

经过月球旁近的低能地月转移轨道*

韦炳威[†] 李银山[‡]

(河北工业大学机械工程学院力学系 天津 300130)

摘要 基于日、地、月构成的双圆问题(BCP, Bicircular Problem)研究了经过月球旁近的低能地月转移轨道,总结了这些轨道在相空间的分布特点. 首先基于BCP模型,利用BCP系统的不变流形,搜索出经过月球旁近的低能地月转移轨道. 然后把时间作为非自治系统相空间的增广维度,给出了能够反映出转移轨道在增广相空间分布情况的状态空间图,研究表明转移轨道以族的形式分布于相空间中,并且任意时刻都可以作为此类轨道的出发时刻. 最后分析了不同转移轨道族各自速度增量、飞行时间以及系统能量的变化规律,分别得到了速度增量最优轨道族和飞行时间最优轨道族.

关键词 天体力学, 航天器, 行星与卫星: 普通, 方法: 数值

中图分类号: P173; **文献标识码:** A

1 引言

低能地月转移轨道研究之所以受到广泛关注,是因为Belbruno在1987年提出的弱稳定边界理论使得日本的Muses-A号沿着低能耗的月球弹道捕获式轨道成功转移到了月球表面附近^[1]. 此后,在该领域中最显著的发展是将非线性系统的不变流形运用到了低能转移轨道的设计中. Koon和Lo等人通过拼接两个三体系统的不变流形巧妙地提出了低能地月弹道转移轨道的设计方法^[2-4]. 在此基础上,龚胜平等人考虑了黄白交角对转移轨道的影响^[5-8];侯锡云等人给出了地-月系统下无动力返回轨道的设计方法^[9-10];Parker^[11]用6个参数描述了低能地月弹道轨道,研究表明这些轨道以族的形式存在;此外,Gómez等^[12-14]、Howell等^[15-17]和Marsden等^[18]都在限制性三体问题的不变流形研究方面做了重要工作. 这些研究为地月低能转移轨道的设计奠定了重要的基础.

但上述工作都集中在圆型限制性三体问题(Circular Restricted Three-body Problem, CR3BP)模型的动力学和数值方法研究方面,另一方面针对日、地、月构成的双圆问题(Bicircular Problem, BCP)动力学特点的研究也一直被学者关注. Howell等^[19]利用了CR3BP中共线平动点附近的Halo轨道找到了一些特定构型下BCP中的周期轨道;Wilson等^[20]在BCP下讨论了一些使用月球引力辅助轨道的设计方法;

2016-12-20收到原稿, 2017-05-31收到修改稿

*国家自然科学基金项目(10632040)资助

[†]oscar_bing@163.com

[‡]yinshanli@126.com

Short和Howell^[21]利用拉格朗日拟序结构(Lagrangian Coherent Structure, LCS)计算了日-地-月-航天器BCP系统的不变流形,并设计了地-月系统 L_2 点附近的转移轨道.祁瑞和徐世杰^[22]也利用了LCS计算了BCP系统的不变流形(作者称其为时间相关不变流形),并利用流形构建了低能地月转移轨道.Qi和Xu首先在BCP系统中研究了月球引力辅助的轨道,并给出了地-月系统引力影响球,在该影响球内应该使用BCP模型处理^[23].之后,Qi和Xu又在BCP系统下研究了低能地月转移轨道,提出了近优化的月球捕获轨道^[24].他们针对BCP的研究主要集中在基于不变流形的转移轨道设计与月球引力辅助轨道的优化方面,然而目前尚未有文献论及将经过月球旁近轨道与低能地月转移轨道相结合的研究和总结.

本文在上述研究工作的基础上,基于BCP模型,重点研究经过月球旁近的平面低能地月转移轨道,总结了这些轨道在相空间的分布特点.研究表明在相空间中至少存在16种经过月球旁近的低能地月转移轨道族,然后逐一分析各个轨道族的出发速度增量、Poincaré截面处速度增量、飞行时间、出发时刻和系统能量的变化特点,分析航天器经过月球旁近时的近月点高度对系统能量变化的影响,最后给出速度增量最优的轨道族以及飞行时间最优的轨道族.此类轨道能够有效地降低从地球低轨道出发的速度增量,从而进一步节省能耗,因此本文的研究对于低能地月转移轨道设计具有重要的参考意义.

2 基本方程

本文在BCP模型下进行研究,但在两个不同的坐标系下建立基本方程,分别是日-地旋转坐标系和地-月旋转坐标系,两个不同坐标系下的方程通过坐标变换进行联系.

2.1 日-地旋转坐标系的运动方程

假设太阳和地球绕其公共质心做匀速圆周运动,月球绕地球质心做匀速圆周运动,日、地、月在同一平面运动,航天器看作质量无限小的质点,在日-地附近空间运动.以日-地质心为坐标原点,航天器的运动微分方程采用无量纲形式^[4],令 μ_{SE} 和 μ_M 分别为地球和月球的质量; a_M 为地球与月球的平均距离; ω_M 为月球绕地球旋转的角速度; θ_M 为初始相角,则运动微分方程如下:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \\ \ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}, \end{cases} \quad (1)$$

