

对高能粒子扩散理论 NLGC-E 的系数研究*

朱玉婷^{1†} 秦 刚² 乐贵明^{1,3‡}

(1 中国气象局中国气象科学研究院 北京 100081)

(2 中国科学院空间科学与应用研究中心 北京 100190)

(3 中国气象局国家空间天气监测预警中心 北京 100081)

摘要 带电粒子的扩散机制一直被认为是天体物理学的一个很重要的问题. 最近, Matthaeus 等人在 2003 年得出了带电粒子垂直扩散的非线性引导中心理论 (NLGC), 该理论采用平行扩散系数作为一个输入, 这个 NLGC 理论与数值模拟结果符合得比较好. 另外, Qin 在 2007 年得到了非线性的平行扩散理论 (NLPA), 这个理论如果与 NLGC 理论联立可以得到扩展的非线性引导中心理论 (NLGC-E), 该理论是两个积分方程的形式并且可以用来同时求出平行和垂直扩散系数. NLGC 理论中有一个系数 a^2 , 通过与数值模拟结果比较选定最佳值为 1/3. 尝试改变 NLGC-E 中的系数 a^2 , 确定与模拟结果吻合最好的系数值.

关键词 星际介质; 宇宙射线; 宇宙学; 理论

中图分类号: P 142; **文献标识码:** A

1 引言

高能带电粒子在磁场扰动下的传播是天体物理学领域中一个长期悬而未决的基础性问题. 早期提出的经典准线性理论 (QLT)^[1] 首先讨论了带电粒子在平行于和垂直于大尺度平均磁场方向的传播行为, 并在物理上给出了导致带电粒子平行和垂直扩散的原因. QLT 理论应用了磁湍流的平板模型, 利用该理论可以分开推导出平行和垂直扩散系数的表达式^[1]. Palmer^[2] 和 Shalchi 等^[3] 随后比较了平行平均自由程的 QLT 理论预测值及其在日球层的观测值, 发现理论预测值与观测值之间存在较大的差异. 在此基础上, Bieber 等^[4] 认为一个合成磁场扰动模型可以使理论预测值和观测值达成一致.

QLT 理论认为带电粒子的垂直扩散是通过这些粒子沿着磁场线运动的趋势来控制的, 其中带电粒子在时间和空间上都经历随机行走过程. 场线随机行走理论 (FLRW)^[5] 是将 QLT 理论和合成磁场扰动模型结合起来计算垂直扩散系数. FLRW 理论所产生的问题逐渐被学者们提了出来, 特别是适用性问题. 对于低能量带电粒子的传播, FLRW

2012-03-23 收到原稿, 2012-04-25 收到修改稿

* 国家自然科学基金项目 (41074132) 资助

† zhuyutingting@gmail.com

‡ legm@cma.gov.cn

理论^[6-8]给出的理论结果不符合数值模拟结果. Bieber 和 Matthaeus 又提出新的理论 (BAM)^[9], 其中垂直扩散系数在低能量区间的表达式与 FLRW 理论中的不同. 然而, BAM 理论也不能很好地吻合数值模拟结果, 它低估了模拟结果. 所以综合来说, 以上这些理论都不能在整个能量范围内与模拟结果相一致.

在 2003 年 Matthaeus 等^[10]提出非线性引导中心理论 (NLGC), 该理论是第 1 个能够在合成磁场扰动模型下给出近似符合数值模拟结果的理论. Qin^[11]在 2007 年应用推导 NLGC 理论时使用相似的近似方法 (如计算投掷角扩散系数的方法), 并且考虑了非线性的作用, 进而提出了一个非线性平行扩散理论 (NLPA). 通过合并 NLGC 和 NLPA 这两种理论可以获得扩展的非线性引导中心理论 (NLGC-E), 由 NLGC-E 理论可以同时确定垂直和平行扩散系数. NLGC-E 理论能给出与模拟结果相近似的结果, 因此它是一个很有潜力的关于宇宙线传播的理论模型. 但在推导 NLGC 理论时引入了一个参数 a^2 , 当时根据与数值模拟结果比对取为 $1/3$, 这个参数也引入 NLGC-E 理论中. 为了确定 $1/3$ 是不是 NLGC-E 理论与模拟结果吻合最好的参数 a^2 值, 本文将要尝试改变参数 a^2 的大小, 并且将数值结果与先前的数值模拟结果进行对比.

