

使用体积离散方法计算不规则小天体表面重力场*

赵玉晖^{1,2†} 胡寿村^{1,2} 王 素^{1,2} 季江徽^{1,2}

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210008)

(2 中国科学院行星科学重点实验室 南京 210008)

摘要 在小行星探测任务中, 航天器轨道设计需要充分考虑到小行星的非球形引力场的影响. 太阳系中大部分小行星具有形状不规则、密度不均匀的特点, 因此, 在没有绕飞轨道数据的情况下, 精确计算其引力场非常困难. 利用不规则小行星的多面体模型, 采用体积离散方法通过直接积分计算小行星引力场球谐系数和表面重力场分布情况. 将该方法与多面体方法进行了比较, 并以(433) Eros为例, 通过该方法计算得到的结果与NEAR(Near-Earth Asteroid Rendezvous)探测器的轨道数据反演结果比较, C_{20} 项误差差不超过2%, 使用该方法对我国小行星探测任务拟探测的(1996) FG3小行星的重力场进行了计算. 以嫦娥二号探测器飞越的(4179) Toutatis小行星为例, 结合相应的雷达观测数据提供的小行星形状模型, 计算其表面引力势情况, 为通过飞越任务获取的光学图像分析其表壤的分布、流向等提供了相应的理论依据. 该方法适用于密度不均匀天体, 可为小行星探测任务轨道设计和着陆提供可靠的小行星引力场数据.

关键词 行星和卫星: 探测, 重力场, 方法: 数值

中图分类号: P134; **文献标识码:** A

1 引言

近些年来, 随着各国科技水平和航天技术的不断提高和发展, 太阳系小行星探测越来越多地得到各航天大国的关注, 越来越多的小行星探测任务也被列入计划并提上日程. 在小行星探测任务中, 航天器轨道设计及着陆采样等都需要充分考虑到其非球形引力场的影响. 太阳系大部分小行星形状极其不规则, 由于被探测的小行星数量较少, 因此传统的采用绕飞方式通过探测器的轨道数据反演小行星的引力场无法普遍适用, 需要通过各种观测数据和相应的算法对这类天体的引力场特点进行相应的研究, 构建精确合理的小行星引力场建模方法, 在此基础上研究不规则弱引力场中探测器轨道力学问题. 天体重力场的建模方法很多^[1-2], 1966—1967年Kaula与Heiskanen建立了球谐函数模型理论, 该方法可以逼近任意形状的中心天体, 是天体力学领域中大行星重力场建模的主

2014-05-15收到原稿, 2014-09-03收到修改稿

*国家自然科学基金项目(11303103, 11473073)资助

[†]zhaoyuhui@pmo.ac.cn

要方法. 重力场的球谐系数还可以通过三轴椭球体方法确定, 但是该方法所得结果精度较低. 1996年Werner等人提出多面体模型方法, 该方法基于观测资料, 用一个表面由多个三角形构成的多面体来逼近小行星形状, 通过积分变换求出多面体模型的重力场^[3]. 2010年Park等人提出一种联合应用航天器导航数据和小行星形状模型建立其精确引力场模型的方法, 该方法在一定程度上解决了密度不均匀小行星引力场建模的难题, 提高了建模精度^[4]. 2010年张振江等人提出了一种小行星引力场建模和球谐系数求取的方法, 与传统方法相比大幅度地提高了引力场建模的精度^[5-6].

文章提出了一种对不规则小行星引力场进行建模并求取相应的球谐系数的方法—体积离散方法. 该方法基于有限元方法的思想, 根据光变曲线得到的小行星形状, 用体积元逼近小行星的体积, 并根据球谐系数的定义直接积分进行求取, 从而得到小行星的引力势情况, 并计算其表面重力场的分布. 文章以(433) Eros为例, 将该方法得到的结果与NEAR探测器得到的轨道数据反演的球谐系数进行比较, 比较结果表明 C_{20} 误差不超过2%. 与传统的三轴椭球体模型和多面体方法相比, 该方法对于密度不均匀的天体同样适用. 文章通过该方法计算得到我国拟探测的(1996) FG3小行星的表面重力场的分布情况, 可为我国深空探测小行星探测任务轨道设计和着陆提供精度可靠的小行星不规则引力场模型. 我国嫦娥二号月球探测器于2012年12月13日成功飞越4179号小行星图塔蒂斯(Toutatis)^[7-11], 首次获得该小行星高分辨率光学图像, 为对其进一步的深入了解提供了相应的科学数据. 文章结合雷达数据给出的形状模型, 利用体积离散方法对(4179) Toutatis小行星表面重力场进行了计算, 为通过光学图像分析其表面土壤、细粒等物质的分布和流向提供一定的理论依据^[12].