式中

$$U = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1 - \mu_{SE}}{r_S} - \frac{\mu_{SE}}{r_E} - \frac{\mu_M}{r_M} - \frac{1}{2}\mu_{SE}(1 - \mu_{SE}), \quad (2)$$

$$\begin{cases} r_S = \sqrt{(x + \mu_{SE})^2 + y^2 + z^2}, \\ r_E = \sqrt{(x - 1 + \mu_{SE})^2 + y^2 + z^2}, \\ r_M = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + z^2}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_M = a_M \cos(\omega_M t + \theta_M) + 1 - \mu_{SE}, \\ y_M = a_M \sin(\omega_M t + \theta_M). \end{cases} \quad (4)$$

其中, r_S 、 r_E 和 r_M 分别是航天器到太阳、地球和月亮的距离. 值得注意的是: 上述假设与BCP模型的基本假设(2.2节中的假设)是不一致的, 即太阳应与地-月质心做匀速圆周运动, 但当3个主天体的质量满足 $M_S \gg M_E \gg M_M$ 时, 地-月质心在该坐标系下被近似到了地球形心位置上, 该假设在文献[4]中已被使用, 因此本文沿用此假设.

2.2 地-月旋转坐标系的运动方程

假设地球和月球绕其公共质心做匀速圆周运动, 同时太阳绕地-月质心做匀速圆周运动, 且它们的运动都处于同一平面内, 航天器看作质量无限小的质点在地-月附近空间运动. 以地-月质心为坐标原点, 采用无量纲形式^[3], μ_{EM} 和 μ_S 分别为月球和太阳的质量; a_S 为太阳到坐标原点的距离; ω_S 为太阳绕坐标原点旋转的相合角速度的绝对值; θ_0 为太阳初始相角, 则运动微分方程为:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}, \\ \ddot{z} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial z}, \end{cases} \quad (5)$$

式中:

$$\bar{U} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1 - \mu_{EM}}{r_E} - \frac{\mu_{EM}}{r_M} - \frac{\mu_S}{r_S} + \frac{\mu_S}{a_S^3} x_S x + \frac{\mu_S}{a_S^3} y_S y - \frac{1}{2} \mu_{EM} (1 - \mu_{EM}), \quad (6)$$

$$\begin{cases} r_E = \sqrt{(x + \mu_{EM})^2 + y^2 + z^2}, \\ r_M = \sqrt{(x - 1 + \mu_{EM})^2 + y^2 + z^2}, \\ r_S = \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + z^2}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} x_S = a_S \cos(-\omega_S t + \theta_0), \\ y_S = a_S \sin(-\omega_S t + \theta_0). \end{cases} \quad (8)$$

3 轨道描述

本文仅研究平面转移轨道情况, 经过月球旁近的低能地月转移轨道被Poincaré截面分为两段(如图1所示): 经过月球旁近段和月球弹道捕获段. 经过月球旁近段轨道从地球低轨道出发(在出发点处需要施加出发速度脉冲 Δv_1), 至少经过一次月球旁近后到达Poincaré截面(在日-地旋转坐标系中选取地球所在 x 坐标线为Poincaré截面). 月球弹道捕获段轨道从Poincaré截面出发(在该点处需要施加速度脉冲 Δv_2)到月球低轨道, 最后在近月点处需要施加捕获速度脉冲 Δv_3 使航天器被月球捕获.

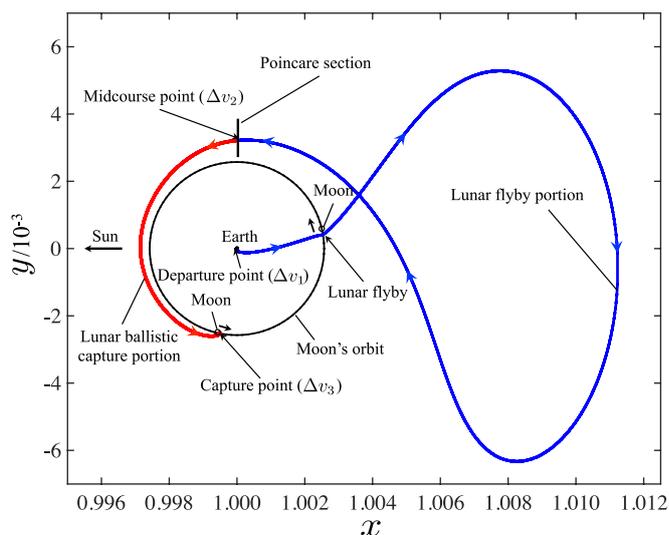


图 1 经过月球旁近的低能地月转移轨道示意图

Fig. 1 Sketch of the low-energy lunar trajectory with lunar flyby

4 月球弹道捕获段轨道设计

本节主要介绍如何利用BCP地-月旋转坐标系下 L_2 点附近的稳定流形设计月球弹道捕获段轨道. 首先构造出BCP的周期轨道, 然后由周期轨道延拓成不变流形, 最后计算并分析了月球弹道捕获段轨道.

4.1 周期轨道

首先构建地-月旋转坐标系下 L_2 点附近的周期轨道. 由(5)–(8)式可知, 不妨设 $\theta_0 = 0$ 时, BCP系统具有如下的对称性:

$$(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \leftrightarrow (x, -y, z, -\dot{x}, \dot{y}, -\dot{z}, -t). \quad (9)$$

若在 $t = 0$ 时刻航天器从 x - y 平面垂直穿过, 经过一半的太阳相合周期后, 航天器再次垂直穿过 x - y 平面. 这一性质与CR3BP中的Halo轨道类似, 故可以寻找合适的Halo轨道作为初始近似, 经过若干次微分修正, 得到满足精度要求的周期轨道. 这里所谓合适的Halo轨道是指其周期应该与太阳相合周期 T_S 相协调, 即 $T = kT_S/j$, k 和 j 为正整数. 当

太阳完成了 k 个相合周期, 航天器便完成了 j 个Halo轨道周期. 在日-地-月-航天器系统中, 选取可能的配置 $k = 1$ 和 $j = 2$, 即需要寻找周期为太阳相合周期一半的Halo轨道作为初始近似.

