

低质量Kepler行星的潮汐演化研究*

董 瑶^{1,2†} 季江徽^{1,2‡} 王 素^{1,2}

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210008)

(2 中国科学院行星科学重点实验室 南京 210008)

摘要 Kepler空间计划发现了大量半径小于 $4 R_{\oplus}$ ($R_{\oplus}$ 为地球半径)的近轨道行星,成为Kepler探测的特色之一,它们对当前的行星形成模型提出了新的挑战.行星与其中心恒星之间的潮汐效应对重塑这类行星的轨道构型具有重要影响.基于各种初始的轨道分布数值模拟了近轨道、低质量行星的潮汐演化,定性地给出了行星最后的轨道分布特征,轨道半长轴和峰值均随着初始的半长轴和偏心率增大而变大.对于初始的平均半长轴在0.1 au以内,平均偏心率大于0.25时,数值模拟结果与观测比较接近.潮汐耗散系数、恒星和行星的质量等相关参数对潮汐演化后的半长轴分布影响都比较小.基于数值模拟结果,尝试了揭示低质量行星的形成机制:它们很可能形成于原行星盘的较远处,具有中等的轨道偏心率,后来在原行星盘中经历了I类迁移到达目前的轨道,但是这不能排除行星的当地形成机制.

关键词 天体力学; 潮汐理论; 行星系统; 形成; 方法: 数值

中图分类号: P135; **文献标识码:** A

1 引言

到目前为止,美国国家航空航天局(NASA)执行的Kepler空间计划已释放4700多颗行星候选体数据(<http://kepler.nasa.gov>),大多数行星候选体为真实行星^[1-2].因此,在本文中我们也称行星候选体为行星.大约有3000颗Kepler行星分布于单行星系统中,其中约58%的低质量行星(例如,质量从类地行星到亚海王星)位于0.1 au以内.它们的轨道周期约为30 d,轨道半长轴的峰值分布在0.05 au附近.观测表明:低质量行星在Kepler发现的系外行星系统中是非常普遍的^[3-7].但是,行星形成理论却预言这些轨道周期低于50 d、质量为 $5-30 M_{\oplus}$ 的行星很难形成^[8].因此,研究这类行星的动力学演化对探索行星形成理论具有重要意义.

人们对这类低质量的行星系统已开展了很多研究工作,主要包括亚海王星质量行星的成分分布^[9]、行星质量与半径关系拟合^[10-11]、行星形成机制^[7,12-13]、行星轨道

2016-09-06收到原稿, 2016-12-06收到修改稿

*国家自然科学基金项目(11303102、11273068、11573075、11673072)、江苏省自然科学基金项目(BK20141509、BK20151607)、紫金山天文台小行星基金会资助

[†]dongyao@pmo.ac.cn

[‡]jijh@pmo.ac.cn

特征^[5,14]等. 有趣的是: 这些工作都与行星的形成机制密切相关, 它们从不同方面讨论了热超级地球(hot super-earth)类系外行星的形成历史. 尤其是对行星出现率(planet occurrence)的研究, 预言了行星出现率随着行星质量的减小而增大^[8,14]. 从这种意义上来说, 较高的行星出现率蕴含着很多行星形成的重要信息.

目前已被普遍接受的短周期、低质量行星的形成机制主要包括: (1)行星形成于原行星盘的较远处, 经历了行星的迁移过程^[15]; (2)经过行星与行星之间的散射作用形成^[16]; (3)当地形成机制(in situ)^[17]. 在行星形成的晚期, 潮汐效应对重塑行星最后的轨道构型有重要影响^[18–19]. 恒星在行星上产生的潮汐效应(行星的潮汐)使行星轨道衰减和圆化, 同时, 行星在恒星上产生的潮汐效应(恒星的潮汐)使行星一直向内迁移直到行星进入洛希极限附近. 以前的工作主要聚焦于研究具体的单行星或多行星系统的潮汐演化, 给出了行星轨道衰减和圆化的过程^[20–25]. 在本工作中, 我们对大量近轨道、低质量的行星开展了潮汐演化的数值模拟, 基于多种半长轴和偏心率的初始分布假设, 给出了行星演化最后的轨道半长轴分布, 并尝试揭示这类行星的形成历史. 我们推测这类行星不可能直接形成于0.05 au以内, 而是在某些迁移机制下首先堆积在0.1 au附近, 接着在潮汐作用下到达了近星轨道上.

