

原子钟噪声误差估计方法研究*

宋会杰^{1,2,3†} 董绍武^{1,2} 李 玮^{1,2} 张继海^{1,2} 景月娟^{1,2}

(1 中国科学院国家授时中心 西安 710600)

(2 中国科学院时间频率基准重点实验室 西安 710600)

(3 中国科学院大学 北京 100049)

摘要 给出了原子钟不同噪声的模拟方法. 研究了利用马氏过程理论模拟原子钟的频率闪变噪声, 利用维纳过程理论估计频率白噪声的最大区间误差的方法. 结合国家授时中心时频基准实验室9台铯原子钟的运行情况, 估计了幂律谱模型的噪声系数, 并根据噪声模型进行了仿真, 最后得到了这9台铯原子钟的频率白噪声产生的最大区间误差估计.

关键词 天体测量学: 时间, 原子钟, 噪声, 方法: 数据分析

中图分类号: P127; 文献标识码: A

1 引言

原子钟的运行状况对时间保持工作具有重要意义. 时间保持需要分析原子钟的误差, 原子钟的误差分为确定性偏差和随机噪声两部分. 确定性偏差可以通过模型预测加以补偿, 随机噪声部分通常利用Allan偏差或噪声的幂律谱模型估计噪声的强度, 然后根据噪声强度利用统计分析的方法模拟出相应的噪声, 并且对于频率白噪声可以通过维纳过程理论^[1]确定不同时间段和不同置信度的置信限, 表现为最大误差估计的统计方法. 另外, 对于原子时算法也需要了解原子钟的噪声情况, 以便根据需要降低相应的噪声. 对于噪声模拟方法, 文献[2]利用了白噪声通过带有转移函数的噪声模型滤波器产生频率闪变噪声, 其中转移函数用到双线性变化, 这样计算量大, 精度不高. 文献[3]利用随机均匀分布序列幂级数求和的方式模拟频率闪变噪声, 这要用到以前的所有采样, 计算量大. 本文利用马氏过程模拟频率闪变噪声, 马氏过程在自然科学、工程技术及经济管理各领域中都有广泛应用. 本论文尝试利用马氏过程对原子钟噪声误差进行估计, 计算方便, 并且能够线性化运算.

2 钟差模型: 确定与随机部分噪声

原子钟的时间误差 $x(t)$ 近似表示为某台原子钟与频率稳定度更高的基准频率标准或时间尺度的相位时间差, 利用 $x_m(t)$ 进行模拟, 具体包括一个随机部分 $x_0(t)$ 和一个确定部

2016-09-10收到原稿, 2016-11-22收到修改稿

*地理信息工程国家重点实验室开放基金项目(SKLGIE2014-M-1-3)资助

†songhuijie@ntsc.ac.cn

分(见(1)式), 确定部分考虑到原子钟的时差、频差和频率漂移.

$$x_m(t) = a^k + b^k + \frac{1}{2}c^k t^2 + x_0(t), \quad (1)$$

上标 k 表示基准频标或时间尺度的不间断运算区间, 对于每一个区间, a 表示时差、 b 表示频差、 c 表示频率漂移. 有不同的 a^k 、 b^k 和 c^k 以及随机部分 $x_0(t)$, 包括相对完整的噪声模型, 表示为5种噪声过程的和, 通常用相位噪声的谱密度函数 $S_x(f)$ 表示, 谱密度函数表现为从平坦部分到低频部分的快速发散, 这5种噪声也可以用频率谱密度 $S_y(f)$ 表示. 每一种噪声强度通过 h_α 表示, 5种噪声具体包括相位白噪声($\alpha = 2$)、相位闪变噪声($\alpha = 1$)、频率白噪声($\alpha = 0$)、频率闪变噪声($\alpha = -1$)和频率随机游走噪声($\alpha = -2$). 谱密度具体表示为:

$$\begin{aligned} S_y(f) &= \sum_{\alpha=-2}^2 h_\alpha f^\alpha, \\ S_x(f) &= \sum_{\alpha=-2}^2 \frac{h_\alpha f^{(\alpha-2)}}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

3 随机噪声产生方法

这部分描述5种噪声误差源的产生方法, 主要包括频率白噪声和频率闪变噪声的独立产生. 对于其他噪声: 相位白噪声、频率随机游走噪声和相位闪变噪声, 可以利用钟的噪声误差源之间的关系产生.

