　A_{lm}^k 的表达

利用 $c^2 = \frac{1+\cos I}{2}, s^2 = \frac{1-\cos I}{2}$, 略去了与指标 l 无关的量， (3) 式的 A_{lm}^k 可表达为

$$A_{lm}^k = \frac{(l+m)!}{2^l(l+k)!}\sum_j \begin{pmatrix} l+k \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l-k \\ l-m-j \end{pmatrix}(1+\cos I)^{l-j}(\cos I - 1)^j \,, \tag{4}$$

我们首先在 $m \ge |k|$ 的情况讨论 A_{lm}^k 的表达式.　Jacobi 多项式的定义如下：

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n}\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n+\alpha \\ n-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+\beta \\ j \end{pmatrix}(x-1)^j(1+x)^{n-j} \,, \tag{5}$$

其中 n 、 α 、 β 是 Jacobi 多项式的 3 个指标. 与 A_{lm}^k 表达式比较后不难看出， A_{lm}^k 可利用 Jacobi 多项式表达为

$$A_{lm}^k = \frac{(l+m)!}{(l+k)!}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos I) \,, \tag{6}$$

其中 $n = l-m, n+\alpha = l-k, n+\beta = l+k$, 于是：

$$n = l-m, \quad \alpha = m-k, \quad \beta = m+k \,. \tag{7}$$

我们知道， Jacobi 多项式与超几何级数 F 有如下关系：

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos I) &= \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} F(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, s^2) \\ &= \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} \left(\tfrac{x+1}{2}\right)^n F(-n, -n-\beta, \alpha+1, -t^2) \,, \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $t = s/c$, 于是利用超几何级数，倾角函数 A_{lm}^k 可表达为以下两种形式：

$$A_{lm}^k = \frac{(l+m)!}{(l+k)!}\frac{(l-k)!}{(l-m)!}F(m-l, l+m+1, m-k+1, s^2) \,, \tag{9}$$

$$A_{lm}^k = \frac{(l+m)!}{(l+k)!}\frac{(l-k)!}{(l-m)!}c^{2(l-m)}F(m-l, -l-k, m-k+1, -t^2) \,, \tag{10}$$

这样我们就得到了倾角函数 A_{lm}^k 的 Jacobi 多项式 (6) 式，以及超几何级数的表达式 (9) ∼ (10) 式. 当然，这些表达式只有在 $m \ge |k|$ 时才成立.

3 利用超几何级数的递推关系的推导方法

3.1 超几何级数的递推关系

为了利用超几何级数推导 (2) 式，我们首先必须给出超几何级数的递推关系．因为 (3) 式是沿 l 方向递推，如果利用 (9) 式， A_{lm}^k 与超几何级数的关系为

$$\begin{aligned} A_{lm}^k &= \tfrac{(l+m)!}{(l+k)!}\tfrac{(l-k)!}{(l-m)!}F(a,b) \\ A_{l-1,m}^k &= \tfrac{(l+m)!}{(l+k)!}\tfrac{(l-k)!}{(l-m)!}\tfrac{(l+k)(l-m)}{(l+m)(l-k)}F(a+1,b-1) \\ A_{l-2,m}^k &= \tfrac{(l+m)!}{(l+k)!}\tfrac{(l-k)!}{(l-m)!}\tfrac{(l+k)(l-m)}{(l+m)(l-k)}\tfrac{(l+k-1)(l-m-1)}{(l+m-1)(l-k-1)}F(a+2,b-2) \end{aligned} . \tag{11}$$

我们需要推导的是超几何级数 $F(a,b),F(a+1,b-1),F(a+2,b-2)$ 之间的关系，利用 Gauss 给出的 15 个超几何级数的关系式，经过繁复的推导 (推导过程见附录), 以上 3 个超几何级数的关系式为

$$\begin{aligned} &(b-a-2)\{[(b-1)(c-b+1)+(c-a-2)a+ \\ &(b-a-1)(b-a-3)]-(b-a-1)(b-a-3)z\}F(a+1,b-1)- \\ &(a+1)(b-a-1)(c-b+1)F(a+2,b-2)- \\ &(b-1)(b-a-3)(c-a-1)F(a,b)=0\,, \end{aligned} \tag{12}$$

其中， $a=m-l,b=l+m+1,c=m-k+1,z=s^2$, 将系数中的 a 、 b 、 c 分别替换为 l 、 m 、 k, 即得

$$\begin{aligned} &\{(2l-1)[l(l-1)-mk]-2l(l-1)z\}F(a+1,b-1)- \\ &(m-l+1)l(1-l-k)F(a+2,b-2)- \\ &(l+m)(l-1)(l-k)F(a,b)=0\,. \end{aligned} \tag{13}$$