由于太阳的引力摄动对原CR3BP系统影响较大, 微分修正过程要求太阳质量需逐步地引入. 将(6)式中 μ_S 改写为 $\epsilon\mu_S$, 即乘上一变量系数, 且 ϵ 在 $[0, 1]$ 之间取值. 令初始步长为0.01, 使 ϵ 从0逐渐增加. 在每个特定的 ϵ 值下进行上述的微分修正过程, 若步长适当, 5-7次迭代可收敛, 若微分修正过程不收敛, 则减小步长, 直到 $\epsilon = 1$.

如图2所示各个 ϵ 值下经过微分修正后得到的周期轨道. 如图3所示, z 方向的坐标分量初值 z_0 随 ϵ 的变化曲线, 随着 ϵ 的增大, 周期轨道在 z 方向的振幅逐渐减小, 当 $\epsilon = 0.50703$ 时, z_0 已经接近于零, 当 ϵ 继续增大时, z_0 一直保持在接近于零的状态. 值得注意的是: 图3的曲线在 $\epsilon = 0.50703$ 附近不光滑, 这是由于在上述微分修正过程中随着 z 方向的振幅接近于零, 对 z 方向的修正值不再依赖除 z 方向速度以外的其他初值状态量, 因此 z_0 一旦足够接近于零就不会再变化, 可认为在此过程中原有的空间轨道退化成了平面轨道, 而不是在 $\epsilon = 0.50703$ 附近出现了分岔.

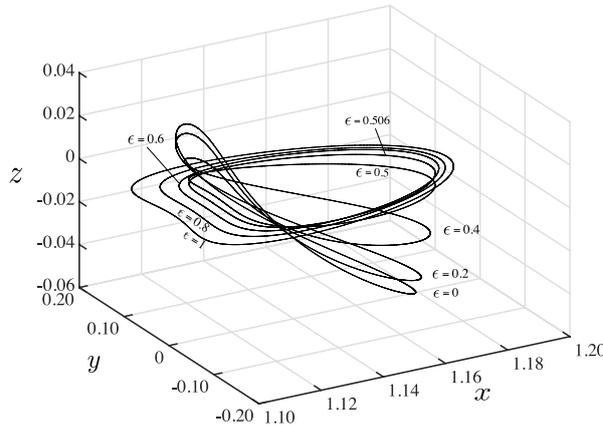


图2 不同 ϵ 值下的周期轨道

Fig. 2 Periodic orbits with different values of ϵ

4.2 不变流形的计算

BCP的不变流形可以通过周期轨道的延拓得到, 但需要充分考虑某一流 $\phi(t; t_0; \mathbf{u}_0)$ 对初始时刻的依赖性, 即CR3BP中的不变流形可以在同一初始时刻进行延拓, 而BCP的不变流形在每个离散点处要求的初始时刻是不同的. 如图4所示在 L_2 点附近利用周期轨道延拓得到的稳定流形和不稳定流形. 不变流形严格依赖于从周期轨道延拓时选取的偏移微量 $\Delta d \cdot \mathbf{V}_{EM}$, 其中 \mathbf{V}_{EM} 为稳定或不稳定流形对应的单位特征向量, 本文选取 $\Delta d = 10^{-6}$.

由文献[22]已得出结论, BCP系统的不变流形依然以管状的形式存在于相空间中, 并且流形管内和管外同样存在穿越轨道和非穿越轨道, 于是可以利用BCP系统的不变流形进行月球弹道捕获段轨道的设计.