3.1 频率白噪声及相关噪声的模拟

频率白噪声的功率谱密度 $S_y(f) = h_0 f^0$, 这里 h_0 表示频率白噪声强度, f 是傅里叶频率, 模拟为具有零均值和单位标准偏差的高斯白噪声. 模拟产生频率白噪声后, 相位白噪声和频率随机游走噪声可以分别通过微分和积分频率白噪声产生.

3.2 利用马氏噪声过程模拟频率闪变噪声

频率闪变调制噪声也是一种幂律谱噪声过程, 标准频率偏差的谱密度函数具有形式: $S_y(f) = h_{-1} f^{-1}$, 这里 h_{-1} 表示频率闪变噪声强度. 频率闪变调制噪声利用白色高斯随机变量产生是困难的. 文中利用马氏过程模拟频率闪变噪声, 实施方便, 并且能够加入线性系统进行处理.

马氏频率过程与相应的时间偏差满足微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y(t), \\ \frac{dy}{dt} &= -Ry(t) + n(t), \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $1/R$ 是时间常数, $n(t)$ 是白噪声过程, 并且具有一个双边谱密度函数. 对于任意时间长度 τ_0 , 可得出微分方程^[4]如下:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\exp(-R\tau_0)}{R} \\ 0 & \exp(-R\tau_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t-\tau_0) \\ y(t-\tau_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x(t) \\ w_y(t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

这里 τ_0 表示滞后时间长度, $w_x(t)$ 和 $w_y(t)$ 表示均值为0的白噪声过程. 频率闪变调制噪声可以通过一个模型 $y_F(t)$ 近似, $y_F(t)$ 是 h 个独立的马氏过程的线性组合:

$$y_F(t) = \sum_{j=1}^h y_j(t), \quad (5)$$

式中 $h = 4$.

频率闪变调制噪声产生后, 相位闪变噪声可以通过微分频率闪变噪声生成. 对于钟的各类噪声的产生, 首先利用文中噪声的产生方法产生相应的噪声, 然后乘以比例因数得到相应噪声进行模拟, 比例因数如下式所示^[2]:

$$\begin{aligned} S_{WP} &= \frac{3h_2 f_h}{4\pi^2 \tau^2}, & S_{FP} &= h_1 \frac{1.038 + 3 \ln(2\pi f_h \tau)}{4\pi^2 \tau^2}, \\ S_{WF} &= \frac{h_0}{2\tau}, & S_{FF} &= h_{-1} 2 \ln 2, & S_{RWF} &= h_{-2} \frac{2\pi^2 \tau}{3}, \end{aligned} \quad (6)$$

这里 S_{WP} 、 S_{FP} 、 S_{WF} 、 S_{FF} 和 S_{RWF} 分别表示相位白噪声比例因数、相位闪变噪声比例因数、频率白噪声比例因数、频率闪变噪声比例因数和频率随机游走噪声比例因数.

3.3 原子钟噪声的系数计算

首先基于相位噪声理论, 5种相位噪声对Allan方差的贡献如下^[5]:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(\tau) &= h_{-2} \frac{(2\pi)^2}{6} \tau + h_{-1} 2 \ln 2 + h_0 \frac{1}{2\tau} + \\ &h_1 \frac{1}{(2\pi\tau)^2} [1.038 + 3 \ln(2\pi f_h \tau)] + h_2 \frac{3f_h}{(2\pi\tau)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

根据各台钟不同平滑区间的Allan方差, 利用最小二乘原理估计相位噪声系数, 由于函数中待估计的参数个数较多, 参数间可能有某种相关关系. 为了得到稳定的参数估计, 采用线性代数的广义逆方法^[6], 文中采用基于Householder变换来估计拟合函数的参数.

