

摄动分析法在小推力轨道优化中的应用*

胡寿村^{1,2,3†} 赵玉晖^{1,2} 季江徽^{1,2} 侯锡云^{4,5}

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210008)

(2 中国科学院行星科学重点实验室 南京 210008)

(3 中国科学院大学 北京 100049)

(4 南京大学天文与空间科学学院 南京 210093)

(5 南京大学现代天文与天体物理教育部重点实验室 南京 210093)

摘要 在对太阳系近地小行星的多目标多任务探测中, 从大量小行星中快速筛选出可到达目标小行星是小推力轨道设计中一直在努力解决的问题. 考虑了小推力作用下的探测器在行星际空间中的轨道运动, 通过借鉴天体力学中摄动分析法的思想将小推力作为摄动力来考虑, 给出了1阶意义下给定时间内两条开普勒轨道在小推力作用下得以转移成功的必要条件. 该条件形式上为几个始末轨道根数差的简单组合, 计算量极小, 可以用来迅速剔除许多无法在给定时间和小推力作用下直接到达的小行星, 数值结果验证了近地小行星探测情况下该条件的有效性.

关键词 天体力学: 摄动理论, 天体力学: 人造卫星运动, 行星与卫星: 探测, 小行星: 普通, 方法: 解析

中图分类号: P133; **文献标识码:** A

1 引言

小行星是太阳系形成过程中的残留物质, 保留了太阳系形成之初的许多重要信息, 因此对小行星的物质成分、内部结构、轨道分布和形成演化等开展研究对深入了解太阳系形成乃至地球生命的起源具有重要科学意义^[1-2]. 特别是对于对地球有潜在威胁的近地小行星开展深入研究具有更加现实的意义. 然而由于小行星个头较小, 且望远镜口径存在限制, 难以对小行星形貌开展细致观测, 最好的方式就是发射探测器对其进行近距离探测.

在过去几十年的深空探测任务中, 大部分采用的是大推力化学推进方式将探测器送达目标行星. 相比之下, 离子电推进方式由于比冲高(是化学推进的几十倍), 应用于深空

2014-06-06收到原稿, 2014-09-16收到修改稿

*国家自然科学基金项目(11273068、11473073、11303103)、江苏省自然科学基金项目(BK20141509)、中国科学院新兴与交叉学科布局试点项目(KJZD-EW-Z001)、中国科学院行星科学重点实验室开放课题(PSL14-07) 和紫金山天文台小行星基金会资助

[†]hushoucun@pmo.ac.cn

探测任务中可大大提高载荷重量. 美国于1998年发射的深空一号探测器成功验证了高比冲电推进方式用于行星际探测任务的可行性, 也使得小推力转移轨道的设计问题成为关注的热点^[3]. 而欧空局的Smart-1、日本的Hayabusa以及美国的Dawn探测器则以实际探测任务证明了电推进方式确实可以应用于深空探测任务中. 在国内外历届空间轨道设计竞赛中, 应用连续电推进方式针对近地小行星的多目标多任务轨道设计也是其中一个主要讨论的问题^[4-7].

电推进发动机虽然比冲高, 但推力一般较小, 因此常称为小推力发动机(如日本的小行星探测器Hayabusa上4个电推进发动机总共产生的推力大小仅为0.032 N^[8]), 其相应的轨道设计问题与传统的化学推进方式不同. 一般将小推力轨道优化设计问题分为全局优化和局部优化两个部分. 全局优化主要用于在满足给定约束条件下确定探测序列和探测方式, 并初步确定时间节点以及节点处的速度, 主要包括圆锥曲线拼接法和标称轨道法; 局部优化则是根据全局优化给出的初步轨道转化为符合约束的小推力轨道, 主要包括直接法、间接法和混合法^[4]. 从目前研究进展来看, 小推力局部优化方法已臻于成熟, 全局优化方法的研究还需突破^[9].