如果利用 (10) 式， A_{lm}^k 与超几何级数的关系为

$$\begin{aligned} A_{lm}^k &= \tfrac{(l+m)!}{(l+k)!}\tfrac{(l-k)!}{(l-m)!}c^{2(l-m)}F(a,b) \\ A_{l-1,m}^k &= \tfrac{(l+m)!}{(l+k)!}\tfrac{(l-k)!}{(l-m)!}c^{2(l-m)}\tfrac{(l+k)(l-m)}{(l+m)(l-k)c^2}F(a+1,b+1) \\ A_{l-2,m}^k &= \tfrac{(l+m)!}{(l+k)!}\tfrac{(l-k)!}{(l-m)!}\tfrac{(l+k)(l-m)}{(l+m)(l-k)c^4}\tfrac{(l+k-1)(l-m-1)}{(l+m-1)(l-k-1)}c^{2(l-m)}F(a+2,b+2) \end{aligned} . \tag{14}$$

我们需要推导的是超几何级数 $F(a,b),F(a+1,b+1),F(a+2,b+2)$ 之间的关系，可得

$$\begin{aligned} &-(c-a-b-2)\{[(c-2)(c-a-b-1)+2ab]- \\ &[(a+b+1)(c-a-b-1)+2ab]z\}F(a+1,b+1)+ \\ &(a+1)(c-a-b-1)(b+1)(1-z)^2F(a+2,b+2)+ \\ &(c-a-b-3)(c-a-1)(c-b-1)F(a,b)=0\,, \end{aligned} \tag{15}$$

具体推导过程见附录．其中， $a=m-l,b=-l-k,c=m-k+1,z=-t^2$. 将系数中的

a 、 b 、 c 分别替换为 l 、 m 、 k, 即得

$$\begin{aligned}&-(2l-1)\{[(m-k-1)(2l)-2(m-l)(l+k)]-\\&[(m-k+1-2l)(2l)-2(m-l)(l+k)]z\}F(a+1,b+1)+\\&(m-l+1)(2l)(1-l-k)(1-z)^2F(a+2,b+2)+\\&(2l-2)(l-k)(l+m)F(a,b)=0\,.\end{aligned}\tag{16}$$

3.2 递推公式的推导

将 (11) 式代入 (13) 式，或将 (14) 式代入 (16) 式，并将 s,c 化为 $\cos I$, 均可得到

$$\begin{aligned}(l-1)(l+k)(l-m)A_{lm}^k \;&=\; (2l-1)(l(l-1)\cos I-km)A_{l-1,m}^k-\\&\quad\; l(l+m-1)(l-k-1)A_{l-2,m}^k\,,\end{aligned}\tag{17}$$

这说明：倾角函数不管采用 (9) 式，还是采用 (10) 式表达为超几何级数，均可推导超几何级数的递推关系，从而导出倾角函数的递推公式．只是 (12) 式和 (15) 式的推导比较麻烦，尤其是需要约去公共因子，并表达为比较对称的形式．但是这些关系式一旦导出，证明 Gooding 的递推公式十分简单，而且我们相信这些超几何级数的递推公式还会有其他用处.

4　利用 Jacobi 多项式递推关系的推导方法

根据 Jacobi 多项式的递推关系：

$$\begin{aligned}&2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\=\;&(2n+\alpha+\beta+1)[(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)x+(\alpha^2-\beta^2)]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-\\&2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\,,\end{aligned}\tag{18}$$

令 $x=\cos I$, 再令系数中的 $n=l-m,\alpha=m-k,\beta=m+k$, 可得

$$\begin{aligned}&l(l-m+1)(l+m+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\=\;&(2l+1)[l(l+1)x-mk]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-(l-k)(l+k)(l+1)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\,,\end{aligned}\tag{19}$$

为了与 Gooding 的递推公式比较，将 l 换为 $(l-1)$

$$\begin{aligned}&(l-1)(l-m)(l+m)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\\=\;&(2l-1)[l(l-1)x-mk]P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)-l(l-k-1)(l+k-1)P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x)\,.\end{aligned}\tag{20}$$

根据 (6) 式，有：

$$\begin{aligned}&P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos I)=\tfrac{(l+k)!}{(l+m)!}A_{lm}^k\\&P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(\cos I)=\tfrac{(l+k)!}{(l+m)!}\tfrac{(l-m)}{(l+k)}A_{l-1,m}^k\\&P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(\cos I)=\tfrac{(l+k-2)!}{(l+m-2)!}\tfrac{(l+m)(l+m-1)}{(l+k)(l+k-1)}A_{l-2,m}^k\end{aligned}\quad,\tag{21}$$