4 频率白噪声的最大时间区间误差估计

设 $x(t)$ 是钟的时间误差, τ 是观测时间, 则钟的最大时间区间误差 $MTIE_{t_0}(\tau)$ 定义为:

$$MTIE_{t_0}(\tau) = \max_{t_0 \leq t \leq t_0 + \tau} (x(t)) - \min_{t_0 \leq t \leq t_0 + \tau} (x(t)). \quad (8)$$

钟的时间误差 $x(t)$ 通常包括确定性变量和不同性质的随机噪声, 对于大部分的商品钟, 在不同的观测区间内表现出不同的噪声, 比如: 频率白噪声、频率闪变噪声和频率随机游走噪声, 其中频率白噪声相位上表现为随机游走. 因此, 关于随机游走过程(维纳过程)的理论可以用来研究频率白噪声, 考虑零均值的白色频率调制噪声, 相位误差通过维纳过程 $S(t)$ 描述, 并且假设维纳过程漂移为0、方差为 σ^2 . 通过几个实验室的计算, 变化

范围概率的分布为^[7]:

$$F_R(r) = \{R(0, t) \leq r\} \{R(0, t) \leq r\} \\ = \left\{ -6kf \left[\frac{2kr}{\sigma\sqrt{2t}} \right] + 4kf \left[\frac{(1+2k)r}{\sigma\sqrt{2t}} \right] + 4kf \left[\frac{(2k-1)r}{\sigma\sqrt{2t}} \right] + \right. \\ \left. k \left\{ f \left[\frac{2(1-k)r}{\sigma\sqrt{2t}} \right] - f \left[\frac{2(1+k)r}{\sigma\sqrt{2t}} \right] \right\} \right\}, \quad (9)$$

其中 $f[y] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx$ 代表误差函数, $R(0, t) = \max_{0 \leq T \leq t} S(T) - \min_{0 \leq T \leq t} S(T)$, $S(T)$ 代表维纳过程. 为了方便分析, 考虑新的变量 $R_N = R/\sigma$, $r_N = r/\sigma$, 也就是最大时间区间误差标准化, 新变量的概率分布 $F_{R_N}(r_N)$. 关于 τ 和 r_N 的解析解是不易求出的, 但是可以通过关系(10)式对其进行近似估计.

$$r_N = k_\beta \sqrt{2\tau}, \quad (10)$$

其中 k_β 为依赖置信度的置信限, 其中 $k_{80}=1.39$, $k_{90}=1.59$, $k_{95}=1.77$.

在原子钟的稳定度特性中, 我们熟悉Allan方差和谱密度, 其中Allan方差和维纳过程中 σ^2 的关系为 $\sigma^2 = \text{AVAR}(\tau)\tau$, 通过应用近似关系, 选择置信限和 τ , $\text{MTIE}(\tau, \beta)$ 的估计表示为:

$$\text{MTIE}(\tau, \beta) \approx k_\beta \sqrt{2\tau} \sigma = k_\beta \sqrt{2\tau} \sqrt{\text{AVAR}(\tau)\tau} = k_\beta \sqrt{2\tau} \frac{\sqrt{h_0}}{\sqrt{2}}, \quad (11)$$

$\text{MTIE}(\tau, \beta)$ 定义为随机变量 $\text{MTIE}(\tau)$ 的 β -百分位数, 这里 β 表示为置信度. 对于 β 的解释为: 对于任意 t_0 , 随机变量 $\text{MTIE}(\tau)$ 大于 $\text{MTIE}(\tau, \beta)$ 的值小于 $(1-\beta)$ 的百分数. (11) 式为误差区间的计算公式, 首先求出频率白噪声系数, 给定 τ 和 k_β , 即可估计最大误差区间.

5 数值分析

利用国家授时中心时频基准实验室原子钟比对数据分析: 采用2015年6月30日至2016年6月30日期间UTC(NTSC)与几台原子钟的比对数据, 数据采样间隔为1 h. 通过比对数据计算得出各台原子钟的Allan方差, 根据不同噪声对Allan方差的贡献估计原子钟频率谱密度中相应的噪声系数(见表1), 最后计算相应噪声的标量系数, 根据不同噪声的随机模拟方法产生相应原子钟的噪声(见图1-19). 并且根据维纳过程理论计算得出对于给定置信度下的频率白噪声的置信限, 也就是相应时间段的最大区间误差估计(见表2), 文中还给出了原子钟实际运行结果(见图20-23). 实际运行结果通过下面方法求得: 原子钟数据经过剔除异常值、滤除白噪声、扣除趋势项^[8-9]后获得的数据近似认为是噪声的实际运行结果, 给出了原子钟一次运行的实际最大误差(见表3).