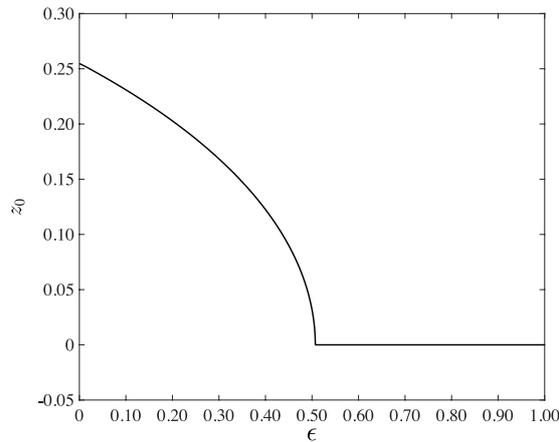


图 3 z 坐标分量初值随 ϵ 的变化曲线

Fig. 3 The curve of relation between the initial z coordinate component and ϵ

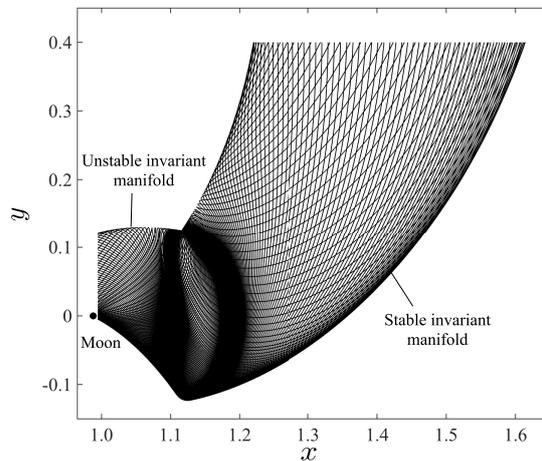


图 4 BCP 系统的稳定流形和不稳定流形

Fig. 4 Stable and unstable invariant manifolds of the BCP system

4.3 月球弹道捕获段轨道的计算

在日-地旋转坐标系下, 选取 $x = 1 - \mu_{SE}$ 为 Poincaré 截面, 使地-月旋转坐标系下的稳定流形被该 Poincaré 截面截住, 如图 5 所示. 图 5 中还给出了在日-地-航天器组成的 CR3BP 下, 由 L_2 点附近某一 Lyapunov 轨道延拓得到的不稳定流形 (选取延拓偏移微量 $\Delta d \cdot \mathbf{V}_{SE}^U = -10^{-7} \mathbf{V}_{SE}^U$, \mathbf{V}_{SE}^U 为对应不稳定流形方向的单位特征向量), 可见 BCP 系统的稳定流形与日-地系下的不稳定流形在 Poincaré 截面相交, 故依靠 BCP 系统稳定流形设计的月球弹道捕获段轨道可以被拼接成低能地月转移轨道.

本文选取距离月球表面 200 km 高度的平面圆轨道为目标轨道. 由 Poincaré 截面出发, 沿正向时间积分, 搜索能够到达目标轨道的月球弹道捕获轨道, 结果表明肯定存在多族这样的轨道. 如图 6 所示, 以不绕转平动点的族 1 和绕转平动点一圈的族 2 转移轨道为例. 在地-月旋转坐标系下 Poincaré 截面被拉扯成了曲面, 其中族 2 的轨道由 Poincaré 截面出

发, 在BCP的周期轨道附近环绕一周然后两次经过月球表面附近, 显然族2需要更长的飞行时间. 为了得到合适的月球弹道捕获段轨道, 还需比较两族轨道在近月点处所施加的捕获速度脉冲增量 Δv_3 .

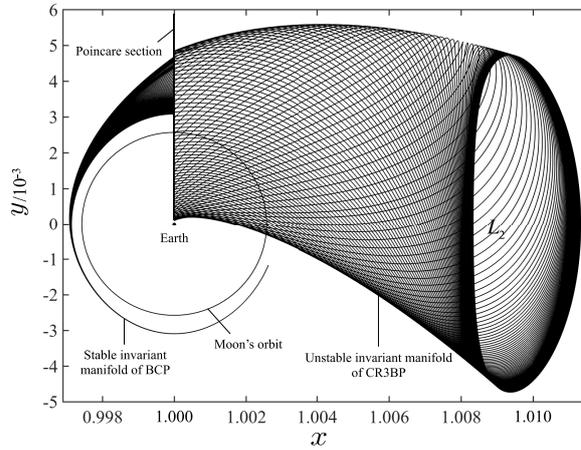


图5 日-地旋转坐标系下的不稳定流形和BCP系统的稳定流形

Fig. 5 Unstable invariant manifold in the Sun-Earth rotating frame and stable invariant manifold of the BCP system

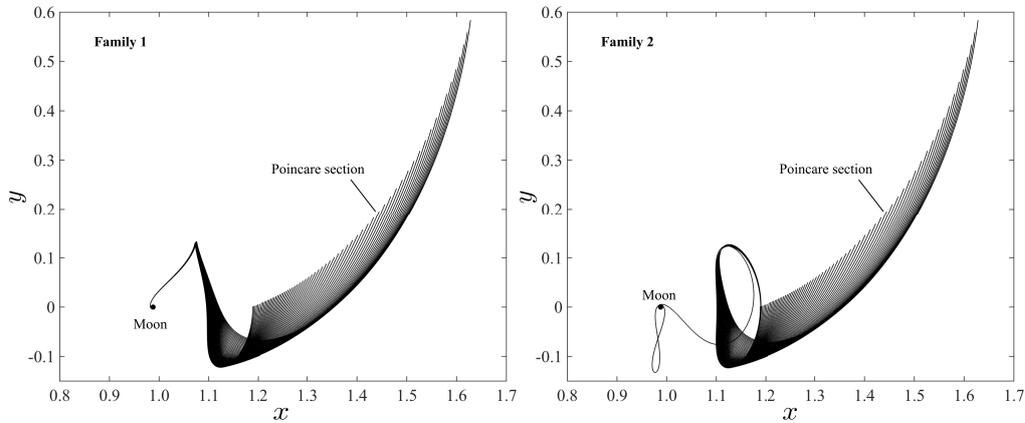
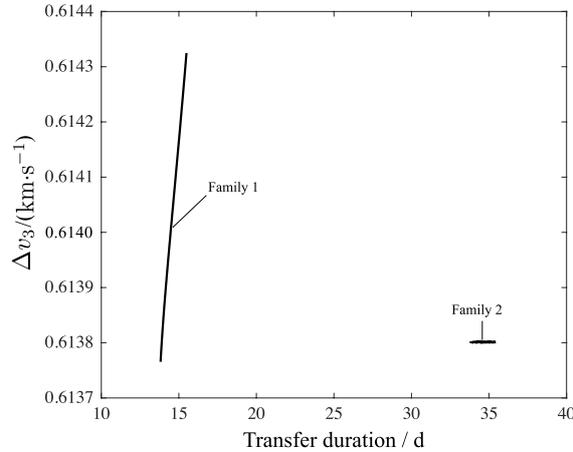