将 (21) 式代入 (20) 式，可得

$$\begin{aligned}&(l-1)(l-m)(l+k)A_{lm}^k\\=\;&(2l-1)[l(l-1)\cos I-mk]A_{l-1,m}^k-l(l-k-1)(l+m-1)A_{l-2,m}^k\,.\end{aligned}\tag{22}$$

5 进一步讨论

前面我们在 $m \geq |k|$ 的情况下证明了递推公式 (2) 式，这还不全面．我们还要研究 $m < -k$ $(k \leq 0)$ 和 $m < k$ $(k \geq 0)$ 的两种情况，考察 (4) 式，将求和上下限写完整．当 $m < -k$ $(k \leq 0)$ 时， $l-m > l+k$, 即有

$$\begin{aligned} A_{lm}^{k} &= \tfrac{(l+m)!}{2^l(l+k)!}\sum_{j=0}^{l+k}\begin{pmatrix} l+k \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l-k \\ l-m-j \end{pmatrix}(1+\cos I)^{l-j}(\cos I-1)^{j} \\ &= \tfrac{(l-k)!}{2^l(l-m)!}\sum_{j=0}^{l+k}\begin{pmatrix} l-m \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l+m \\ l+k-j \end{pmatrix}(x-1)^{j}(1+x)^{l-j}\,, \end{aligned} \tag{23}$$

于是

$$A_{lm}^{k} = \frac{(l-k)!}{(l-m)!}P_{l+k}^{(m-k,-k-m)}(x)\,. \tag{24}$$

同理，在 $m < k$ $(k \geq 0)$ 时，下限变为 $k-m$, 作变换 $j = k-m+q$, 略去与 l 无关的量，有

$$\begin{aligned} A_{lm}^{k} &= \tfrac{(l+m)!}{2^l(l+k)!}\sum_{q=0}^{l-k}\begin{pmatrix} l+k \\ l+m-q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l-k \\ q \end{pmatrix}(1+\cos I)^{l-q}(\cos I-1)^{q} \\ &= \tfrac{(l-k)!}{2^l(l-m)!}\sum_{q=0}^{l-k}\begin{pmatrix} l+m \\ q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l-m \\ l-k-q \end{pmatrix}(x-1)^{q}(1+x)^{l-q}\,, \end{aligned} \tag{25}$$

其中 q 是求和指标．于是

$$A_{lm}^{k} = \frac{(l-k)!}{(l-m)!}P_{l-k}^{(k-m,k+m)}(x)\,. \tag{26}$$

不难验证：按照 (24) 式和 (26) 式的关系以及相应 n 、 α 、 β, 进行与 (19)∼ (22) 式的推导过程，即可证明 (22) 式．也就是说， (22) 式对于所有情况均成立， Gooding 的递推公式是普适的．

同样，我们利用 (8) 、 (24) 、 (26) 式，可将 A_{lm}^{k} 表达为超几何级数的形式，利用这些表达式以及超几何级数的递推公式 (12) 式和 (15) 式，均可推导出 Gooding 的递推公式，这里不再重复列出推导过程.

6 结论

本文从超几何级数的递推关系以及 Jacobi 多项式的递推关系出发，完成了 Gooding 递推公式的推导过程，并指出了成立的条件．具体有以下结果：

(1) 推导了超几何级数的重要的递推关系 (12) 式和 (15) 式，并利用这些关系，当 $m \geq k$ 和 $m < k$ 时均可导出 Gooding 给出的倾角函数递推公式;

(2) 利用 Jacobi 多项式的递推关系，当 $m \geq k$ 和 $m < k$ 时也均可导出 Gooding 给出的倾角函数递推公式，而且这种推导十分简单，说明 Jacobi 多项式对倾角函数的计算十分重要;

(3) 据此，我们认为 Gooding 的递推公式的实质就是 Jacobi 多项式递推关系.