分析表1可知: 不同原子钟在相同的取样长度和采样间隔内可以表现出不同的噪声类型, 并且对于相同的噪声类型, 幂律谱噪声系数也有差异. 图1-19是利用幂律谱系数和不同随机噪声的产生方法模拟了各台钟的不同噪声, 各图表示1种噪声参数下的模拟结果(其中图中曲线表示对给定噪声系数的多次随机模拟结果), 可以看出: 不同的幂律谱系数产生的相应噪声是有差异的. 表2根据维纳过程理论给出了频率白噪声在给定区间的最大误差估计, 给定在置信度为0.8时的置信限, 即最大区间误差估计. 从表2可以看

出: Cs2573的最大区间误差最小, Cs2965的最大区间误差最大, 大多数铯原子钟半天的最大区间误差都在3.5 ns内, 1 d的最大区间误差在5 ns内. 结合图20-23和表3给出的原子钟的单次实际运行误差, 可以看出: 一次运行的实际最大误差都在最大区间误差估计的范围内, 某种程度上是最大区间误差估计的一种反映.

表 1 原子钟的幂律谱噪声系数
Table 1 Power-law spectrum noise factors of atomic clocks

Clock type	h_0	h_{-1}	h_{-2}
Cs2573	0.98×10^{-22}	1.07×10^{-29}	–
Cs2921	1.42×10^{-22}	1.26×10^{-29}	–
Cs2922	1.30×10^{-22}	1.06×10^{-29}	–
Cs2928	1.76×10^{-22}	–	0.60×10^{-36}
Cs2959	1.22×10^{-22}	1.21×10^{-29}	–
Cs2962	1.29×10^{-22}	1.34×10^{-29}	–
Cs2965	1.93×10^{-22}	0.26×10^{-29}	–
Cs2978	1.30×10^{-22}	–	0.79×10^{-36}
Cs2981	1.39×10^{-22}	1.76×10^{-29}	1.45×10^{-36}

表 2 原子钟的频率白噪声产生的最大区间误差估计(单位: ns)
Table 2 The maximum interval error estimation of frequency white noises of atomic clocks (unit: ns)

Time interval/s	Cs2573	Cs2921	Cs2922	Cs2928	Cs2959
43200	2.86	3.44	3.29	3.83	3.19
86400	4.04	4.87	4.66	5.42	4.51
Time interval/s	Cs2962	Cs2965	Cs2978	Cs2981	–
43200	3.28	4.01	3.29	3.41	–
86400	4.64	5.67	4.66	4.82	–

表 3 原子钟实际运行最大区间误差(单位: ns)
Table 3 The actual maximum interval errors of atomic clocks (unit: ns)

Time interval/s	Cs2573	Cs2921	Cs2922	Cs2928	Cs2959
86400	2.99	1.96	3.30	2.58	1.97
Time interval/s	Cs2962	Cs2965	Cs2978	Cs2981	–
86400	2.92	4.54	4.08	2.59	–