在全局优化方法中, 圆锥曲线拼接法由于原理相对简单, 计算效率较高, 在国内外历届空间轨道设计竞赛中应用较广^[4-7,10-11]. 其基本思想是将整个任务的探测轨道分成多段, 每一段用二体开普勒轨道进行近似, 并根据Lambert定理^[12]给出节点两端的的速度增量, 将速度增量大小作为判定两个轨道段能否通过小推力进行成功转移的判据. 然而, 在多目标小行星交会探测的轨道设计问题中, 在许多情况下两颗小行星之间的轨道能量、角动量或者轨道倾角等相差较大, 在一定时间之内利用小推力发动机是无法直接转移成功的, 解算Lambert问题虽然计算量不大, 但也增加了许多不必要的计算, 在多颗小行星交会任务中这样耗费的计算机时将更加明显. 本文在二体问题基础上, 将小推力作为摄动力来考虑, 借鉴传统天体力学中的摄动分析法给出了1阶意义下给定时间内两条开普勒轨道在小推力作用下得以转移成功的必要条件. 该条件形式简单, 计算量极小, 可用来迅速剔除大量无需考虑的目标小行星, 应用于短时小推力轨道转移中效果明显.

本文讨论的是日心系下的行星际轨道转移问题(对于地球卫星问题方法类似), 宜采用历元日心平黄道系作为参考系. 为了方便计算, 采用以下时间、长度和质量单位:

$$\begin{cases} [T] = \sqrt{\text{au}^3/GM_s} \\ [L] = \text{au} \\ [M] = M_0 \end{cases},$$

其中 $\text{au} = 1.495978707 \times 10^{11} \text{ m}$ 为天文单位, GM_s 为日心引力常数, M_0 为探测器初始质量. 采用以上单位之后有 $GM_s = 1$.

2 小推力轨道摄动运动方程

为凸显主要问题, 本文在二体问题模型基础上只考虑电推进发动机产生的恒定小推力, 不考虑小行星引力对探测器的作用和其他可能存在的摄动因素.

分别记 a 、 e 、 i 、 Ω 、 ω 、 M 为轨道半长径、偏心率、轨道倾角、升交点经度、近点角距、平近点角, f 、 E 、 r 为真近点角、偏近点角和日心距, $n = a^{-3/2}$ 为轨道平运动速

率, $u = f + \omega$, 则根据拉格朗日行星运动方程有^[13]:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [Se \sin f + T(1 + e \cos f)], \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [S \sin f + T(\cos f + \cos E)], \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} W, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[-S \cos f + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \right] - \cos i \frac{d\Omega}{dt}, \\
 \frac{dM}{dt} &= n - \frac{1-e^2}{nae} \left[-S \left(\cos f - 2e \frac{r}{p} \right) + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \right],
 \end{aligned} \tag{1}$$

记 $p = a(1 - e^2)$, S 、 T 、 W 分别是推力加速度的轨道径向分量、横向分量和法向分量, 且存在以下关系:

$$S = \mathbf{A} \cdot \hat{s}, \quad T = \mathbf{A} \cdot \hat{t}, \quad W = \mathbf{A} \cdot \hat{w}, \tag{2}$$

其中

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \tag{3}$$

$$\hat{s} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \hat{w} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|}, \quad \hat{t} = \frac{\hat{w} \times \hat{s}}{|\hat{w} \times \hat{s}|}, \tag{4}$$

这里 $\mathbf{F}$ 为历元日心平黄道系下探测器的推力矢量, $\mathbf{A}$ 为相应的推力加速度, m 为探测器质量, 其随时间的导数为:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{F}{I_{sp}g_0}, \tag{5}$$

其中 $g_0 = 9.80665 \text{ m/s}^2$ 为海平面的重力加速度, I_{sp} 为发动机比冲, $F = |\mathbf{F}|$. 本文考虑最大推力为恒定推力的情况, 记 $F_{\max}$ 为该恒定推力值, $A_0 = F_{\max}/m_0$, m_0 是初始时刻 ($t = t_0$) 的探测器质量.

方程(1)是一个非线性常微分方程组, 一般无法得到其完整分析解. 文献[13]在推力加速度恒定且方向始终沿切向的假设下, 基于平均根数法得到了1阶摄动分析解. 在实际的小推力轨道转移中, 由于推力加速度大小的变化(探测器质量在减小), 而且为了满足一定的最优化条件(如燃料最优或者时间最优), 推力方向很可能比较复杂, 发动机开关为 bang-bang 控制状态, 导致直接的分析解求解几乎无法实现.