2 方法

2.1 动力学模型

经典的潮汐理论给出, 单行星系统中潮汐效应引起行星轨道变化的平均变化率为^[22]:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{4}{3}na^{-4}\hat{s}[(1+23e^2)+7e^2D], \quad (1)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = -\frac{2}{3}nea^{-5}\hat{s}(9+7D), \quad (2)$$

其中 $D \equiv \hat{p}/(2\hat{s})$,

$$\hat{s} \equiv \frac{9}{4} \frac{k_*}{Q_*} \frac{m_p}{m_*} R_*^5, \quad \hat{p} \equiv \frac{9}{2} \frac{k_p}{Q_p} \frac{m_*}{m_p} R_p^5, \quad (3)$$

分别描述了恒星的潮汐效应和行星的潮汐效应. M 和 R 分别表示质量和半径, 下标*和p分别代表恒星和行星, k 和 Q 分别为Love数和潮汐耗散系数, a 、 e 和 n 分别表示行星的轨道半长轴、偏心率和平均运动速率. 对于类地行星系统, 行星与恒星的质量比值小, Q_* 比 Q_p 大得多, 因此, 恒星的潮汐效应相对行星的潮汐效应比较弱. 在研究行星系统的潮汐演化中, 我们通常假设潮汐耗散系数在演化过程中为常数, 定义 $Q' \equiv 3Q/(2k)$ ^[19]. 以上方程适用于恒星的旋转速率低于行星的轨道运动速率的情形, 使用耦合了Love数的潮汐耗散系数.

2.2 初值设置

我们利用7阶Runge-Kutta算法对类太阳系中的近轨道类地行星开展了大量的数值模拟. 基于Kepler单行星系统中半径小于4 $R_\oplus$ 、轨道半长轴分布在0.3 au以内的行星样本, 我们假设了大量的初始行星系统. 行星半径假设为瑞利分布^[26], 瑞利系数 $\sigma_R = 1.3 R_\oplus$, 或者用平均半径表示为 $\bar{R} = \sigma_R \sqrt{\pi/2}$. 因为凌星法发现的行星其质量不确

定, 我们通过质量和半径拟合关系 $M_p/M_\oplus = 2.69(R_p/R_\oplus)^{0.93[11]}$, 获得了行星质量在 $20 M_\oplus$ 以内. 我们假设恒星为FGK型, 质量和半径分别设为 $1 M_\odot$ 和 $1 R_\odot$. 根据先前的研究结果^[23–24], 行星的潮汐耗散系数不影响行星在潮汐演化的最后位置, 为了提高计算速率, 我们取 $Q'_p = 10$. 恒星的潮汐耗散系数受限于目前的观测, 我们采用了现在普遍认可的 $Q'_* = 10^7[27]$. 行星初始的轨道半长轴和偏心率都假设为瑞利分布, 瑞利系数分别为: $\sigma_a = 0.03, 0.05, 0.08$ (图1)和 $\sigma_e = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. 因此, 我们获得了从几个恒星半径到 0.11 au 、 0.18 au 和 0.29 au 的轨道分布区, 大约有90%的行星堆积在每个区域的峰值处. 行星动力学演化结果表明: 大多数行星在几百万年后轨道衰减为圆形, 但行星轨道在恒星的潮汐作用下继续衰减. 我们在1–6 Gyr之间随机选取演化时间, 大多数行星将经历轨道圆化, 处于恒星的潮汐演化过程, 其中有一部分行星会落入洛希极限 $a_R = 2.16 R_p (M_*/M_p)^{1/3}$ 被潮汐瓦解^[28]. 我们一共计算了15组数值模拟, 每组包含2800个行星系统, 最后大约有10%的行星被潮汐瓦解. 同时将模拟结果与1939个半径小于 $4 R_\oplus$ 的Kepler观测样本进行了比较, 并尝试研究行星的演化历史.

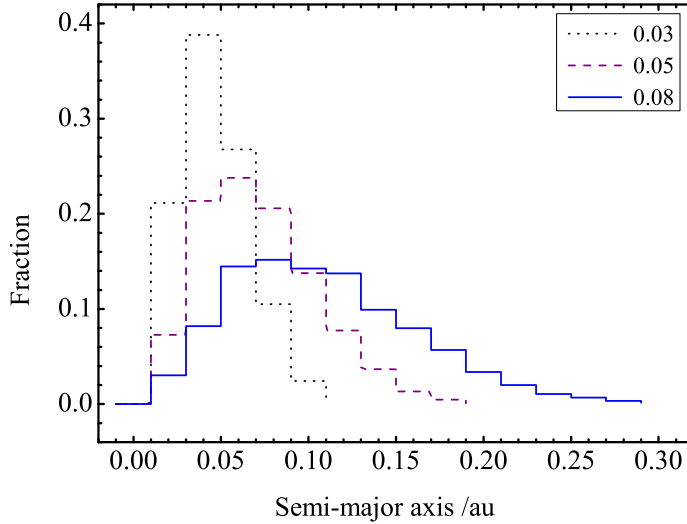


图 1 在数值模拟中, 初始行星轨道半长轴的瑞利分布, 其中瑞利参数 σ_a 分别为0.03 (点线)、0.05 (虚线)和0.08 (实线)