图6 族1 (左)与族2 (右)月球弹道捕获段轨道

Fig. 6 Orbits of the lunar ballistic capture portion of family 1 (left) and family 2 (right)

月球弹道捕获段轨道近月点 Δv_3 与从Poincaré截面到近月点所需飞行时间的关系曲线如图7所示. 族1所需的飞行时间为13.82–15.49 d, 族2需要33.85–35.43 d, 此外族1近月点 Δv_3 在 $0.61373\text{--}0.61437\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ 之间变化, 族2近月点 Δv_3 稳定在 $0.61377\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ 附近. 虽然人们希望 Δv_3 尽可能小, 但考虑到族2与族1相比, 飞行时间多出了将近2倍, 在族1与族2的 Δv_3 相差不明显的情况下, 选择族1进行接下来的研究是合理的.

图 7 Δv_3 与飞行时间关系曲线Fig. 7 The curves of relation between Δv_3 and transfer duration

5 经过月球旁近段轨道设计

5.1 设计方法

实际上, 经过月球旁近的地-月转移轨道可以有无穷多种, 因为若不对飞行时间加以限制, 航天器允许以任意方式环绕地球直到恰好与月球相遇从而获得更多能量到达日-地平动点附近. 因此本文对从地球低轨道出发到月球低轨道的完整飞行时间加以限制, 仅研究飞行时间在230 d以内的轨道, 同时不考虑多次环绕地球的轨道, 除非再次经过地球附近是为了获得2次经过月球旁近的机会.

经过月球旁近段轨道在Poincaré截面处的空间位置与族1月球弹道捕获段轨道的位置一致, 而在速度空间, 限制 y 方向的速度与族1月球弹道捕获段轨道一致, 只改变 x 方向速度. 以 v_x 为变化参数, 从Poincaré截面出发沿负向时间积分, 每积分一步就计算一次航天器与月球质心的距离 P_M 以及与地球质心的距离 P_E . 当 $P_M \leq R_M$ (R_M 为月球半径)时, 认为航天器与月球发生碰撞. 在限定的230 d时间内, 当 $\min(P_M) > 25000$ km时, 认为航天器没有经过月球旁近, 且当 $\min(P_E) - (R_E + h) < \delta$ (R_E 为地球半径, h 为地球低轨道高度, δ 为允许的误差. 本文取 $\delta = 10^{-4}$ km)时, 认为航天器到达了指定的地球低轨道. 以能够经过月球旁近但不与月球发生碰撞, 同时能够到达指定地球低轨道, 总共飞行时间不超过230 d为限制条件, 只要其中任意一条件没有满足则中断积分, 调整 v_x 后重新进行上述积分和条件判定, 直到搜索出满足所有条件的轨道.

5.2 状态空间图

对于BCP这样的非自治系统, 如上文所述其所有解都具有时间相关性, 通常把时间作为增广维度, 使系统变成自治系统, 于是包括时间在内, 空间位置以及速度都可以在增广相空间中描述. 本文用状态空间图来描述两个关键参数: 出发时刻 T_L 和Poincaré截面处轨道的 y 坐标分量 P_y . 在上文中, 计算BCP的不变流形时规定了太阳初始相角 $\theta_0 = 0$, 为了与该假设一致, 规定当日、地、月在同一直线上, 并且月球处于地球与太阳之间时

为第0天. 注意到在BCP中日-地-月相合周期为29.53 d, 所以值得探究的是: 从第0天到第29.53天, 航天器利用此类转移轨道的发射窗口是如何分布的(本文提出的发射窗口是指允许航天器从地球低轨道出发的一个时间区间).

状态空间图可以由以下方法建立: 以出发时刻 T_L 为横坐标, Poincaré截面位置 P_y 为纵坐标, 近地点高度 h 以灰度深浅表示, 按照上述介绍经过月球邻近段轨道的设计方法, 每设计一条轨道就能在空间状态图上找到对应的一点, 当越多数量轨道的设计完成后, 状态空间图也就越完整. 如图8所示为完整的状态空间图, 其中图像以29.53 d为一个周期, 故大于29.53 d的情况不再给出. 从图8可看出: 在任意时刻都可以找到至少一条对应经过月球邻近的地月转移轨道, 使得该时刻为出发时刻. 状态空间图还表明这些轨道以族的形式存在于相空间中, 一共有16个轨道族. 不同族的轨道在Poincaré截面的分布、出发时刻分布都存在差异, 其中出现多个轨道族在状态空间图中相互重叠的情况. 因为人们往往希望航天器能从较低的地球低轨道出发, 所以在重叠的位置以近地点高度较低的部分优先显示, 即颜色深的部分遮挡住了颜色浅的部分.