附录　超几何级数递推公式的推导

在该公式推导中，用到 4 个 Gauss 递推公式：

$$\begin{aligned}&[c-2a-(b-a)z]F+a(1-z)F(a+1)-(c-a)F(a-1)=0(\mathrm{G1})\\&(b-a)F+aF(a+1)-bF(b+1)=0(\mathrm{G2})\\&(c-a-b)F+a(1-z)F(a+1)-(c-b)F(b-1)=0(\mathrm{G3})\\&[c-2b+(b-a)z]F+b(1-z)F(b+1)-(c-b)F(b-1)=0(\mathrm{G4})\end{aligned}\quad , \tag{27}$$

1. (12) 式的推导

(12) 式是 $F(a,b)$ 、 $F(a+1,b-1)$ 、 $F(a+2,b-2)$ 之间的递推关系，可推导如下：利用 Gauss 递推公式 (G1) 式，作指标变换 $a\Rightarrow a+1,b\Rightarrow b-2$, 得

$$[c-2a-2-(b-a-3)z]F(a+1,b-2)+(a+1)(1-z)F(a+2,b-2)-(c-a-1)F(b-2)=0\,, \tag{28}$$

利用 Gauss 递推公式 (G2) 式，作指标变换 $a\Rightarrow a+1$, $b\Rightarrow b-2$, 得

$$(b-a-3)F(a+1,b-2)+(a+1)F(a+2,b-2)-(b-2)F(a+1,b-1)=0\,. \tag{29}$$

(28)∼ (29) 式消去 $F(a+1,b-2)$ 得

$$\begin{aligned}&[c-2a-2-(b-a-3)z](b-2)F(a+1,b-1)+\\&[b+a-c-1](a+1)F(a+2,b-2)-(c-a-1)(b-a-3)F(b-2)=0\,.\end{aligned} \tag{30}$$

利用 Gauss 递推公式 (G3) 式，作指标变换 $b\Rightarrow b-1$ 得

$$(c-a-b+1)F(b-1)+a(1-z)F(a+1,b-1)-(c-b+1)F(b-2)=0\,, \tag{31}$$

再利用 Gauss 递推公式 (G2) 式，作指标变换 $b\Rightarrow b-1$ 得

$$(b-a-1)F(b-1)+aF(a+1,b-1)-(b-1)F\,(a,b)=0\,, \tag{32}$$

(31) ∼ (32) 式消去 $F(b-1)$, 得

$$\begin{aligned}&(c-a-b+1)(b-1)F\,(a,b)+a[(2b-c-2)-(b-a-1)z]F(a+1,b-1)-\\&(b-a-1)(c-b+1)F(b-2)=0\,.\end{aligned} \tag{33}$$

(30) 式和 (33) 式消去 $F(b-2)$, 即得递推公式

$$\begin{aligned}
&[(c-2a-2)(b-2)(b-a-1)(c-b+1)- \\
&(2b-c-2)(b-a-3)(c-a-1)a]F(a+1,b-1)+ \\
&[(c-a-1)a-(b-2)(c-b+1)](b-a-1)(b-a-3)zF(a+1,b-1)- \\
&(a+1)(b-a-1)(c-b+1)(c-a-b+1)F(a+2,b-2)- \\
&(b-1)(b-a-3)(c-a-1)(c-a-b+1)F\,(a,b)=0\,.
\end{aligned} \tag{34}$$

将 (34) 式中 $F(a+1,b-1)$ 的系数整理

$$\begin{aligned}
&[(c-2a-2)(b-2)(b-a-1)(c-b+1)-(2b-c-2)(b-a-3)(c-a-1)a] \\
&=(c-a-b+1)(b-a-2)\{[(b-1)(c-b+1)+(c-a-2)a]+(b-a-3)(b-a-1)\}\,,
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
&[(c-a-1)a-(b-2)(c-b+1)](b-a-1)(b-a-3)z \\
&=-(c-a-b+1)(b-a-2)(b-a-1)(b-a-3)z\,,
\end{aligned} \tag{36}$$

(35) 式和 (36) 式代入 (34) 式，即得

$$\begin{aligned}
&(c-a-b+1)(b-a-2)\{[(b-1)(c-b+1)+(c-a-2)a]+ \\
&(b-a-3)(b-a-1)\}F(a+1,b-1)- \\
&(c-a-b+1)(b-a-2)(b-a-1)(b-a-3)zF(a+1,b-1)- \\
&(a+1)(b-a-1)(c-b+1)(c-a-b+1)F(a+2,b-2)- \\
&(b-1)(b-a-3)(c-a-1)(c-a-b+1)F\,(a,b)=0\,,
\end{aligned} \tag{37}$$

约去公共因子 $(c-a-b+1)$, 即得我们求证的公式

$$\begin{aligned}
&(b-a-2)\{[(b-1)(c-b+1)+(c-a-2)a+ \\
&(b-a-1)(b-a-3)]-(b-a-1)(b-a-3)z\}F(a+1,b-1)- \\
&(a+1)(b-a-1)(c-b+1)F(a+2,b-2)- \\
&(b-1)(b-a-3)(c-a-1)F\,(a,b)=0\,.
\end{aligned} \tag{38}$$