2 体积离散方法计算不规则小行星引力场

常用的重力场建模方法可分为两大类. 球谐函数模型方法和椭球谐函数模型方法等无穷级数法可以逼近任意形状的中心天体, 并通过各阶次球谐系数计算重力场对附近探测器轨道的影响. 但是球谐系数的确定大都是由环绕型探测器的轨道数据通过数据分析和相应的算法得到的, 并且该模型在靠近形状极其不规则小行星表面时需要取的项数很多甚至发散, 因此该方法对于没有进行绕飞观测的天体尤其是太阳系大量小行星的重力场建模并不适用; 另一类方法是应用可计算引力势能的简化三维模型来逼近小行星的形状, 并应用模型的重力场来逼近小行星的重力场模型, 此类方法中常用的有三轴椭球体模型方法和多面体模型方法. 多面体方法可以得到相当精确的小行星重力场模型, 精确计算出给定检验点的引力势能和引力加速度的值, 但由于该模型给出的重力场与探测器的轨道根数很难建立直观明显的联系, 因此不利于分析定性提取信息, 不便于研究重力场中航天器的轨道特点并进行轨道设计. 因此, 需要综合上述各方法的优点, 寻找一种可以在计算高精度重力场模型的同时分析重力场中小行星运动轨道特点的建模方法.

2.1 球谐系数计算

若对于任意形状天体进行球谐函数展开, 则球谐系数的定义为^[13-15]:

$$\begin{aligned}
 C_{lm} &= 2^{\delta_{m0}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\frac{1}{m_e a_e^l} \right) \int \int \int R^l P_{lm}(\sin \varphi) \cos m\lambda dM \\
 &= 2^{\delta_{m0}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\frac{1}{m_e a_e^l} \right) \int \int \int R^l P_{lm}(\sin \varphi) \cos m\lambda (\rho \Delta x \Delta y \Delta z), \\
 S_{lm} &= 2^{\delta_{m0}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\frac{1}{m_e a_e^l} \right) \int \int \int R^l P_{lm}(\sin \varphi) \sin m\lambda dM \\
 &= 2^{\delta_{m0}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\frac{1}{m_e a_e^l} \right) \int \int \int R^l P_{lm}(\sin \varphi) \sin m\lambda (\rho \Delta x \Delta y \Delta z),
 \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\delta_{m0} = \begin{cases} 0, m=0 \\ 1, m=1 \end{cases}$, l, m 分别为阶数和次数, m_e, a_e 分别为天体的质量和平均半长径, R 为体积元到中心的距离, λ, ϕ 分别为体积元在体固系中的经、纬度, M 为体积元的质量, ρ 为体积元的密度, P_{lm} 为勒让德多项式.

体积离散方法实际上是采用无限元方法的思想, 在一个包含目标小行星的有限体积中, 用足够多的体积元(例如正方体或球体)逼近目标小行星的形状, 根据球谐系数的定义, 对所有位于小行星内部的体积元进行积分, 从而得到各阶球谐系数的数值. 图1以(433) Eros为例给出包含小行星在内的长方体的示意图.