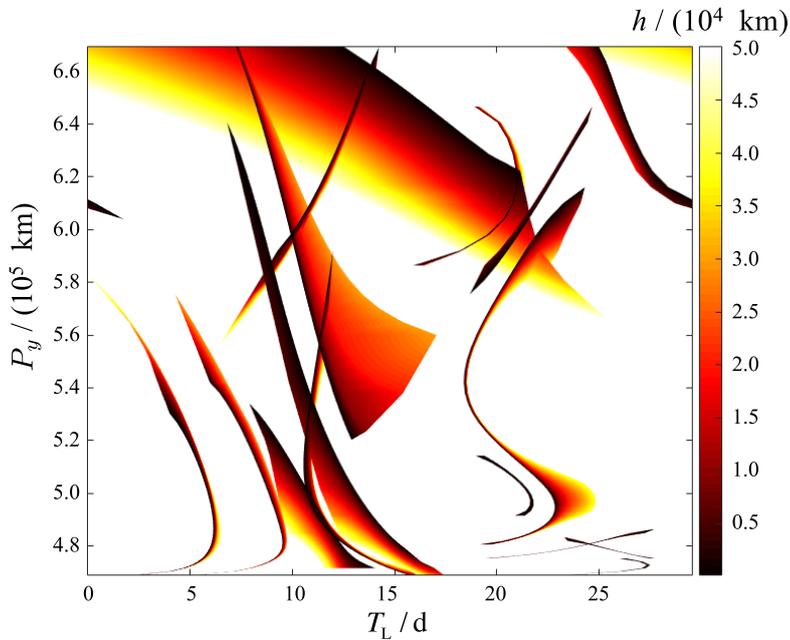


图8 状态空间图

Fig. 8 The state space map

如图9给出了某一转移轨道族的状态空间图作为例子说明状态空间图的作用. 图中标出了不同近地点高度的等高线, 若希望利用该族轨道进行转移, 选择预期的出发近地点高度、出发时刻和Poincaré截面处的位置就能够确定一条完整的转移轨道. 可以清晰地看出该族的轨道随着近地点高度的升高, 发射窗口在向后移动, 也就是说如果错过发射窗口, 在该族轨道中只能选择更高的地球低轨道进行发射.

如图10给出了16种转移轨道族的例子, 并指出了它们在状态空间图上的位置, 各个转移轨道图中的数字用来对其命名, 例如左下角的轨道族称为族1. 每一个转移轨道都

在日-地旋转坐标系中给出, 围绕地球的圆形轨道为月球轨道, 可以清晰地看到转移轨道在经过月球轨道时受到了月球引力的影响, 其中族15的轨道两次经过月球旁近, 类似这样多次经过月球旁近的轨道有很多, 但由于飞行时间超过230 d, 故这里只给出了族15一种情况. 另一方面族1、族3、族6、族7、族8和族14轨道对应的地球低轨道为逆行轨道, 不适合优先考虑.

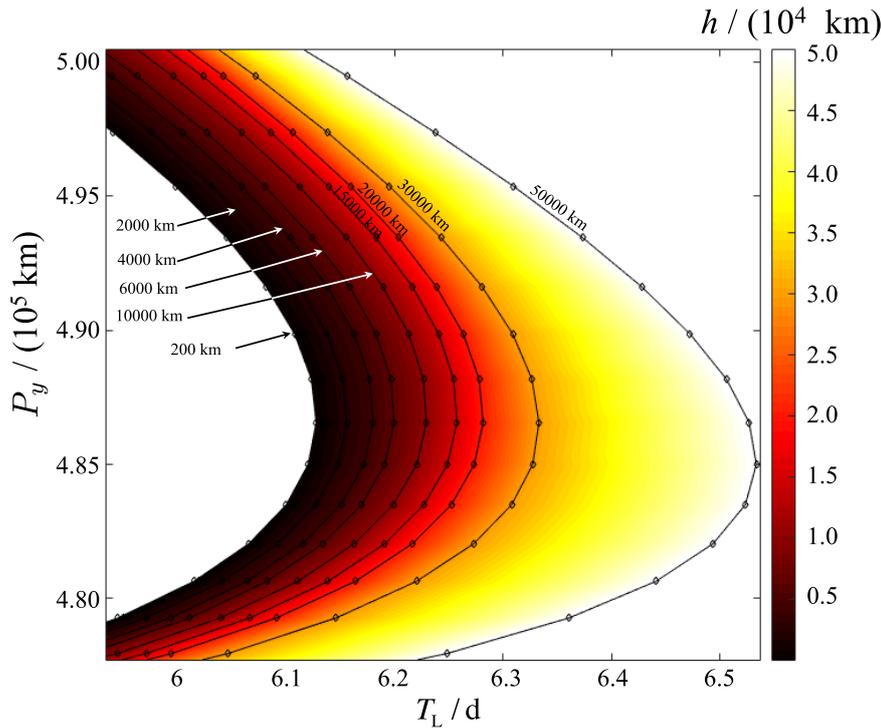


图 9 某一族轨道的状态空间图

Fig. 9 The state space map of a family trajectories

6 转移轨道分析

本节将首先以飞行时间最优轨道族和具有最小速度增量的轨道族作为例子, 分析不同轨道族之间的差异. 图11为族16 (指经过月球旁近段族16轨道与月球弹道捕获族1轨道拼接而成的完整地月转移轨道, 下文统一采用该命名方式)在近地点高度为200 km的一些低能地月转移轨道的例子. 图12分别给出了该轨道族的飞行时间 T_L 和 P_y 的关系曲线, T_L 和速度增量 $\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2$ (为了凸显 Δv_1 和 Δv_2 的变化, 速度增量暂不考虑 Δv_3)的关系曲线, 以及航天器在日-地旋转坐标系下的系统能量随时间的变化曲线, 其中航天器的系统能量 E 为无量纲形式, 由下式求得:

$$E(t) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z; t). \quad (10)$$

式中 $U(x, y, z; t)$ 由(2)式得到. 在航天器的系统能量与时间的变化关系曲线图中, 横坐标的时间单位为d, 第0天的选取与上文保持一致.