3 小推力作用下的轨道根数变化范围

假设推力加速度相对于中心天体引力加速度是小量, 这里将借鉴轨道力学中建立小参数幂级数解的方法来讨论小推力转移中轨道根数的变化范围.

设 D 为实数空间 R^1 上的 Lebesgue 可测集, $g(x)$ 和 $h(x)$ 为 D 上的可测函数, 那么根据 Cauchy-Schwarz 不等式^[14]有

$$\int_D |g(x) h(x)| dx \leq \left(\int_D |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_D |h(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (6)$$

将探测器的推力加速度视为小参数, 根据平均根数法思想, 方程(1)右端积分时均应为平均根数, $h = \sqrt{p}$, $\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}, \dots$ 分别对应 $a, e, i, \dots$ 的平均根数. 若 σ 代表任一轨道参数, 记 $\Delta\sigma = \sigma(t_f) - \sigma(t_0)$, t_f 为轨道转移末端时刻 ($t_f > t_0$). 注意到 $\frac{dh}{dt} = rT$, 则在1阶解意义下利用(6)式, 可得:

$$|\Delta h| = \left| \int_{t_0}^{t_f} \frac{dh}{dt} dt \right| \leq \int_{t_0}^{t_f} \left| \frac{dh}{dt} \right| dt = \int_{t_0}^{t_f} |rT| dt \leq \sqrt{\int_{t_0}^{t_f} r^2 dt} \cdot \sqrt{\int_{t_0}^{t_f} T^2 dt}, \quad (7)$$

类似地, 利用(1)式和(6)式也不难得到

$$\sqrt{|\Delta i|^2 + \sin^2 \bar{i} |\Delta \Omega|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\bar{p}}} \sqrt{\int_{t_0}^{t_f} r^2 dt} \cdot \sqrt{\int_{t_0}^{t_f} W^2 dt}. \quad (8)$$

注意到 $\Delta h = \Delta p / (2\sqrt{p})$, 记

$$\Delta\psi = \sqrt{\left(\frac{1}{2\bar{p}} \Delta p \right)^2 + (\Delta i)^2 + \sin^2 \bar{i} (\Delta \Omega)^2}. \quad (9)$$

利用以上各式可得

$$\begin{aligned} \Delta\psi &< \frac{\sqrt{t_f - t_0}}{\bar{n}\bar{a}} \sqrt{\frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}} \cdot \sqrt{\int_{t_0}^{t_f} (T^2 + W^2) dt} \\ &\leq \frac{\sqrt{t_f - t_0}}{\bar{n}\bar{a}} \sqrt{\frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}} \cdot \sqrt{\int_{t_0}^{t_f} A^2 dt} \\ &\leq \frac{1}{\bar{n}\bar{a}} \sqrt{\frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}} \cdot \frac{A_0 (t_f - t_0)}{\sqrt{1 - \frac{A_0}{I_{sp} g_0} (t_f - t_0)}}. \end{aligned} \quad (10)$$

此外, 令

$$|\Delta\lambda| = \left| \sqrt{1 - \bar{e}^2} (\cos \bar{i} \Delta\Omega + \Delta\omega) + \Delta M - \bar{n} \cdot (t_f - t_0) - \frac{\partial n}{\partial a} \int_{t_0}^{t_f} [a(t) - a(t_0)] dt \right|, \quad (11)$$

注意到在1阶意义下有

$$\sqrt{1 - \bar{e}^2} \left(\cos \bar{i} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \right) + \frac{dM}{dt} = \bar{n} + \frac{\partial n}{\partial a} \int_{t_0}^{t_f} [a(t) - a(t_0)] dt - \frac{2S}{\bar{n}\bar{a}} \left(\frac{\bar{r}}{\bar{a}} \right), \quad (12)$$