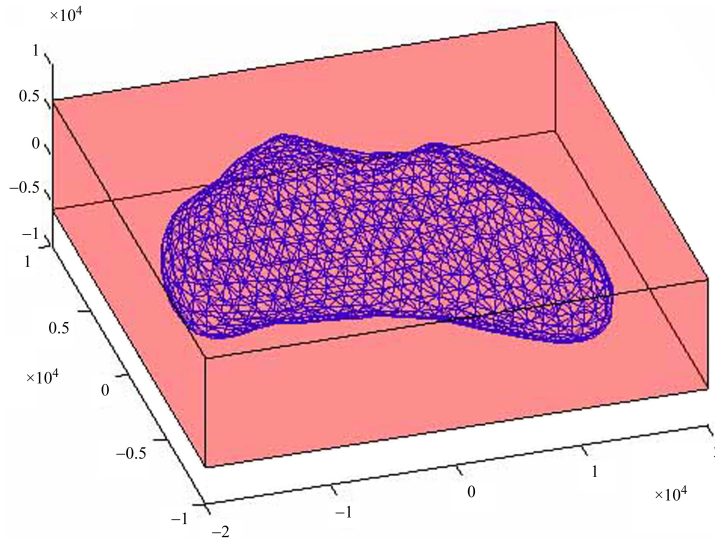


图1 体积离散方法示意图

Fig. 1 Sketch of the finite volume element method

2.2 表面点引力场计算

对小行星表面引力加速度分布情况的计算, 也可以直接对体积元进行积分. 若以小正方体作为体积元逼近不规则小行星形状, 在小行星计算表面点引力势的时候, 需要将小正方体近似为小球体, 由此其对表面点的引力可以近似为质量点的作用力, 相应的引

力加速度计算公式为:

$$\ddot{\vec{r}} = \sum \frac{Gm'}{r_i^3} \vec{r}_i, \quad (2)$$

其中 m' 为体积元的质量, $\vec{r}_i$ 为表面点相对该体积元中心的位置矢量.

3 体积离散法计算结果

使用多面体模型方法和体积离散方法^[3,5,16], 分别对三轴椭球体和(433) Eros小行星的球谐系数进行计算, 将结果与椭球体的理论值和NEAR探测器轨道数据反演的(433) Eros重力场系数相比对.

3.1 三轴椭球体算例

选取三轴椭球体的3个半轴 a , b , c 分别为16 km、8 km和6 km, 分别使用多面体模型方法与体积离散法计算相应的球谐系数. 图2给出多面体模型方法对三轴椭球体进行三角剖分的示意图.

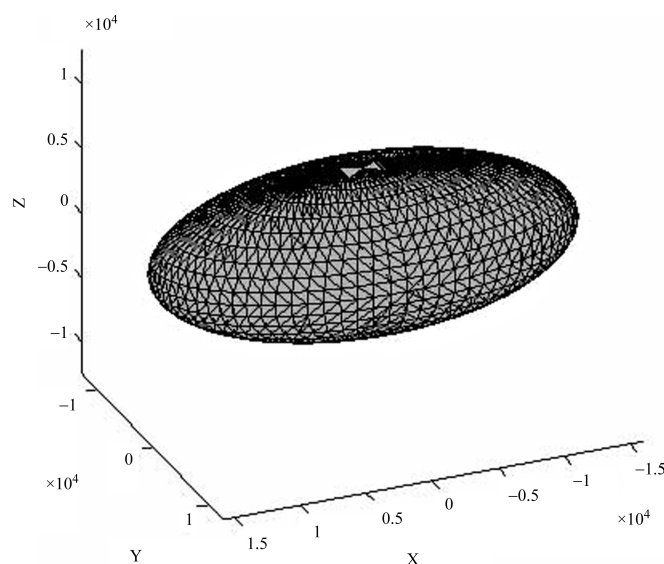


图 2 三轴椭球体进行三角剖分示意图

Fig. 2 Sketch of the triangulation of a triaxial ellipsoid

表1中给出通过多面体模型和体积离散方法对三轴椭球体球谐系数进行计算的结果, 从表中给出的计算结果可以看出, 通过体积离散计算得到的球谐系数最大误差为2.9%, 对带谐项的计算精度相对较高.