2 理论模型

在通常情况下, 对于足够长的时间和足够大的空间尺度, 粒子的传播过程可以被描述为扩散的形式. 在日球层磁场里粒子的传播是通过扩散张量来控制的, 表示为

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_{\perp} & \kappa_A & 0 \\ -\kappa_A & \kappa_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中对角线元素 $\kappa_{\parallel}$ 和 $\kappa_{\perp}$ 分别描述了带电粒子沿平行于和垂直于平均磁场方向的扩散, 非对角线反对称元素 κ_A 描述了带电粒子在一个非齐次磁场里受梯度和曲率漂移的影响. 通过假设磁场线是分开扩散的, 带电粒子的轨迹部分是去相关的且满足轴对称的高斯分布, 带电粒子的位移分布是扩散的, 我们可以将 NLGC-E 理论表达为如下形式:

$$\kappa_{xx} = \frac{a^2 v^2}{3B_0^2} \int d^3 \mathbf{k} \frac{S_{xx}(\mathbf{k})}{v/\lambda_{\parallel} + k_{\perp}^2 \kappa_{xx} + k_{\parallel}^2 \kappa_{zz}}, \quad (2)$$

$$\lambda_{\parallel} = \left(2a_x \frac{\Omega^2}{v} \int d^3 \mathbf{k} \frac{S_{xx}(\mathbf{k})}{B_0^2} \frac{v/\lambda_{\parallel} + k_{\perp}^2 \kappa_{xx} + k_{\parallel}^2 \kappa_{zz} + \gamma(\mathbf{k})}{\Omega^2 + [v/\lambda_{\parallel} + k_{\perp}^2 \kappa_{xx} + k_{\parallel}^2 \kappa_{zz} + \gamma(\mathbf{k})]^2} \right)^{-1}, \quad (3)$$

其中 $\kappa_{xx}(\kappa_{\perp})$ 和 $\kappa_{zz}(\kappa_{\parallel})$ 分别表示垂直和平行扩散系数, v 是带电粒子的速度, Ω 为回旋频率, B_0 是平均磁场强度, $\lambda_{\parallel} = \lambda_{zz}$ 是平行于平均磁场的平均自由程, $k_{\perp}$ 是垂直于平均磁场的波数, $k_{\parallel} = k_z$ 是平行于平均磁场的波数, $\gamma(\mathbf{k})$ 表示带电粒子的扩散随时间的变化, a_x 的表达式为

$$a_x = \sqrt{\frac{E_s}{[\xi/(1+\xi)](1/\tilde{b}) + \tilde{b}\xi/2}}, \quad (4)$$

其中定义 $r = 2\pi r_L / \lambda_c$, $\tilde{b} = b/B_0$, $\xi = r/\tilde{b}$, $E_s = E_{\text{slab}}/(E_{\text{slab}} + E_{2D})$, r_L 为粒子回旋半径, λ_c 是平板扰动的相关尺度, b 表示为在合成磁场扰动里平均能量密度, E_{slab} 为磁湍流平板模型的扰动能量, E_{2D} 为 2D 模型的磁场扰动能量. 方程 (2) 中的参数 a^2 是一个与回旋中心速度有关的常数. 在方程 (2) 和 (3) 中也对磁湍流做了简单的假设, 其中湍流的能谱函数由 $S_{xx}(\mathbf{k})$ 表示. 我们可以假设在一个合成磁场扰动的模型下垂直速度自相关是与比率 $\langle b_{2D}^2 \rangle / \langle b_{\text{slab}}^2 \rangle = 2/8$ 成正比的, 其中 $\langle b_{\text{slab}}^2 \rangle$ 和 $\langle b_{2D}^2 \rangle$ 分别表示在平板和 2D 磁场扰动里所有的平均能量密度.