其中 $\frac{\partial n}{\partial a} \int_{t_0}^{t_f} [a(t) - a(t_0)] dt$ 反映了半长径的变化对 M 的影响. 利用以上各式可得

$$\begin{aligned} |\Delta \lambda| &= \left| \sqrt{1 - \bar{e}^2} (\cos \bar{i} \Delta \Omega + \Delta \omega) + \Delta M - \left(1 - \frac{3\Delta a}{4\bar{a}} \right) \bar{n} \cdot (t_f - t_0) \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^{t_f} \frac{2S}{\bar{n}\bar{a}} \left(\frac{\bar{r}}{\bar{a}} \right) dt \right| < \frac{2(1 + \bar{e})\sqrt{t_f - t_0}}{\bar{n}\bar{a}} \sqrt{\int_{t_0}^{t_f} S^2 dt}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中推导过程中利用了如下数值积分中梯形公式的近似

$$\int_{t_0}^{t_f} [a(t) - a(t_0)] dt \approx \frac{\Delta a}{2} (t_f - t_0). \quad (14)$$

该近似的有效性将在后文的数值验证中得以体现, 记

$$\Delta \phi = \sqrt{(\Delta \psi)^2 + \left(\frac{\Delta \lambda}{2\sqrt{1 - \bar{e}^2}} \right)^2}, \quad (15)$$

利用(10)式、(13)式和(15)式可得

$$\begin{aligned} \Delta \phi &< \frac{\sqrt{t_f - t_0}}{\bar{n}\bar{a}} \sqrt{\frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}} \cdot \sqrt{\int_{t_0}^{t_f} (S^2 + T^2 + W^2) dt} \\ &= \frac{\sqrt{t_f - t_0}}{\bar{n}\bar{a}} \sqrt{\frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}} \cdot \sqrt{\int_{t_0}^{t_f} A^2 dt} \\ &\leq \frac{1}{\bar{n}\bar{a}} \sqrt{\frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}} \cdot \frac{A_0 (t_f - t_0)}{\sqrt{1 - \frac{A_0}{I_{sp} g_0} (t_f - t_0)}}. \end{aligned} \quad (16)$$

综上可得以下两个不等式

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2\bar{p}} \Delta p \right)^2 + (\Delta i)^2 + \sin^2 \bar{i} (\Delta \Omega)^2} < \frac{1}{\bar{n}\bar{a}} \sqrt{\frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}} \cdot \frac{A_0 (t_f - t_0)}{\sqrt{1 - \frac{A_0 (t_f - t_0)}{I_{sp} g_0}}}, \quad (17)$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2\bar{p}} \Delta p \right)^2 + (\Delta i)^2 + \sin^2 \bar{i} (\Delta \Omega)^2 + \left(\frac{\Delta \lambda}{2\sqrt{1 - \bar{e}^2}} \right)^2} < \frac{1}{\bar{n}\bar{a}} \sqrt{\frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}} \cdot \frac{A_0 (t_f - t_0)}{\sqrt{1 - \frac{A_0 (t_f - t_0)}{I_{sp} g_0}}}, \quad (18)$$

在1阶意义下, 其中的 $\bar{a}$ 、 $\bar{e}$ 、 $\bar{i}$ 、 $\bar{p}$ 、 $\bar{n}$ 均可取为 $a(t_0)$ 、 $e(t_0)$ 、 $i(t_0)$ 、 $p(t_0)$ 、 $n(t_0)$. 不等式(17)式和(18)式给出了在小推力作用下、1颗探测器从一条二体椭圆轨道于 t_0 出发、经过 $t_f - t_0$ 时间后, 初始轨道与末端轨道所应满足的必要条件, 其中条件(17)式(下称条件A)对轨道形状和轨道面法向做了约束, 而(18)式(下称条件B)在此基础上增加了对轨道转移相位的约束, 其形式和思想与Southworth等^[15]提出用于判定流星群是否来自于同一个母体的距离函数(distance function)相似, 后者的判定条件类似(17)式, 同样忽略了相位因素. 考虑1颗小推力深空探测器交会1颗小行星, 则轨道凡是不满足条件A或B的小行星均可认为是无法直接到达的小行星(即使是全程满推).

在1阶意义下应用条件A和B时, 轨道转移时间($t_f - t_0$)除需满足 $\frac{A_0}{I_{sp}g_0}(t_f - t_0) < 1$ 之外, 还需保证忽略的 $O(A_0^2)$ 项不会影响(17)式和(18)式的成立. 显然, 转移时间($t_f - t_0$)所应满足的条件与初始轨道参数、初始质量、推力大小甚至比冲都有关系, 而该关系从解析的角度很难直接给出. 下面采用数值方法来间接获取.