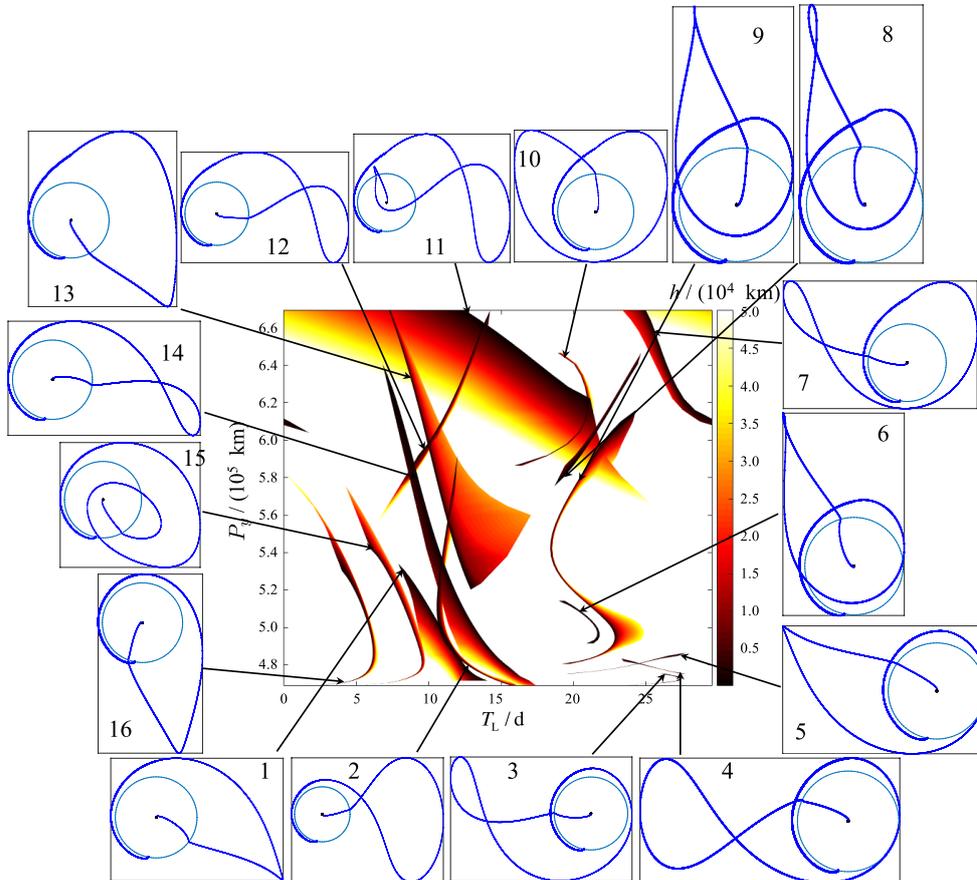


图 10 状态空间图和转移轨道

Fig. 10 The state space map with example trajectories

族16轨道为飞行时间最优轨道族, 其飞行时间都在93 d之内, 最短的飞行时间为88.9 d. 从速度增量与飞行时间的关系曲线可以找到一条最优轨道, 它拥有最小的速度增量 $\Delta v_{\min} = 3.173 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ 和接近最短的飞行时间89.0 d. 图12中两条 $E-t$ 曲线分别对应了 $T_L-\Delta v$ 图中的最右下角的点, 其经过月球旁近时的近月点高度为 $A_p = 6543.176 \text{ km}$. 另外一点为上述最优轨道对应的点, 其经过月球旁近时的近月点高度为 $A_p = 10965.543 \text{ km}$. 通过能量与时间的变化曲线可以看出该两条轨道都在第5天至第10天时间段内经过月球旁近, 由于得到了月球的引力辅助, 系统能量得到激增, 在随后很长时间内不再受到月球引力的影响, 该系统可以看做CR3BP, 所以系统能量不再变化, 直到再次进入月球的影响范围内. 在第80-85天时间段内航天器到达Poincaré截面, 由于需要施加速度脉冲, 能量发生突变. 其中最优轨道对应的曲线在Poincaré截面处接近光滑, 说明在该位置所需的速度增量接近于 $0 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. 此外由图12可看出经过月球旁近时近月点的高度越低, 获得的能量越高, 故在近地点所需的出

发速度增量 Δv_1 也越低. 但并不是近月点的高度越低越好, 因为往往在Poincaré截面处也许需要较低的能量, 族16的最优轨道就是一个很好的例子, 它经过月球旁近时的近月点高度并不是最低的.