表 1 三轴椭球体球谐系数计算结果
Table 1 The spherical harmonic coefficients of a triaxial ellipsoid

Parameter	Exact Value	Polyhedral Model ^[5]	Finite Volume Element Method
C_{20}	-0.043324	-0.43284(1%)	-0.043324(0)
C_{22}	0.058095	0.058047	0.005978
C_{40}	-0.008712	0.008685	0.008711
C_{42}	-0.011604	-0.011579	-0.011589
C_{44}	0.011885	0.011864	0.012056
ϵ		0.003	0.029

3.2 小行星(433) Eros算例

(433) Eros是环绕太阳运行的一颗近地小行星, 于1898年8月13日由德国天文学家古斯塔夫韦特发现并命名. 美国国家航空航天局近地小行星交会任务(NEAR) 的苏梅克探测器(Shoemaker spacecraft)于1998年底至2001年2月对其大小、形状、磁场和卫星等进行了探测, 并拍摄大量照片. 相关研究人员根据相应的探测数据建立了(433) Eros 小行星的三维模型并发布在<http://www.psi.edu/pds/resource/nearmod.html> 网站. 文中采用的形状模型由64 800个数据点组成, 经三角剖分后即可得到小行星的多面体模型. 对小行星(433) Eros球谐系数的计算结果列于表2中, 可以看出使用体积离散方法计算得到的二次带谐项误差相对较大, 但是该精度仍然符合深空探测任务预研工作的要求.

表 2 小行星(433) Eros 球谐系数计算结果
Table 2 The spherical harmonic coefficients of (433) Eros

Parameter	Orbit data	Polyhedral Model ^[5]	Finite Volume Element Method
C_{20}	-0.052478	-0.052357(0.2%)	-0.05078(2%)
C_{21}	0	-0.000036	-0.000064
S_{21}	0	-0.000069	-0.000116
C_{22}	0.08253	0.083125	-0.082373
S_{22}	-0.027745	-0.02608	-0.029222
C_{30}	-0.0014	-0.001215	-0.00164
C_{31}	0.004055	0.00404	0.0020509
S_{31}	0.003379	0.002353	0.0035717
C_{32}	0.001792	0.001485	0.0021506
S_{32}	-0.000686	0.000593	-0.000904
C_{33}	-0.010337	-0.009789	-0.007712
S_{33}	-0.012134	-0.012287	-0.011939
C_{40}	0.0129	0.012542	0.0118409

表2 续

Table 2 Continued

Parameter	Orbit data	Polyhedral Model ^[5]	Finite Volume Element Method
C_{41}	-0.000106	-0.000099	-0.00024
S_{41}	0.000136	0.000158	0.0001831
C_{42}	-0.017495	-0.01808	-0.015853
S_{42}	0.004542	0.004119	0.004786
C_{43}	-0.000319	-0.000339	-0.000243
S_{43}	-0.000141	-0.000588	-0.000194
C_{44}	0.017587	0.018054	0.015707
S_{44}	-0.008939	-0.008725	-0.009856
ϵ		3.2	1.3

3.3 (1996) FG3小行星重力场计算结果

(1996) FG3是一颗C型近地双小行星, 具有重要的科学研究价值, 也是我国未来自主小行星探测任务的候选探测目标之一. 利用光变曲线数据给出(1996) FG3小行星的形状^[17], 图3使用体积离散方法计算(1996) FG3小行星的引力场. 假设该小行星为密度均匀的小行星, 图中显示出赤道部分突起的部位由于距离小行星质心的距离较大, 引力场相对较弱.