记 $\varepsilon_0 = \frac{A_0}{GM_s/a_0^2} = A_0 a_0^2$ 用来表示小推力加速度与日心引力加速度的比值, 并假设条件A和B的允许转移时间满足

$$n_0(t_f - t_0)\sqrt{\varepsilon_0} < k_1 \quad (19)$$

和

$$n_0(t_f - t_0)\sqrt{\varepsilon_0} < k_2, \quad (20)$$

其中 k_1 、 k_2 为选定参数.

应用蒙特卡洛思想, 令转移时间 $t_f - t_0$, 始末轨道参数 $\sigma(t_0)$ 、 $\sigma(t_f)$ 在以下参数空间内随机变化: $t_f - t_0 \in [300 \text{ d}, 2500 \text{ d}]$, $a_0, a_f \in [0.8 \text{ au}, 2.5 \text{ au}]$, $e_0, e_f \in [0, 0.6]$, $i_0, i_f \in [0, 180^\circ]$, $\Omega_0, \Omega_f, \omega_0, \omega_f, M_0, M_f \in [0, 360^\circ]$. 并分别令 $T_{\max}$ 、 I_{sp} 、 m_0 取以下4组值:

$$(1) T_{\max} = 0.2 \text{ N}, m_0 = 1500 \text{ kg}, I_{sp} = 1500 \text{ s}$$

$$(2) T_{\max} = 0.1 \text{ N}, m_0 = 1500 \text{ kg}, I_{sp} = 1500 \text{ s}$$

$$(3) T_{\max} = 0.2 \text{ N}, m_0 = 3000 \text{ kg}, I_{sp} = 1500 \text{ s}$$

$$(4) T_{\max} = 0.2 \text{ N}, m_0 = 1500 \text{ kg}, I_{sp} = 3000 \text{ s}$$

采用小推力轨道优化程序随机计算2万组结果, 令横坐标为 $x = \bar{n}(t_f - t_0)\sqrt{\varepsilon_0}$, 纵坐标分别为

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{2\bar{p}}\Delta p\right)^2 + (\Delta i)^2 + \sin^2\bar{i}(\Delta\Omega)^2} - \frac{1}{\bar{n}\bar{a}}\sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}} \cdot \frac{A_0(t_f - t_0)}{\sqrt{1 - \frac{A_0(t_f - t_0)}{I_{sp}g_0}}} \quad (21)$$

和

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{2\bar{p}}\Delta p\right)^2 + (\Delta i)^2 + \sin^2\bar{i}(\Delta\Omega)^2 + \left(\frac{\Delta\lambda}{2\sqrt{1-\bar{e}^2}}\right)^2} - \frac{1}{\bar{n}\bar{a}}\sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}} \cdot \frac{A_0(t_f - t_0)}{\sqrt{1 - \frac{A_0(t_f - t_0)}{I_{sp}g_0}}} \quad (22)$$

作图, 得到图1和图2. 图中黑色点为在给定推力和转移时间下无法转移成功的情况, 红色点为转移成功的情况.

图1结果显示当 $x < 3/2$ 时所有红色点都在 $y = 0$ 线以下, 这表明当取 $k_1 = 3/2$ 时, (19)式能保证所有能够成功转移的情况都满足条件A. 同样, 图2则表明 $k_2 = 1$ 时, (20)式能保证所有能够成功转移的情况都满足条件B. 由于在小推力作用下 p 、 i 、 Ω 等至多为线性变化, 而轨道转移相位往往为超线性变化, 因此条件B比A 所适用的时间范围要小. 当转移时间满足(20)式时, 优先应用条件B.