3 NLGC-E 不同系数 a^2 的结果与数值模拟结果的比较

为了数学上的简化, 我们使用合成的平板/2D 磁场扰动模型来描述太阳风的真实扰动, 这是一个根据理论和观测值验证得到的近似模型. 这个合成磁场扰动模型是叠加了一个纯平板和一个纯 2D 的模型, 平板/2D 这两部分磁场扰动模型都忽略了较小的平行方差, 并且扰动的波矢量分别仅包括纯平行或纯垂直于平均磁场的扰动. 因此, 我们可以把总的扰动能谱函数表达为

$$S_{xx}(\mathbf{k}) = S_{xx}^{2D}(k_{\perp}) \frac{2k_y^2}{\pi k_{\perp}^3} \delta(k_z) + S_{xx}^{\text{slab}}(k_z) \frac{1}{2\pi k_{\perp}} \delta(k_{\perp}), \quad (5)$$

$$S_{xx}^{2D}(k_{\perp}) = c(\tau) \lambda_{2D} \langle b_{2D}^2 \rangle (1 + k_{\perp}^2 \lambda_{2D}^2)^{-\tau}, \quad (6)$$

$$S_{xx}^{\text{slab}}(k_z) = c(\tau) \lambda_{\text{slab}} \langle b_{\text{slab}}^2 \rangle (1 + k_z^2 \lambda_{\text{slab}}^2)^{-\tau}, \quad (7)$$

$c(\tau) = (2\pi^{1/2})^{-1} \Gamma(\tau) / \Gamma(\tau - 1/2)$, 为了保证 NLGC-E 理论的精确性, 对于静态的 $\gamma(\mathbf{k}) = 0$ 的合成磁场扰动模型的两个部分, 我们定义谱指数 $\tau = 5/6$. 平板和 2D 磁场扰动谱在 z 轴和 x 轴方向的弯曲尺度, 分别记为 λ_{slab} 和 λ_{2D} .

考虑到垂直和平行平均自由程 $\lambda_{xx} = 3\kappa_{xx}/v$ 和 $\lambda_{zz} = 3\kappa_{zz}/v$, 通过代入求解参与的方程 (2)、(5)、(6) 和 (7) 我们可以得到垂直平均自由程的表达式:

$$\begin{aligned} \lambda_{xx} = & 2a^2 c(\tau) \lambda_{\parallel} \lambda_{2D} \frac{\langle b_{2D}^2 \rangle}{B_0^2} \int \frac{(1 + k_{\perp}^2 \lambda_{2D}^2)^{-5/6}}{1 + k_{\perp}^2 \lambda_{xx} \lambda_{\parallel} / 3} dk_{\perp} + \\ & a^2 c(\tau) \lambda_{\parallel} \lambda_{\text{slab}} \frac{\langle b_{\text{slab}}^2 \rangle}{B_0^2} \int \frac{(1 + k_z^2 \lambda_{\text{slab}}^2)^{-5/6}}{1 + k_z^2 \lambda_{\parallel}^2 / 3} dk_z. \end{aligned} \quad (8)$$

通过代入求解参与的方程 (3)、(5)、(6) 和 (7), 我们可以得到平行平均自由程的表达式:

$$\begin{aligned} \lambda_{zz}^{-1} = & 4a_x c(\tau) \lambda_{\parallel} \lambda_{2D} \frac{\langle b_{2D}^2 \rangle}{B_0^2} \frac{\Omega^2}{v^2} \int \frac{(1 + k_{\perp}^2 \lambda_{2D}^2)^{-5/6} (1 + k_{\perp}^2 \lambda_{xx} \lambda_{\parallel} / 3)}{\frac{\Omega^2 \lambda_{\parallel}^2}{v^2} + (1 + k_{\perp}^2 \lambda_{xx} \lambda_{\parallel} / 3)^2} dk_{\perp} + \\ & 2a_x c(\tau) \lambda_{\parallel} \lambda_{\text{slab}} \frac{\langle b_{\text{slab}}^2 \rangle}{B_0^2} \frac{\Omega^2}{v^2} \int \frac{(1 + k_z^2 \lambda_{\text{slab}}^2)^{-5/6} (1 + k_z^2 \lambda_{\parallel}^2 / 3)}{\frac{\Omega^2 \lambda_{\parallel}^2}{v^2} + (1 + k_z^2 \lambda_{\parallel}^2 / 3)^2} dk_z. \end{aligned} \quad (9)$$