Fig. 1 The initial semi-major axis distributions with Rayleigh parameters σ_a of 0.03 (dotted line), 0.05 (dashed line), and 0.08 (solid line) in the simulations

3 结果

根据潮汐模型, 行星的轨道偏心率随时间的变化将影响到最后的轨道半长轴分布, 为此, 我们首先开展了行星轨道半长轴和偏心率的潮汐演化数值模拟(图2). 结果表明: 类太阳系中类地行星的轨道圆化时标约为30 Myr, 行星的轨道半长轴也同时衰减, 并且系统中恒星的潮汐效应将继续衰减行星的轨道. 下面将介绍依赖于不同初始轨道的演化结果.

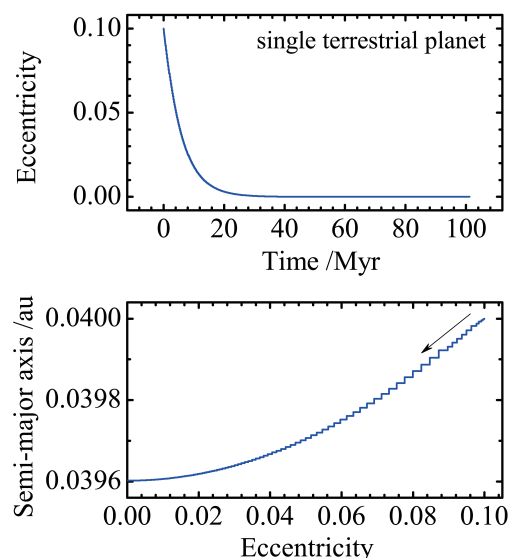


图 2 单行星系统中类地行星的轨道偏心率(上图)和半长轴(下图)的潮汐演化曲线, 其中箭头给出了演化的方向.

Fig. 2 Tidal evolution of the semi-major axis and eccentricity in a single terrestrial planetary system. The upper figure shows the time evolution of eccentricity, and the lower figure shows the semi-major axis changing with eccentricity (the arrow shows the evolution direction).

在初始半长轴的平均值为0.03 au, 初始平均偏心率分别为0.05、0.1、0.2、0.3和0.4时, 行星轨道半长轴的最后分布峰值位于0.03 au附近(图3), 超出了初始峰值高度的29%. 这是因为大多数在0.03 au以外的行星在强烈的潮汐作用下被迫迁移到峰值附近, 而且较大的初始偏心率情况会有更多的行星到达该峰值位置. 在较小偏心率时($e < 0.1$), 行星最后的轨道分布变化不大. 演化结果可用经典的潮汐理论来解释: 对0.05 au以内的行星, 潮汐效应对其轨道演化具有重要的影响^[29]. 但是, 模拟结果与观测不是很吻合. 在偏心率为0.05–0.3范围内, 约有9%–29%的行星被潮汐力迁移到0.03 au以内. 在此过程中约有15%的行星进入洛希极限被潮汐瓦解. 我们从统计结果推测, 大多数短周期的类地行星是不可能直接在近星轨道附近当地行成的, 它们很可能是在原行星盘的远处形成后迁移而来.

对初始半长轴的平均值为0.05 au的情况, 行星轨道半长轴最后的演化结果见图4. 对应于平均偏心率为0.05、0.1、0.2时, 半长轴的峰值分布在0.05 au附近, 这与观测基本吻合. 在较小偏心率分布($\sigma_e \leq 0.1$)时, 半长轴的分布基本都重合. 对 $\sigma_e > 0.2$ 时, 轨道半长轴的峰值偏移至0.03 au, 甚至在 $\sigma_e = 0.4$ 时, 峰值的变化率高达38%. 从总体上分析, 所有的峰值分布趋于同一种趋势, 轨道半长轴的峰值随着初始偏心率的增大而变大. 由此推测类似于这些低质量Kepler行星, 它们可能在0.05 au附近当地形成, 而不会由散射机制形成.