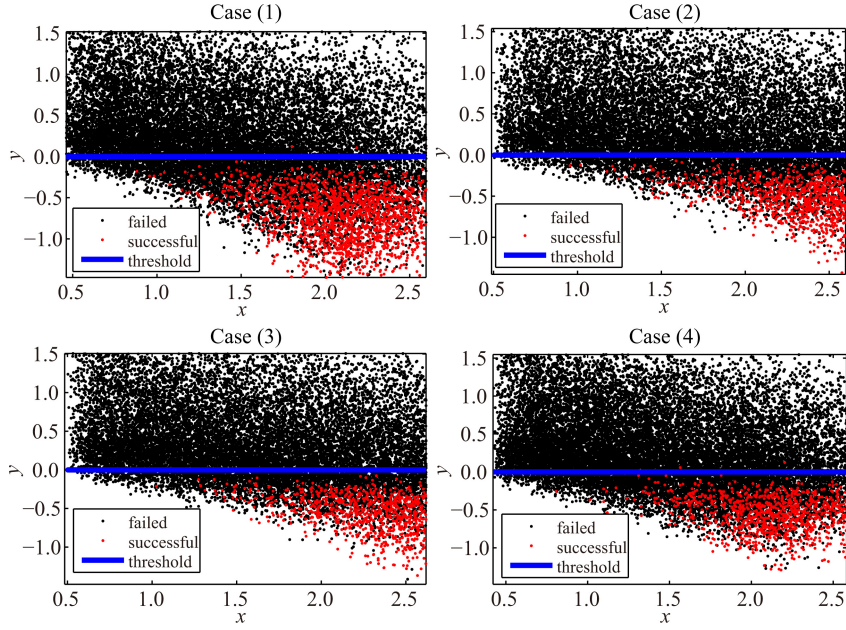


图 1 2万组随机参数的小推力轨道优化结果, 情况(1)~(4)各对应左上、右上、左下和右下图, y 由(21)式定义.

Fig. 1 In the computation results of low-thrust orbits with 20 thousand different random parameters, the cases (1)–(4) correspond to the top-left, top-right, bottom-left, and bottom-right panels, respectively, where y is defined by Eq.(21).

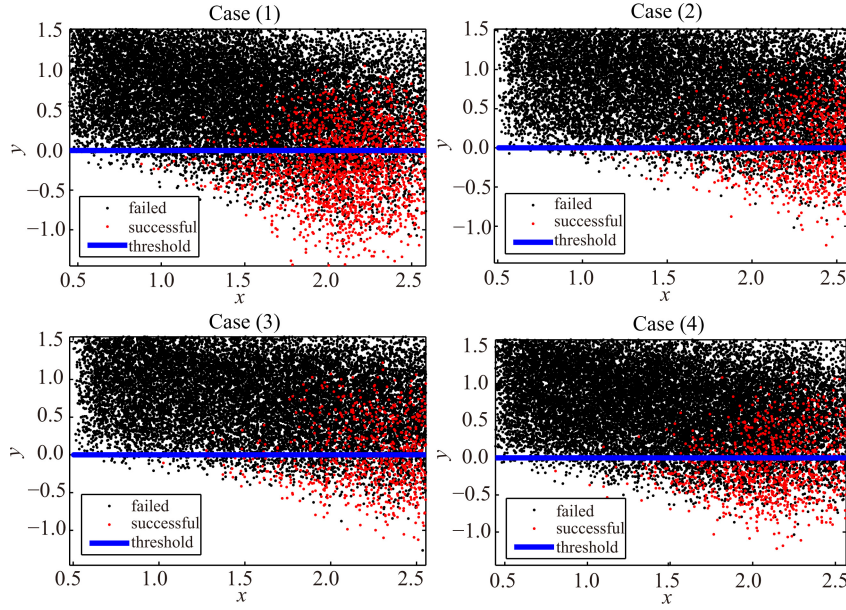


图 2 2万组随机参数的小推力轨道优化结果, 情况(1)~(4)各对应左上、右上、左下和右下图, y 由(22)式定义.

Fig. 2 In the computation results of low-thrust orbits with 20 thousand different random parameters, the cases (1)–(4) correspond to the top-left, top-right, bottom-left, and bottom-right panels, respectively, where y is defined by Eq.(22).

图1和2表明相同的加速度 $T_{\max}/m_0$ 具有近似的结果, 且比冲的变化对结果的影响相对较小. 综上所述, 为保证以上结论的成立, 建议使用条件A和B时输入参数应满足以下条件:

$$\begin{cases} n_0(t_f - t_0)\sqrt{\varepsilon_0} < 3/2 \text{ or } 1 \\ \frac{A_0}{I_{\text{sp}}g_0}(t_f - t_0) < 1 \\ a_0 \in [0.8 \text{ au}, 2.5 \text{ au}], e_0 \in [0, 0.6], I_{\text{sp}} \geq 1500 \text{ s}, m_0 \geq 1000 \text{ kg}, \varepsilon_0 < 0.1 \end{cases} \quad (23)$$

对于大多数探测近地小行星的小推力探测器, 以上条件都是能够满足的.