以上表达式中假设平板和 2D 两种磁场扰动都存在. 为了保证扩散的垂直传播, 因为强的横向磁场复杂性, 我们设定参数 $\lambda_{2D} = 0.1\lambda_{slab}$, 平板扰动的相关尺度 $\lambda_c = 2\pi c(\tau)\lambda_{slab}$. 如果下面没有特别提到, 我们在模拟中通过比值 $E_{slab}/E_{tot} = E_{slab}/(E_{slab} + E_{2D})$ 来控制不同磁场扰动成分的能量大小. 因为在具有强的横向磁场复杂性的磁湍流中, 可以保证高能粒子具有经典的横向扩散传播. 我们利用迭代法, 计算不同的 a^2 值, 将 NLGC-E 与 Qin^[11] 的数值模拟结果的垂直和平行平均自由程相比较, 如图 1 所示.

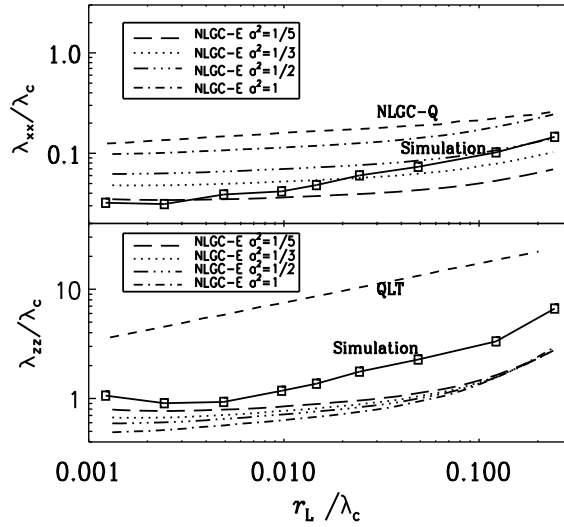


图 1 上图为垂直平均自由程与 r_L/λ_c 的关系, 下图为平行平均自由程与 r_L/λ_c 的关系. 设定 $E_{slab}: E_{2D} = 20: 80$ 和 $b/B_0 = 1$.

Fig. 1 Perpendicular (top) and parallel (bottom) mean free paths as a function of r_L/λ_c , with $E_{slab}: E_{2D} = 20: 80$ and $b/B_0 = 1$.

图 1 中显示了其中 $a^2 = 1/5$ 的 NLGC-E 的解 (长虚线), $a^2 = 1/3$ 的 NLGC-E 的解 (点线), $a^2 = 1/2$ 的 NLGC-E 的解 (点点虚线), $a^2 = 1$ 的 NLGC-E 的解 (点虚线), 分别与模拟结果 (实线) 和其他几种理论解进行比较. 这几种理论分别为下面图中的准线性理论 QLT (虚线) 和上面图中的 NLGC-Q (虚线). 本文定义 NLGC-Q 理论是用 QLT 理论得到的平行平均自由程作为输入来得到 NLGC 理论的垂直平均自由程的结果的理论. 图中的横轴体现了质子刚度的大小, 考虑到太阳风在 1 AU 处扰动时的参数 $\lambda_c = 0.03$ AU 和 $B_0 = 5$ nT, 我们采用同样的参数进行模拟得到图 1. 从图中可以看出, 在强磁场扰动下 $b/B_0 = 1$ 和 $E_{slab}: E_{2D} = 20: 80$, 垂直和平行平均自由程为质子刚度的函数, 随着 r_L/λ_c 的变化而变化. 在横轴所示的质子刚度范围内, 对于强磁场扰动下的垂直扩散, NLGC-E 的结果都要比 NLGC-Q 的结果与观测得到的模拟结果符合得更好; 而对于平行扩散 NLGC-E 的结果与 QLT 的结果差别很大, 而且都要比 QLT 的结果更加好地反映变化趋势. 从图 1 上面的图中可知, 当取值 $a^2 = 1/5$ 时, 在低能区符合较好, 当取值 $a^2 = 1/2$ 时, 在高中能区符合较好, 但在能量的中间区间, 取值为 $a^2 = 1/3$ 时理论值和数值模拟值符合得较好; 从图 1 下面的图可知, a^2 的值越小, 符合得越好; 因为是应用迭

代法同时得到的垂直和平行平均自由程, 所以综合考虑选取系数值 $a^2 = 1/3$ 是比较合理的值.