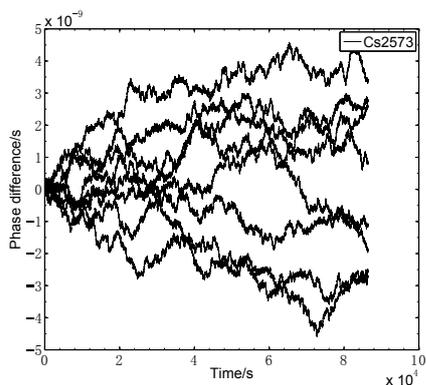


图 1 Cs2573频率白噪声

Fig. 1 Frequency white noise of Cs2573

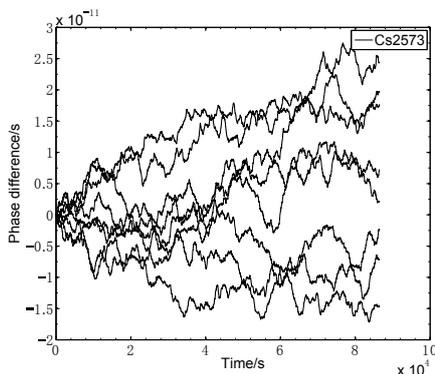


图 2 Cs2573频率闪变噪声

Fig. 2 Frequency flicker noise of Cs2573

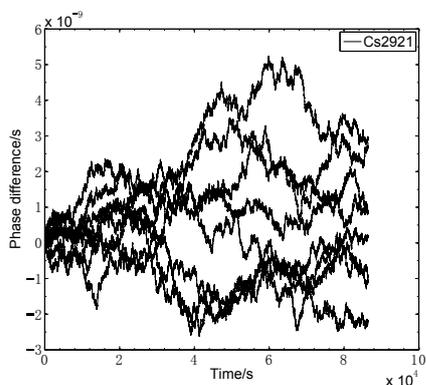


图 3 Cs2921频率白噪声

Fig. 3 Frequency white noise of Cs2921

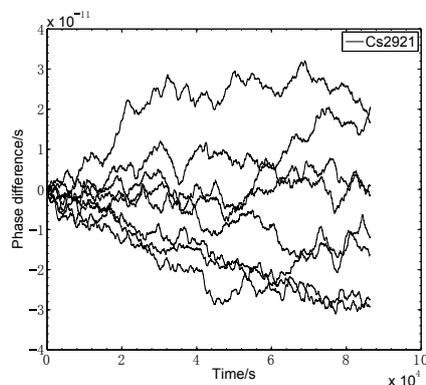


图 4 Cs2921频率闪变噪声

Fig. 4 Frequency flicker noise of Cs2921

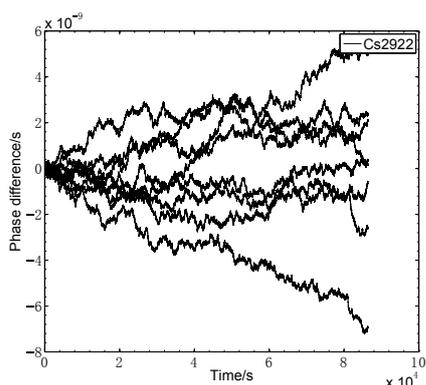


图 5 Cs2922频率白噪声

Fig. 5 Frequency white noise of Cs2922

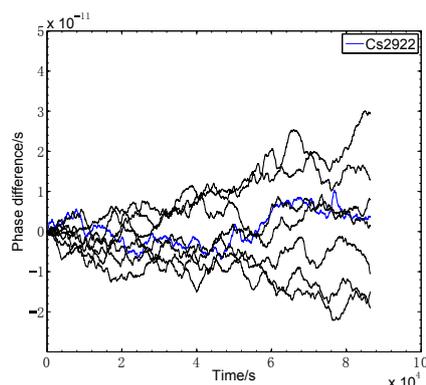


图 6 Cs2922频率闪变噪声

Fig. 6 Frequency flicker noise of Cs2922

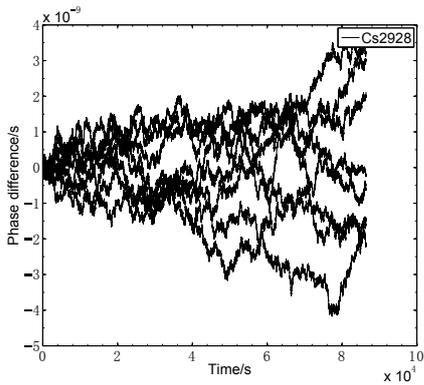


图 7 Cs2928频率白噪声

Fig. 7 Frequency white noise of Cs2928

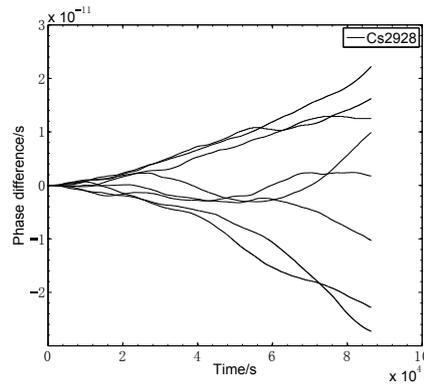


图 8 Cs2928频率随机游走噪声

Fig. 8 Frequency random walk noise of Cs2928

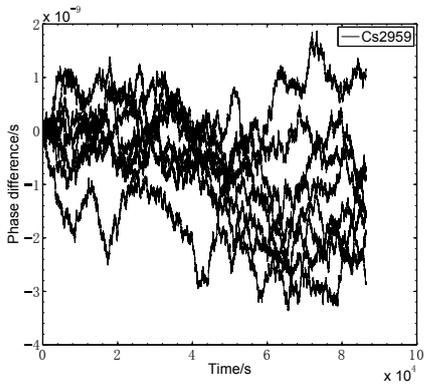


图 9 Cs2959频率白噪声

Fig. 9 Frequency white noise of Cs2959

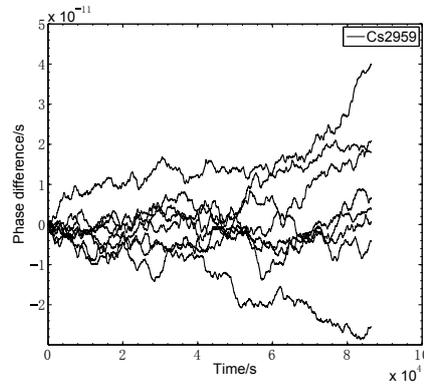


图 10 Cs2959频率闪变噪声

Fig. 10 Frequency flicker noise of Cs2959

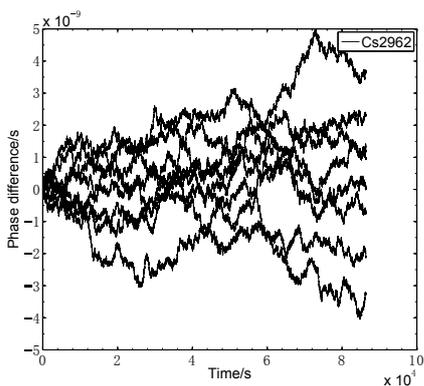


图 11 Cs2962频率白噪声

Fig. 11 Frequency white noise of Cs2962