考虑1颗初始轨道半长径为1 au的小推力探测器, 分别取推力大小为0.1 N和0.2 N, 初始质量为1 000 kg、1 500 kg和2 000 kg, 比冲为1 500 s, 条件A、B根据(19)式和(20)式计算出适用的轨道转移时间见表1. 显然小推力加速度越小, 适用的轨道转移时间也越长.

表 1 条件A和B适用的轨道转移时间
Table 1 The applicable time of flight for conditions A and B

Parameter \ Thrust/N						
	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.2
Initial mass/kg	2000	2000	1500	1500	1000	1000
Applicable time of flight for condition A/d	950	671	822	582	671	475
Applicable time of flight for condition B/d	633	448	548	388	448	317

4 数值算例

这里给出一个恒定最大小推力作用下的近地小行星交会数值算例. 考虑1颗典型的比冲为1 600 s、初始质量为1 500 kg、推力为0.1 N的探测器在2012年9月30日TDB (质心动力学时)时刻小行星433 Eros 轨道以零逃逸速度出发. Eros在该时刻的轨道参数为(参见网址: <http://newton.dm.unipi.it/neodys2>):

$$a_0 = 1.458 \text{ au}, e_0 = 2.226, i_0 = 10.83^\circ, \Omega_0 = 304.34^\circ, \omega_0 = 178.79^\circ, M_0 = 143.49^\circ.$$

现需搜索计算在该时刻利用小推力发动机在80 d到1 600 d的转移时间内可到达的近地小行星. 考虑除了433 Eros之外编号靠前的1 000颗近地小行星, 转移时间从80 d到1 600 d变化. 注意到根据(23)式计算的条件A、B的适用时间分别为小于993 d和662 d. 计算结果见表2, 其中(a)和(b)列分别为根据间接法小推力轨道优化方法计算出来的实际能够到达和无法到达的小行星数目; (c)和(e)列分别为利用条件A和B剔除掉的无法到达的小行星数目; (d)和(f)列分别为(b)中被条件A和B剔除掉的小行星数目. (c)/(a)和(e)/(a)分别反映了条件A 和B 的筛除成功率, 而(d)/(b)和(f)/(b)分别反映了条件A和B的筛除失败率.

计算结果表明, 在相应的约束时间内, 条件A和B的筛除失败率都为0, 而且在相同转移时间时B的筛除成功率要大于A, 后者表明B在加了相位约束之后确实能够更有效地对可到达小行星进行筛选(B的筛选成功率达到了98%以上). 此外注意到, 在超过约束的转移时间范围之后, 随着时间增加, B 的失败率也在逐渐增高, 这是由于估计(14)式中忽略的项已经对(18)式产生了显著影响. 相比之下, A的失败率随时间的增加并不显著, 在某些情况下甚至可以放宽条件A的使用范围, 即放大 k_1 的取值.

表 2 从小行星Eros出发的探测器在不同轨道转移时间下的计算结果
Table 2 Calculation results of the orbit transfer of spacecraft departed from Eros
with different flight times

Fly time/d	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
80	1000	0	1000	0	1000	0
160	1000	0	1000	0	1000	0
240	1000	0	997	0	1000	0
320	1000	0	988	0	999	0
400	1000	0	969	0	998	0
480	1000	0	943	0	998	0
560	1000	0	908	0	995	0
640	1000	0	856	0	991	0
720	999	1	814	0	982	0
800	999	1	765	0	971	0
880	999	1	709	0	963	0
960	996	4	649	0	950	2
1040	993	7	595	0	930	2
1120	978	22	521	0	898	12
1200	970	30	436	0	870	15
1280	949	51	353	1	829	29
1360	928	72	248	1	788	39
1440	867	133	161	1	714	71
1520	787	213	112	1	627	112
1600	717	283	71	1	541	145

以上算例表明, 本文给出的两个条件确实能够有效地筛选掉大量无法直接通过小推力作用到达的轨道, 从而避免大量无意义的计算. 在用Lambert方法对待交会的目标小行星进行搜寻之前, 可利用该条件进行一次预筛选, 从而加快搜索速度. 当转移时间满足(20)式时, 采用条件B来判断, 否则若满足(19)式则应用条件A.