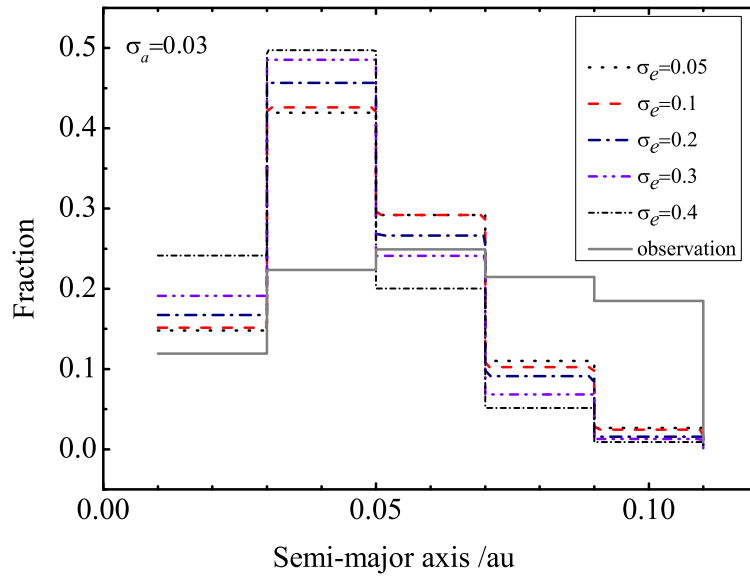


图3 $\sigma_a = 0.03$, $\sigma_e = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ 时的最后轨道半长轴分布, 其中实线表示观测数据.

Fig. 3 The final distributions of semi-major axis corresponding to the case of $\sigma_a = 0.03$, with the initial eccentricity peak of 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, and 0.4, respectively. The solid line represents the observed data.

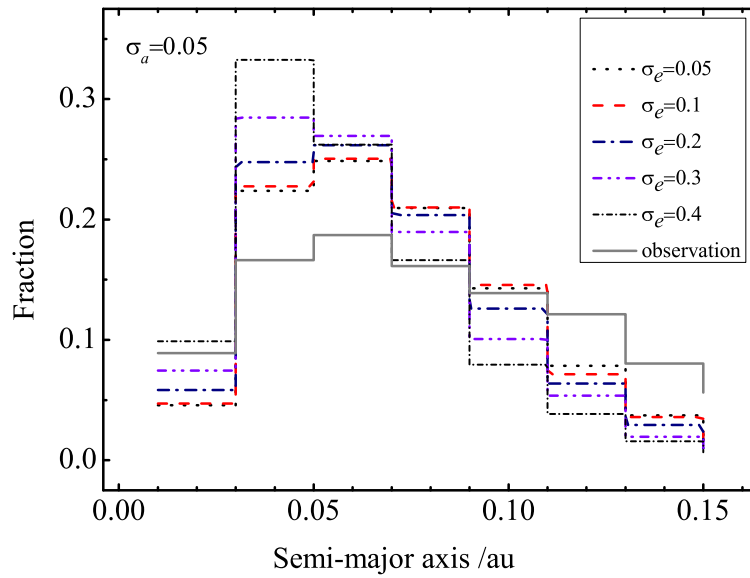


图4 与图3类似, $\sigma_a = 0.05$ 时最后轨道半长轴分布

Fig. 4 Similar to Fig. 3, the final distributions of semi-major axis corresponding to the case of $\sigma_a = 0.05$

同样, 对于更远的初始轨道分布($\sigma_a = 0.08$)时, 最后的演化结果见图5. 对 $\sigma_e < 0.2$ 的情况, 演化结果与初始分布基本相同, 这意味着较小的初始偏心率情况下, 行星与恒星之间的潮汐作用比较弱. 当 $\sigma_e > 0.2$ 时, 半长轴的峰值分布由0.08 au减小到0.05 au. 这表明有更多的行星堆积在0.05 au附近, 结果与观测比较接近. 由此可见, 潮汐演化结果非常依赖于初始的偏心率分布. 由此我们推测, 这些类地行星在潮汐演化之前很有可能以较低或中等的偏心率堆积在0.1 au附近.