2. (15) 式的推导

(15) 式是 $F(a,b)$ 、 $F(a+1,b+1)$ 、 $F(a+2,b+2)$ 之间的关系，可推导如下：根据 Gauss 公式 (G1) 式，作指标变换 $a\Rightarrow a+1, b\Rightarrow b+2$, 得

$$[c-2a-2-(b-a+1)z]F(a+1,b+2)+(a+1)(1-z)F(a+2,b+2)-(c-a-1)F(b+2)=0\,, \tag{39}$$

根据 Gauss 公式 (G3) 式，作指标变换 $a\Rightarrow a+1, b\Rightarrow b+2$, 得

$$(c-a-b-3)F(a+1,b+2)+(a+1)(1-z)F(a+2,b+2)-(c-b-2)F(a+1,b+1)=0\,, \tag{40}$$

(40) 式代入 (39) 式，可得

$$\begin{aligned}&[c-2a-2+(a-b-1)z](c-b-2)F(a+1,b+1)+\\&(a-b-1)(a+1)(1-z)^2F(a+2,b+2)-(c-a-b-3)(c-a-1)F(b+2)=0\,.\end{aligned}\tag{41}$$

根据 Gauss 公式 (G4) 式，作指标变换 $b\Rightarrow b+1$, 得

$$[c-2b-2+(b+1-a)z]F(b+1)+(b+1)(1-z)F(b+2)-(c-b-1)F(a,b)=0\,,\tag{42}$$

再由 Gauss 公式 (G3) 式，作指标变换 $b\Rightarrow b+1$, 得

$$(c-a-b-1)F(b+1)+a(1-z)F(a+1,b+1)-(c-b-1)F(a,b)=0\,,\tag{43}$$

(43) 式代入 (42) 式可得

$$\begin{aligned}&(a-b-1)(c-b-1)F(a,b)-[c-2b-2+(b+1-a)z]aF(a+1,b+1)+\\&(c-a-b-1)(b+1)F(b+2)=0\,.\end{aligned}\tag{44}$$

(44) 式代入 (41) 式，得

$$\begin{aligned}&[(c-2a-2)(c-b-2)(c-a-b-1)(b+1)-\\&(c-2b-2)a(c-a-b-3)(c-a-1)]F(a+1,b+1)+\\&(a-b-1)[(c-b-2)(c-a-b-1)(b+1)+\\&a(c-a-b-3)(c-a-1)]zF(a+1,b+1)+\\&(a-b-1)(a+1)(c-a-b-1)(b+1)(1-z)^2F(a+2,b+2)+\\&(a-b-1)(c-a-b-3)(c-a-1)(c-b-1)F(a,b)=0\,,\end{aligned}\tag{45}$$

将 $F(a+1,b+1)$ 的系数整理，约去 $(a-b-1)$ 的因子，即得我们求证的结果

$$\begin{aligned}&-(c-a-b-2)\{[(c-2)(c-a-b-1)+2ab]-\\&[(a+b+1)(c-a-b-1)+2ab]z\}F(a+1,b+1)+\\&(a+1)(c-a-b-1)(b+1)(1-z)^2F(a+2,b+2)+\\&(c-a-b-3)(c-a-1)(c-b-1)F\,(a,b)=0\,.\end{aligned}\tag{46}$$

参 考 文 献

[1] Gooding R H. CeMec, 1971, 4: 91
[2] Gooding R H, Wagner C A. CeMDA, 2008, 101: 247

Two Methods for Deriving the Recursion Formula of Inclination Function

WU Lian-da[1] WANG Hong-bo[1,2,3]

(1 *Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008*)

(2 *Key Laboratory of Space Object and Debris Observation, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008*)

(3 *Key Laboratory of Space Flight Dynamics Technology, Beijing Aerospace Control Center, Beijing 100094*)

ABSTRACT In analytical theories of celestial mechanics, the perturbation function need be expanded as a function of orbit elements. There are two frequently-used functions. One is the inclination function, another is the Hansen coefficient. How to calculate the inclination function as well as its stability and accuracy are very elementary and important problems in satellite dynamics. The method for deriving the recursion formula of Gooding's inclination function is based on two hyper-geometric series relations. Then it is proved that the Gooding formula can also be deduced by the recursion relation of Jacobi polynomial. Comparing with the hyper-geometric series, the recursion process based on Jacobi polynomial is much simpler, indicating that the Gooding method is the recursion of Jacobi polynomial in essence.

Key words celestial mechanics, methods: numerical