5 总结和展望

本文在二体模型基础上, 将小推力作为摄动来考虑, 根据轨道力学中求小参数幂级数解的思想给出了1阶意义下在给定时间内从一条开普勒轨道转移到另一条开普勒轨道所应满足的必要条件. 该条件形式简单, 计算效率高, 物理意义明显, 可用于多目标小天体交会轨道设计中迅速排除掉在给定条件下无法到达的目标小天体. 数值结果验证了该方法的可行性, 而在推力加速度较小、转移时间较短的情况下其效果更加明显. 虽然本文给出的必要条件只适用于恒定小推力情况, 但对于变小推力(如推力大小正比于日心距2次方的倒数)情况, 其方法和思想是类似的.

此外, 在小推力全局优化中通常使用的Lambert方法其实也是有缺陷的, 其获得的速度增量与实际小推力转移所消耗的速度增量之间的对应关系目前仍不明朗^[4]. 文中给出的轨道根数差 $\Delta\psi$ 或 $\Delta\phi$ 是否可以在某些场合替代Lambert方法并应用于小推力轨道全局优化, 这值得后续工作继续深入开展.

参考文献

- [1] 季江徽. 国防科技工业, 2011, 4: 54
- [2] 胡中为, 徐伟彪. 行星科学. 北京: 科学出版社, 2008: 334-365
- [3] Rayman M D, Varghese P, Lehman D H, et al. *AcAau*, 2000, 47: 475
- [4] 李俊峰, 蒋方华. 力学与实践, 2011, 33: 1
- [5] 蒋方华, 陈杨, 刘跃聪, 等. 力学与实践, 2011, 33: 103
- [6] 沈红新, 罗亚中, 李海阳. 力学与实践, 2013, 35: 99
- [7] 路毅, 李济生, 李恒年, 等. 力学与实践, 2014, 36: 172
- [8] Kuninaka H, Nishiyama K, Funaki I, et al. *JPP*, 2007, 23: 544
- [9] 高扬. 力学学报, 2012, 43: 991
- [10] 林厚源, 赵长印. 天文学报, 2012, 53: 197
- [11] Lin H Y, Zhao C Y. *ChA&A*, 2012, 36: 389
- [12] Battin R H. *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. New York: AIAA, 1999: 295-342
- [13] 刘林, 胡松杰, 王歆. 航天动力学引论. 南京: 南京大学出版社, 2006: 65-67
- [14] 郝涌. 数学分析选讲. 北京: 国防工业出版社, 2010: 92-93
- [15] Southworth R B, Hawkins G S. *SCoA*, 1963, 7: 261

The Application of Perturbation Method in Low-thrust Orbit Optimization

HU Shou-cun^{1,2,3} ZHAO Yu-hui^{1,2} JI Jiang-hui^{1,2} HOU Xi-yun^{4,5}

(1 Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008)

(2 Key Laboratory of Planetary Sciences, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008)

(3 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

(4 School of Astronomy and Space Science, Nanjing University, Nanjing 210093)

(5 Key Laboratory of Modern Astronomy and Astrophysics, Nanjing University, Ministry of Education, Nanjing 210093)

ABSTRACT In the multiple-purpose and multiple-mission exploration of near-Earth asteroids in solar system, developing effective methods to select the transferable targets from a large amount of asteroids is an on-going problem. Here we consider the orbit motion of a low-thrust probe in the interplanetary space. The idea of drawing lessons from the analytical method in classical celestial mechanics is proposed, and the low-thrust is considered as a perturbation. We derive the necessary condition to satisfy the two transferable Kepler orbits using the low-thrust propulsion in the sense of the first-order approximation. This condition is the norm of the difference of several orbit elements, and has a high computational efficiency. It may be used to quickly reject the non-transferable asteroids under the condition of a given flight time and low-thrust propulsion. The numerical results are used to testify the validity of this condition in near-Earth asteroids exploration.

Key words celestial mechanics: perturbation theory, celestial mechanics: motion of satellites, planets and satellites: exploration, asteroids: general, methods: analytical