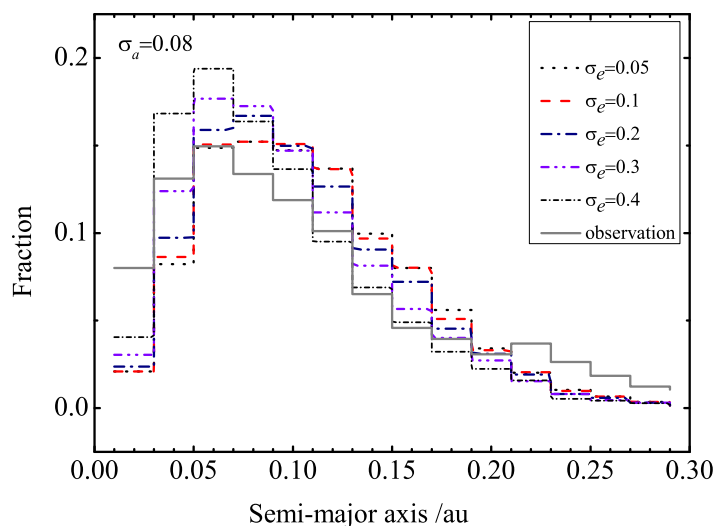


图 5 与图3-4类似, $\sigma_a = 0.08$ 时最后轨道半长轴分布

Fig. 5 Similar to Figs.3-4, the final distributions of semi-major axis corresponding to the case of $\sigma_a = 0.08$

4 各种参数的影响

4.1 潮汐演化时间

首先我们给出了从百万年到十亿年的演化时间内行星轨道的潮汐演化过程. 图6给出了行星轨道半长轴和偏心率分别经历 10^6 、 10^7 、 10^8 和 10^9 yr的过程. 初始的行星轨道半长轴从0.01 au到0.12 au范围内随机分布, 初始的偏心率在0.4以内随机分布. 在上面4个演化时标内, 分别有接近50%、76%、92%、99%的行星变为圆形轨道($e < 0.02$). 这些结果表明: 行星在经历了几百万年的轨道圆化后, 恒星的潮汐效应在后续演化过程中起着主导作用, 使行星不断靠近恒星. 本工作统计了大部分行星轨道变为圆形时的轨道半长轴.

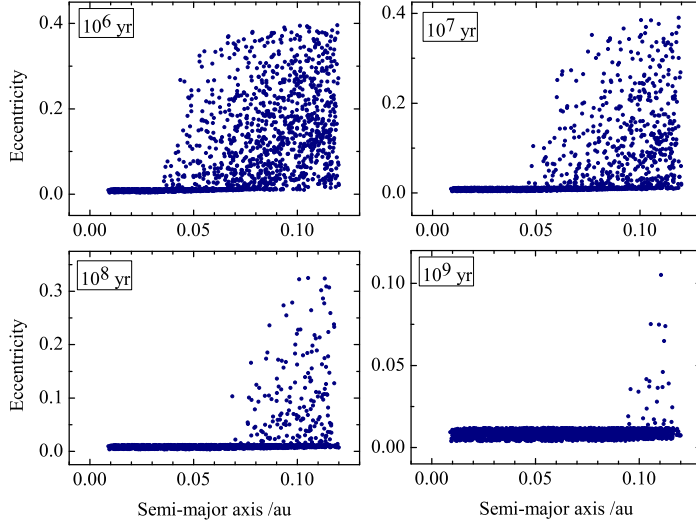


图 6 行星系统经历不同演化时标后的轨道半长轴和偏心率分布. 初始轨道半长轴和偏心率分别在0.01–0.12 au和0–0.4之间随机分布. 轨道半长轴在0.1 au以内的行星在十亿年后轨道几乎都被圆化.

Fig. 6 The final orbital semi-major axis and eccentricity after tidal evolution with different timescales. The initial orbital semi-major axis and eccentricity are chosen randomly from 0.01–0.12 au, and 0–0.4, respectively. The planetary orbits within 0.1 au are almost circularized after gillion years' evolution.

4.2 潮汐耗散系数

潮汐耗散系数是潮汐演化过程中不确定的重要参数, 其中, Q'_p 对行星最后的轨道半长轴没有影响, 而对行星的轨道圆化时标起关键作用. 这与前人的研究结果一致, Q'_p 对偏心率的影响只改变演化时标, 而不影响偏心率的幅度^[20,30]. 图7表明了行星轨道半长轴分布的差异来源于不同的偏心率, 而与 Q'_p 无关. 然而, 即使行星轨道已经被圆化, 恒星的潮汐耗散却直接影响着行星的轨道衰减. 因此, 我们研究了 $\sigma_a = 0.03$ 时不同 Q'_* 的影响. Q'_* 分别为 10^9 和 10^7 的潮汐演化曲线见图8, 半长轴的峰值随着 Q'_* 增大而变小. 同时我们还与不同偏心率分布的最后轨道半长轴分布进行了比较, 结果表明: 初始的轨道偏心率分布比恒星的潮汐耗散系数对行星最后位置的影响更大. 虽然峰值在同一位置处相吻合, 但是更高的初始偏心率和较小的潮汐耗散系数会有更高的峰值幅度.