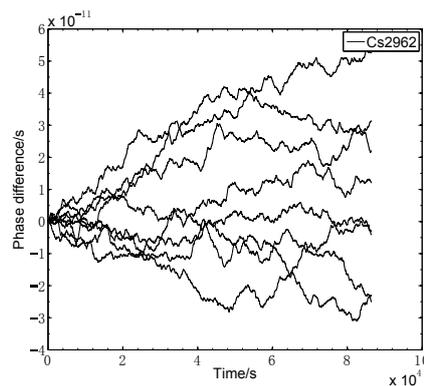


图 12 Cs2962频率闪变噪声

Fig. 12 Frequency flick noise of Cs2962

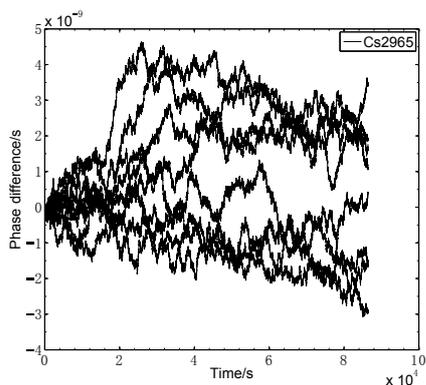


图 13 Cs2965 频率白噪声

Fig. 13 Frequency white noise of Cs2965

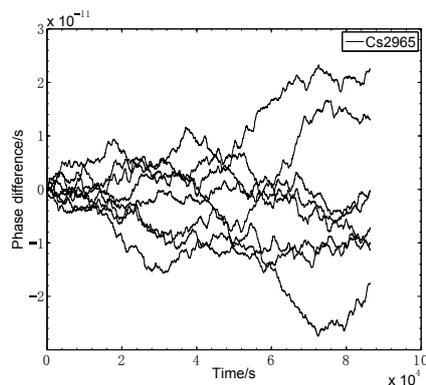


图 14 Cs2965 频率闪变噪声

Fig. 14 Frequency flicker noise of Cs2965

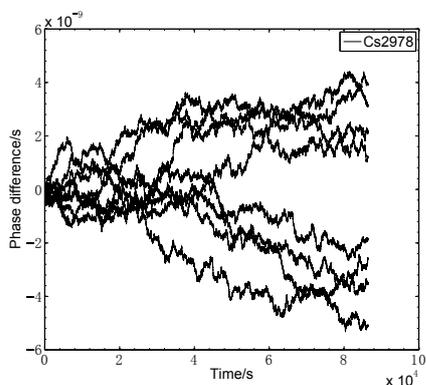


图 15 Cs2978 频率白噪声

Fig. 15 Frequency white noise of Cs2978

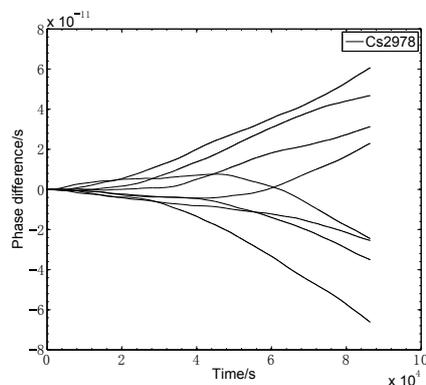


图 16 Cs2978 频率随机游走噪声

Fig. 16 Frequency random walk noise of Cs2978

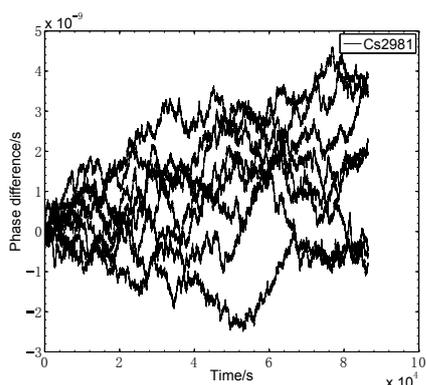


图 17 Cs2981 频率白噪声

Fig. 17 Frequency white noise of Cs2981

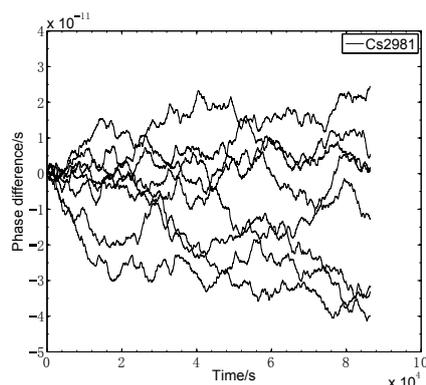


图 18 Cs2981 频率闪变噪声

Fig. 18 Frequency flicker noise of Cs2981

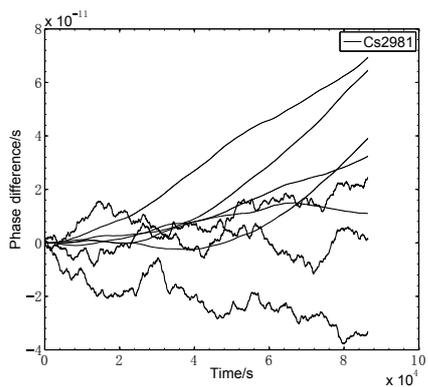


图 19 Cs2981频率随机游走噪声

Fig. 19 Frequency random walk noise of Cs2981

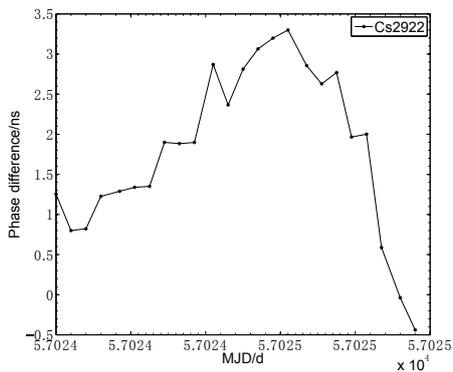


图 20 Cs2922实际误差

Fig. 20 Actual errors of Cs2922

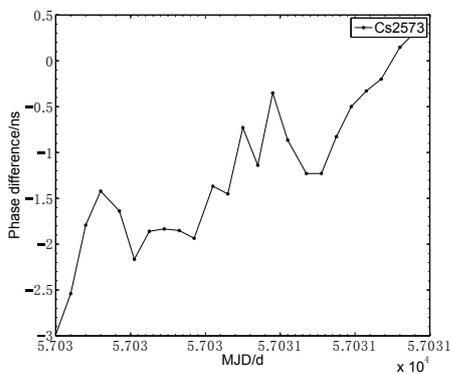


图 21 Cs2573实际误差

Fig. 21 Actual errors of Cs2573

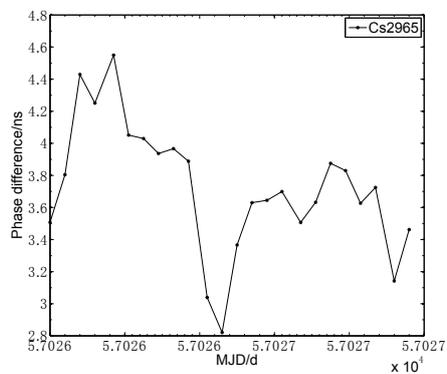


图 22 Cs2965实际误差