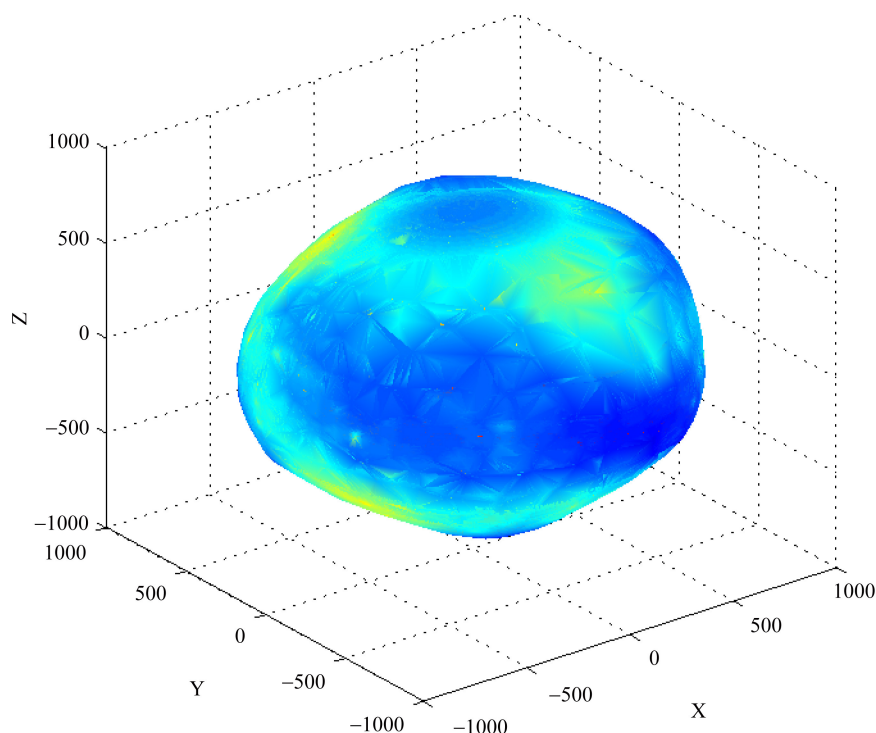


图3 (1996) FG3表面引力势绝对值示意图

Fig. 3 Sketch of the absolute value of surface gravitational potential energy of (1996) FG3

3.4 (4179) Toutatis表面重力场计算结果

2012年12月13日16:30, 我国嫦娥二号探测器成功飞越以西方凯尔特人神话中“战神”图塔蒂斯命名的小行星((4179) Toutatis), 近距离获取了其光学图像. 从1992年以来, Ostro和Hudson等人利用Goldstone和Arecibo对该小行星进行雷达观测, 并建立和多次改进了其多面体形状模型^[18-19]. 利用6 400个顶点的形状模型, 图4给出由体积离散方法计算得到的(4179) Toutatis小行星表面重力场分布的情况, 图4(a)给出从小行星体固坐标系中4个不同视角显示的重力场分布图, 图4(b)是从CE-2号拍照角度给出的表面重力场分布情况. 不难看出表面重力场在中部较大, 向大头和小头两端递减, 这为研究小行星表壤流动的方向提供了相应的理论依据.

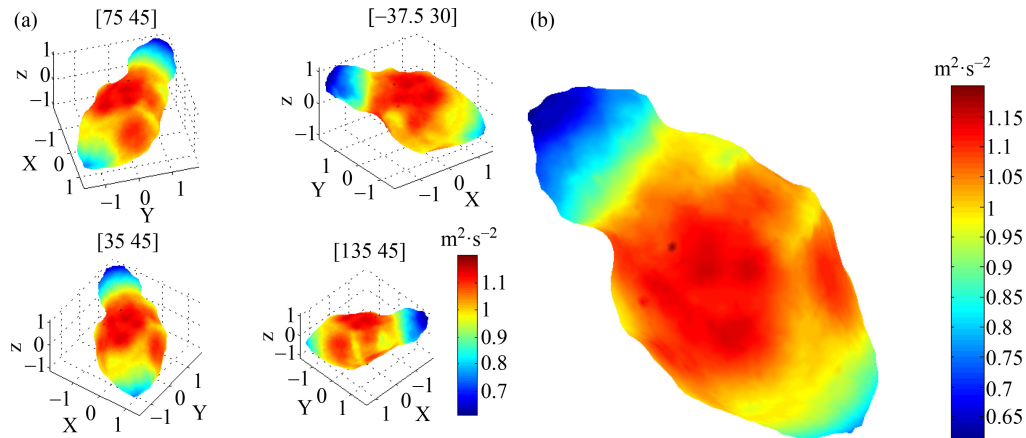


图4 (4179) Toutatis小行星表面引力势能绝对值的分布. (a) 给出体固坐标系中4个不同的视角看到的表面引力势分布情况, 其中方括号中给出视角在体固系中的经、纬度, (b) 给出嫦娥二号的视角观测到的结果.

Fig. 4 Distribution of the absolute values of surface gravitational potential energy of (4179) Toutatis. Panel (a) shows the results from 4 different view directions (as shown in the square brackets) in the body fixed frame, and (b) presents the result from Chang'e-2's view, respectively.