4.3 质量和半径

我们首先改变恒星的质量与半径关系, 取主序恒星的 $R/R_\odot = (M/M_\odot)^\lambda$, λ 取值范围为 0.5–1^[31]. 我们选取3个 λ 值, 获得了3个典型的 (R, M) 对, 分别为: (3, 2.4)、(0.75–1.25, 0.8–1.2) 和 (0.2, 0.4), 行星潮汐演化的数值模拟结果见图9. 我们发现恒星的质量只对峰值的幅度有较小的改变. 选取太阳质量和太阳半径为恒星参数的演化结果与第2类的计算结果最相似.

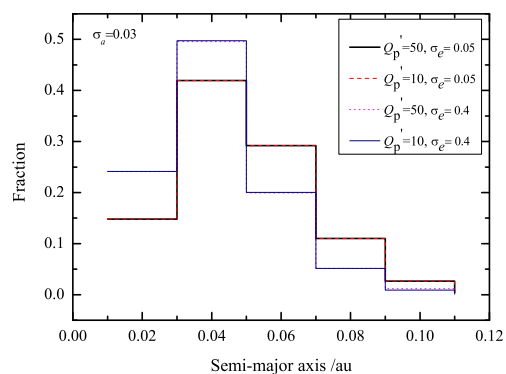


图 7 不同潮汐耗散系数和初始偏心率的潮汐演化过程. 最后的轨道半长轴依赖于初始的偏心率, 而与 Q_p' 无关

Fig. 7 The final distributions of semi-major axis with different Q_p' and eccentricity, which depend on the initial eccentricity but not on Q_p'

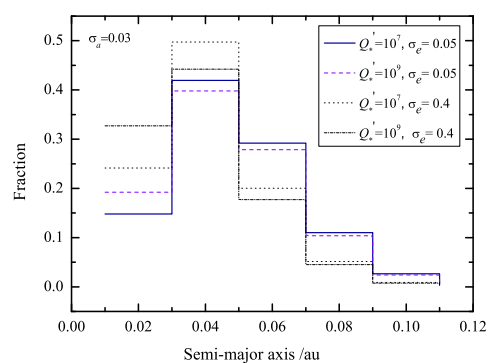


图 8 不同 Q_*' 和初始偏心率的潮汐演化过程. Q_*' 对最后轨道半长轴的影响相对初始偏心率较小.

Fig. 8 The final distributions of semi-major axis with different Q_*' and eccentricity, whose dependence on Q_*' is much weaker than that of the initial eccentricity.

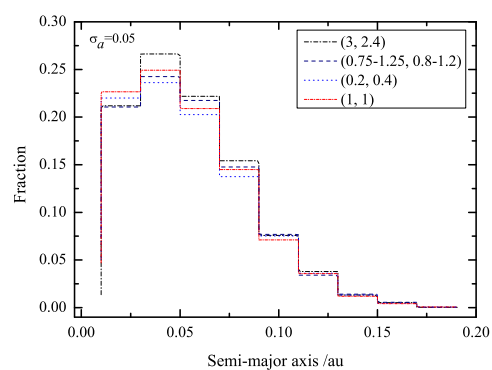


图 9 不同恒星质量-半径关系的潮汐演化结果

Fig. 9 The final orbital distribution of different stellar mass-radius relations

图10给出了行星半径为 $0.8-4 R_{\oplus}$ 的随机分布与瑞利参数为 $\sigma_R = 1.3 R_{\oplus}$ 的比较结果, 我们分别标记为 R_{rand} 和 R_{rayl} . 行星最后的轨道半长轴分布在相同偏心率分布情况下具有相似的峰值位置. 然而, 在相同半径分布下, 结果却随着偏心率的分布有明显的偏差. 因此, 半径的分布只是影响了峰值的幅度而不是峰值的位置. 这表明行星半径对轨道半长轴的最后分布影响不大.