Fig. 22 Actual errors of Cs2965

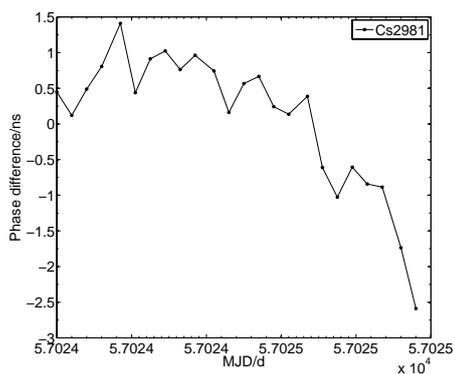


图 23 Cs2981实际误差

Fig. 23 Actual errors of Cs2981

6 结论

本文基于原子钟随机噪声的产生方法和频率白噪声的最大时间区间误差估计方法,对国家授时中心时频基准实验室的9台铯原子钟进行计算与分析.结果表明:由频率白噪声引起的最大时间区间误差存在差异,绝大多数铯原子钟1 d的最大时间区间误差在5 ns内,少数铯原子钟1 d的最大时间区间误差超过5 ns,可以认为由频率白噪声产生的误差对现代守时性能要求产生影响,不可忽略.1 d内由频率闪变噪声和频率随机游走噪声产生的最大误差都在几十皮秒内,对高性能守时铯原子钟影响不大.

参 考 文 献

- [1] 林元烈. 应用随机过程. 北京: 清华大学出版社, 2002
- [2] Shi M Y, Park C, Lee S J. IEEE Frequency Control Symposium, 2008: 71-76
- [3] Diez J, D'Angelo P, Antonio F. Proceedings of the ION GNSS International Technical Meeting of the Satellite Division, 2006: 815-821
- [4] Brown R G, Hwang Y C. Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering. New York: Wiley, 1997
- [5] Benkler E, Lisdat C, Sterr U. Metro, 2015, 52: 565
- [6] 丁月蓉, 郑大伟. 天文测量数据的处理方法. 南京: 南京大学出版社, 1990
- [7] Tavella P, Meo D. Proceedings of PTTI Time and Time Interval Meeting, 1998: 49-60
- [8] 宋会杰, 董绍武, 王正明, 等. 天文学报, 2015, 56: 628
- [9] Song H J, Dong S W, Wang Z M, et al. ChA&A, 2016, 40: 569

Research on the Method of Noise Error Estimation of Atomic Clocks

SONG Hui-jie^{1,2,3} DONG Shao-wu^{1,2} LI Wei^{1,2} ZHANG Ji-hai^{1,2}
JING Yue-juan^{1,2}

(1 National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600)
(2 Key Laboratory of Time and Frequency Primary Standards, National Time Service Center,
Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600)
(3 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

ABSTRACT The simulation methods of different noises of atomic clocks are given. The frequency flicker noise of atomic clock is studied by using the Markov process theory. The method for estimating the maximum interval error of the frequency white noise is studied by using the Wiener process theory. Based on the operation of 9 cesium atomic clocks in the time frequency reference laboratory of NTSC (National Time Service Center), the noise coefficients of the power-law spectrum model are estimated, and the simulations are carried out according to the noise models. Finally, the maximum interval error estimates of the frequency white noises generated by the 9 cesium atomic clocks have been acquired.

Key words astrometry: time, atomic clock, noise, methods: data analysis