4 结果分析

本文利用合成磁场扰动下的能谱函数, 求解用 NLGC 和 NLPA 理论联立得到的描述高能粒子扩散的 NLGC-E 理论, 利用迭代法, 可以同时得到垂直平均自由程和平行平均自由程, 并改变积分方程中的常系数 a^2 的值, 比较了理论解和模拟解的结果, 可以得到如下结论:

(1) 对于垂直扩散来说, 当取值 $a^2 = 1/5$ 时, 在低能区符合较好, 当取值 $a^2 = 1/2$ 时, 在高能区符合较好, 但在能量的中间区间, 取值为 $a^2 = 1/3$ 时理论值和数值模拟值符合得较好; 对于平行扩散来说, a^2 的值越小, 符合得越好; 因为是应用迭代法同时得到的垂直和平行平均自由程, 所以综合考虑选取系数值 $a^2 = 1/3$ 是比较合理的值.

(2) 由于我们这里讨论的条件符合典型的太阳风条件, 与 1 AU 处的观测相匹配, 所以对于描述宇宙线在日球层中的调制和带电粒子在激波处的加速有重要意义.

带电粒子的扩散机制理论的研究有助于我们更好地理解太阳高能粒子在行星际空间的扩散. 本文计算得到的垂直和平行平均自由程与观测结果还存在一定的误差, 因此, 还需要不断地改进扩散传播的理论来解释观测的结果. 本文中我们对积分方程中常系数的值进行了尝试性改变, 从比较中可以证实选取 $a^2 = 1/3$ 是比较合理的值, 而且是影响 NLGC-E 理论结果的关键参数. 接下来我们将继续研究 NLGC-E 理论, 以期能够帮助我们了解在实际扰动谱中的观测问题.

致谢 感谢刘子谦、孟伟娟给予的帮助.

参 考 文 献

- [1] Jokipii J R. ApJ, 1966, 146: 480
- [2] Palmer I D. RvGeo, 1982, 20: 335
- [3] Shalchi A, Bieber J W, Matthaeus W H, et al. ApJ, 2006, 642: 230
- [4] Bieber J W, Matthaeus W H, Smith C W, et al. ApJ, 1994, 420: 294
- [5] Matthaeus W H, Gray P C, Pontius D H, et al. PhRvL, 1995, 75: 2136
- [6] Qin G, Matthaeus W H, Bieber J W. ApJ, 2002, 578: L117
- [7] Qin G, Matthaeus W H, Bieber J W. GeoRL, 2002, 29: 1048
- [8] Qin G. Charged Particle Transport in Magnetic Field Turbulence and Study of Trim Simulation and SSX Experiment. Newark: University of Delaware, 2002
- [9] Bieber J W, Matthaeus W H. ApJ, 1997, 485: 655
- [10] Matthaeus W H, Qin G, Bieber J W, et al. ApJ, 2003, 590: L53
- [11] Qin G. ApJ, 2007, 656: 217

A Study of the Coefficient a^2 in the Extended Nonlinear Guiding Center Theory

ZHU Yu-ting¹ QIN Gang² LE Gui-ming^{1,3}

(1 *Chinese Academy of Meteorological Sciences, China Meteorological Administration, Beijing 100081*)

(2 *Center for Space Science and Applied Research, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190*)

(3 *National Center for Space Weather, China Meteorological Administration, Beijing 100081*)

ABSTRACT The diffusion mechanism of charged particles is one of the very important problems in astrophysics. Recently, Matthaeus et al. (2003) developed a nonlinear guiding center theory (NLGC) of the perpendicular diffusion of charged energetic particles with the parallel diffusion coefficient as an input. This theory agrees with the numerical simulations very well. In addition, Qin (2007) developed a nonlinear parallel diffusion theory (NLPA) following the idea of NLGC. Combined the NLGC with the NLPA, a new theory, NLGC-E is developed to solve the parallel and perpendicular diffusion coefficients simultaneously. In the NLGC, there is a coefficient a^2 taken as 1/3 to best agree with the numerical simulations. In this work we have tried different values of a^2 to obtain the best one for the NLGC-E to agree with the numerical simulations.

Key words ISM: cosmic rays, cosmology: theory