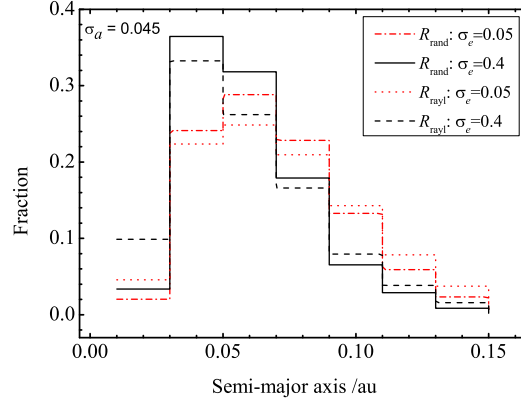


图 10 不同行星半径的潮汐演化结果. R_{rand} 为 $0.8-4 R_{\oplus}$ 之间的随机分布, R_{rayl} 为瑞利参数 $\sigma_R = 1.3 R_{\oplus}$ 的瑞利分布.

Fig. 10 The final orbital distribution with different planet radii: R_{rand} case means that R_p is assumed as random values chosen from 0.8 to $4 R_{\oplus}$, and R_{rayl} as Rayleigh distribution with $\sigma_R = 1.3 R_{\oplus}$.

综上, 虽然行星的潮汐演化结果与行星的轨道及行星系统的一些物理参数密切相关, 但是轨道半长轴和偏心率是其中最重要的参数. 由于潮汐演化是能量耗散的过程, 在没有其他外力的作用下, 系统的总角动量守恒, 因此, 潮汐力总是使行星的轨道衰减和圆化. 行星和恒星的物理参数以及潮汐耗散系数对行星最后的轨道分布影响甚小. 在本工作中, 大多数行星在经历10亿年的潮汐演化后变为圆形轨道. 潮汐耗散系数代表着潮汐耗散的强度, 其值越小代表越强的耗散, 反之表示耗散比较弱. 潮汐理论和数值结果都表明: 行星的潮汐耗散系数对行星圆化后的最后轨道半长轴没有影响.

5 总结与讨论

我们利用经典的潮汐模型对大量近轨道、低质量的系外行星开展了潮汐演化的数值计算, 给出了行星在潮汐演化后的轨道分布特征: 轨道半长轴分布的峰值随半长轴初值的增大而向较远的位置偏移; 对于相同半长轴的初值分布, 在经历潮汐演化后聚集在峰值的行星数目随偏心率的初值增大而变大. 在初始平均半长轴为 0.03 au 时, 所有半长轴的峰值重叠在同一位置, 而对于其他初始半长轴的情况, 当 $\sigma_e > 0.2$, 峰值分别分布于 0.03 au 和 0.05 au . 研究结果给出: $\sigma_a = 0.08, \sigma_e > 0.2$, 半长轴的最后分布与观测比较一致, 但是行星的分布比率仍有一定的偏差. 我们推测有两种因素导致了这种偏差: 一种可能是数值模拟中采用的参数与观测值有差异; 另一种可能是低质量行星的观测数目尚需要修正, 还有一部分近轨道上的低质量行星未被发现^[8]. 同时, 我们还探讨了潮汐耗散系数、行星和恒星的质量等参数对潮汐演化的影响. 我们发现所有这些参数只会略微

影响行星轨道半长轴分布的峰值幅度, 而不影响峰值的位置.

最后, 我们尝试着探索这些近轨道、低质量行星的形成机制. 我们推测, 大多数行星在潮汐演化之前不可能形成于 0.05 au 附近, 因为强烈的潮汐效应会使行星衰减到更近的轨道, 或者大部分被潮汐撕裂. 行星可能聚集在距离恒星稍远的位置(例如 0.1 au), 形成时具有中等偏心率. 数值模拟结果给出: 低质量行星在原行星盘中通过 I 类迁移可以进入 0.1 au 附近^[32–33], 但是这并不意味着所有的行星都是在雪线附近形成. 目前亚海王星质量行星在 0.25 au 以内的高出现率似乎支持了行星的当地形成模型^[17]. 但是这些行星形成的理论模型仍然需要后续观测的进一步证实. 我们假设这些中等偏心率的行星是经过 I 类迁移或者当地形成到达 0.1 au 附近, 期间由于某些机制影响, 例如: 多行星系统中伴星的引力摄动激发了偏心率, 接着在潮汐作用下到达 0.05 au 以内也是可信的. 今后我们还将研究多行星系统的潮汐演化过程, 其中的引力摄动与潮汐效应之间的耦合可能会影响到行星最后的轨道分布, 从而形成不同的轨道构型.