4 小结

文章针对大部分太阳系小行星形状不规则的特点, 通过体积离散方法计算小行星球谐系数和表面重力场分布情况, 以三轴椭球体和(433) Eros小行星为例, 说明了该方法的可行性, 并对我国深空探测任务拟探测的(1996) FG3小行星表面重力场分布进行了计算, 为探测器的绕飞轨道设计提供了相应的引力场信息. 利用雷达观测数据, 文章对我国嫦娥二号月球探测器飞越的(4179) Toutatis小行星表面重力场分布进行了计算, 为其表壤分布和流向等研究提供了相应的理论依据. 该方法适用于密度不均匀小天体, 可为我国深空探测任务提供不规则弱引力场的信息.

参 考 文 献

- [1] Eugene G F, Taeyoung L, Melvin L. Polyhedral Potential and Variational Integrator Computation of the Full Two Body Problem. AIAA/AAS, Keystone, August 21—24 2006
- [2] Colombi A, Hirani A, Villac B. JGCD, 2008, 31: 1041
- [3] Werner R A, Scheeres D J. CeMDA, 1996, 65: 313
- [4] Park R S, Werner R A, Bhaskaran S. JGCD, 2010, 33: 212
- [5] 张振江, 崔祜涛, 任高峰. 航天器环境工程, 2010, 27: 383
- [6] 张振江. 近小行星轨道动力学研究及其在引力拖车中的应用. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011
- [7] 胡寿村, 季江徽, 赵玉晖, 等. 中国科学, 2013, 43: 506
- [8] 黄江川, 王晓磊, 孟林智, 等. 中国科学, 2013, 43: 596
- [9] 孟林智, 黄江川, 叶培建, 等. 中国科学, 2013, 43: 585
- [10] 赵玉晖, 王素, 胡寿村, 等. 天文学报, 2013, 54: 447
- [11] Zhao Y H, Wang S, Hu S C, et al. ChA&A, 2014, 38: 163
- [12] Huang J C, Ji J H, Ye P J, et al. Scientific Reports, 2013, 3: 3411
- [13] 刘林. 航天器轨道理论. 北京: 国防工业出版社, 2000
- [14] 刘林, 胡松杰, 王歆. 航天动力学引论. 南京: 南京大学出版社, 2006
- [15] Hobson E W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. New York: Chelsea, 1955
- [16] 邵巍, 崔平远, 崔祜涛. 哈尔滨工业大学学报, 2010, 42: 687
- [17] Yu L L, Ji J H, Wang S. MNRAS, 2014, 439: 3357
- [18] Hudson R S, Ostro S J, Scheeres D J. Icarus, 2003, 161: 346
- [19] Hudson R S, Ostro S J. Science, 1995, 270: 84

Using Finite Volume Element Definitions to Compute the Gravitation of Irregular Small Bodies

ZHAO Yu-hui^{1,2} HU Shou-cun^{1,2} WANG Su^{1,2} JI Jiang-hui^{1,2}

(1 Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008)
(2 Key Laboratory of Planetary Sciences, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008)

ABSTRACT In the orbit design procedure of the small bodies exploration missions, it's important to take the effect of the gravitation of the small bodies into account. However, a majority of the small bodies in the solar system are irregularly shaped with non-uniform density distribution which makes it difficult to precisely calculate the gravitation of these bodies. This paper proposes a method to model the gravitational field of an irregularly shaped small body and calculate the corresponding spherical harmonic coefficients. This method is based on the shape of the small bodies resulted from the light curve data via observation, and uses finite volume element to approximate the body shape. The spherical harmonic parameters could be derived numerically by computing the integrals according to their definition. Comparison with the polyhedral method is shown in our works. We take the asteroid (433) Eros as an example. Spherical harmonic coefficients resulted from this method are compared with the results derived from the track data obtained by NEAR (Near-Earth Asteroid Rendezvous) detector. The comparison shows that the error of C_{20} is less than 2%. The spherical harmonic coefficients of (1996) FG3 which is a selected target in our future exploration mission are computed. Taking (4179) Toutatis, the target body in Chang'e 2's flyby mission, for example, the gravitational field is calculated combined with the shape model from

radar data, which provides theoretical basis for analyzing the soil distribution and flow from the optical image obtained in the mission. This method is applied to uneven density distribution objects, and could be used to provide reliable gravity field data of small bodies for orbit design and landing in the future exploration missions.

Key words planet and satellites: detection, gravitation, methods: numerical