参 考 文 献

- [1] Morton T D, Johnson J A. *ApJ*, 2011, 738: 170
- [2] Fressin F, Torres G, Charbonneau D, et al. *ApJ*, 2013, 766: 81
- [3] Howard A W, Marcy G W, Johnson J A, et al. *Science*, 2010, 330: 29
- [4] Batalha N M, Rowe J F, Bryson S T, et al. *ApJS*, 2013, 204: 24
- [5] Marcy G W, Isaacson H, Howard A W, et al. *ApJS*, 2014, 210: 20
- [6] Marcy G W, Weiss L M, Petigura E A, et al. *PNAS*, 2014, 111: 12655
- [7] Schlaufman K C. *ApJL*, 2015, 799: L26
- [8] Howard A W, Marcy G W, Bryson S T. *ApJS*, 2012, 201: 15
- [9] Wolfgang A, Lopez E. *ApJ*, 2015, 806: 183
- [10] Wolfgang A, Rogers L A, Ford E B. *ApJ*, 2016, 825: 19
- [11] Weiss L M, Marcy G W. *ApJL*, 2014, 783: L6
- [12] Raymond S N, Barnes R, Mandell A M. *MNRAS*, 2008, 384: 663
- [13] Schlichting H E. *ApJL*, 2014, 795: L15
- [14] Petigura E A, Marcy G W, Howard A W. *ApJ*, 2013, 770: 69
- [15] Lin D, Bodenheimer P, Richardson D. *Nature*, 1996, 380: 606
- [16] Chatterjee S, Ford E B, Matsumura S, et al. *ApJ*, 2008, 686: 580
- [17] Chiang E, Laughlin G. *MNRAS*, 2013, 431: 3444
- [18] Rasio F A, Ford E B. *Science*, 1996, 274: 954
- [19] Jackson B, Greenberg R, Barnes R. *ApJ*, 2008, 678: 1396
- [20] Mardling R A. *MNRAS*, 2007, 382: 1768
- [21] Zhou J L, Lin D N C. *Proceedings of the IAU Symposium*, 2008, 249: 285
- [22] Rodríguez A, Ferraz-Mello S, Michtchenko T A, et al. *MNRAS*, 2011, 415: 2349
- [23] Dong Y, Ji J H. *SCPMA*, 2012, 55: 872
- [24] Dong Y, Ji J H. *MNRAS*, 2013, 274: 954
- [25] Chen Y Y, Zhou J L, Ma Y H. *SCPMA*, 2015, 58: 1
- [26] Moorhead A V, Ford E B, Morehead R C, et al. *ApJS*, 2011, 197: 1
- [27] Carone L, Patzöld M. *P&SS*, 2007, 55: 643
- [28] Faber J A, Rasio F A, Willems B. *Icarus*, 2005, 175: 248
- [29] Jackson B, Barnes R, Greenberg R. *ApJ*, 2009, 698: 1357
- [30] Laskar J, Boué G, Correia A C M. *A&A*, 2012, 538: 105
- [31] Kippenhahn R, Weigert A. *Stellar Structure and Evolution*. Berlin: Springer-Verlag, 1990

- [32] Fogg M J, Nelson R P. A&A, 2007, 472: 1003
 [33] Wang S, Ji J H, Zhou J L. ApJ, 2012, 753: 170

Tidal Evolution of the Kepler Planets with Radii Less than $4 R_{\oplus}$

DONG Yao^{1,2} JI Jiang-hui^{1,2} WANG Su^{1,2}

(1 Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008)

(2 Key Laboratory of Planetary Sciences, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008)

ABSTRACT The planets with a radius $< 4 R_{\oplus}$ observed by the Kepler mission exhibit a unique feature, and propose a challenge for current planetary formation models. The tidal effects between the planet and the host star play an essential role in reconfiguring the final orbits of the short-period planets. In this work, based on various initial Rayleigh distributions of the orbital elements, the final semi-major axis distributions of the planets with a radius $< 4 R_{\oplus}$ after suffering tidal evolution are investigated. Our simulations qualitatively reveal various statistical properties: the peaks of semi-major axes increase with the mean semi-major axis, and the peak amplitude of the final semi-major axis distribution increases with the mean eccentricity for all kinds of semi-major axis distributions. For the case that the mean semi-major axis is about 0.1 au and the mean eccentricity is larger than 0.25, the amplitude peaks of the final semi-major axis are approximately consistent with observations. In addition, the roles of other parameters such as the tidal dissipation factor, stellar, and planetary mass etc, are explored in this study by performing numerical simulations, and it is found that they have little effect on the amplitudes of the peaks. Our simulation results provide some clues of planetary formation for such low-mass planets. We speculate that these low-mass planets are possible to form in a farther place of the proto-planetary disk with a moderate eccentricity via type I migration, and it is possible to form in situ too.

Key words celestial mechanics: tidal theory, planetary systems: formation, methods: numerical