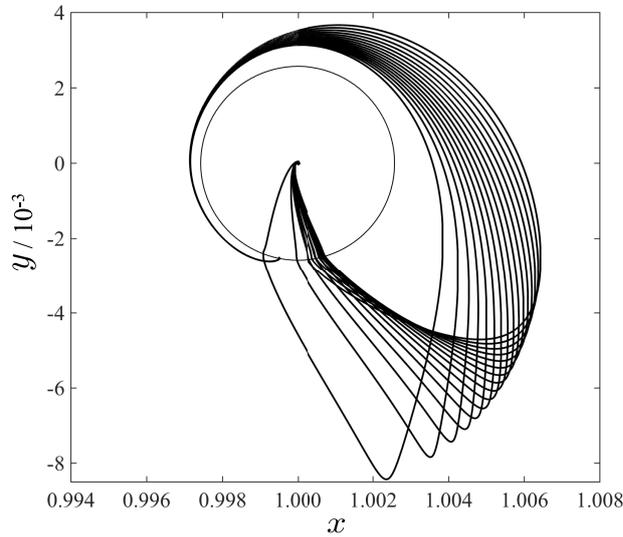


图 11 经过月球旁近的族16低能地月转移轨道

Fig. 11 The low-energy lunar trajectories of family 16 with lunar flybys

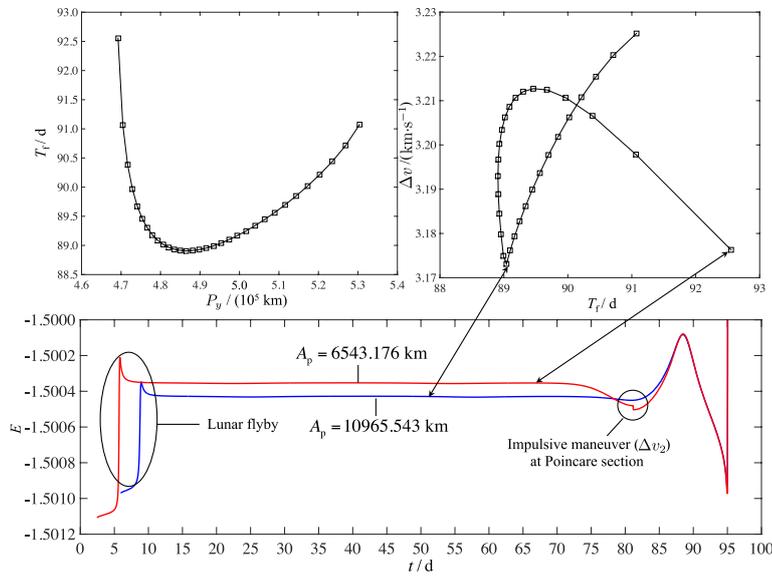


图 12 族16轨道 P_y - T_f 、 T_f - Δv 和 E - t 曲线

Fig. 12 The curves of P_y - T_f , T_f - Δv , and E - t of family 16

图13为族2在近地点高度为200 km的一些低能地月转移轨道的例子. 图14所示为该族轨道的 P_y-T_f 、 $T_f-\Delta v$ 和 $E-t$ 曲线. 族2轨道具有最小速度增量, 其值为 $\Delta v_{\min} = 3.009 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, 对应的飞行时间为173.1 d. 该族最短的飞行时间为168.0 d, 所以该族轨道不存在既省能耗又省时间的最优轨道. 从最小速度增量所对应的 $E-t$ 曲线可以看出该轨道不仅在Poincaré截面处的速度增量接近于0, 并且还拥有较小的出发速度增量 Δv_1 , 所以总体的最小速度增量要比族16最小速度增量还要小 $0.164 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. 而另一条 $E-t$ 曲线对应的轨道具有最低 A_p 值, 但该轨道并没有因此获得最小的出发速度增量, 这是因为发射速度增量不仅与近月点高度有关, 还与轨道的几何性质有关. 例如若该轨道经过离地球更远的区域, 则需要更大的发射速度增量.

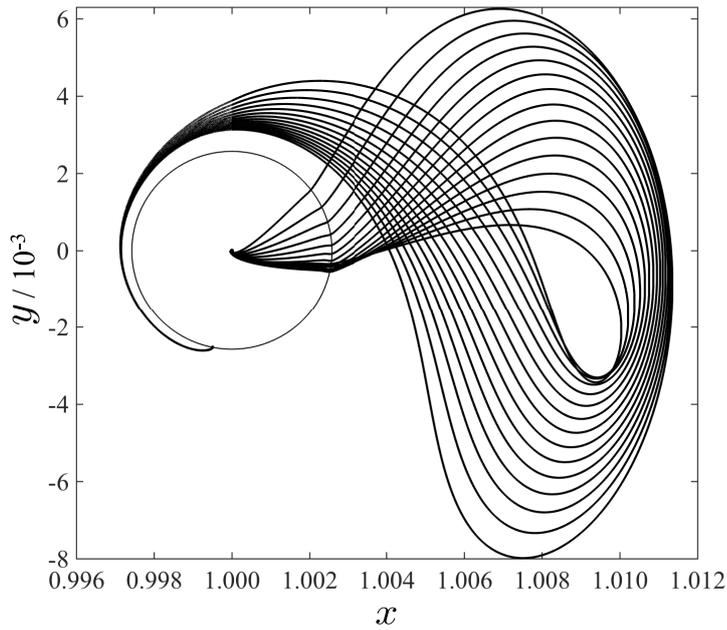


图 13 经过月球附近的族2低能地月转移轨道

Fig. 13 The low-energy lunar trajectories of family 2 with lunar flybys

图15给出了各族在近地点高度为200 km的轨道所对应的出发速度增量 Δv_1 与出发时刻 T_L 的关系曲线. 研究表明总体 Δv_1 最小的轨道族为族11. 由图10可知: 该族轨道的特点是航天器首先沿一顺行的椭圆轨道绕地球飞行, 在经过远地点后返回地球的途中经过月球旁近. 该族最小速度增量为 $\Delta v_{\min} = 3.043 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, 属于较小的速度增量, 但是其飞行时间很长, 最短的飞行时间达221.58 d. 从族15和族16的曲线中可看出族15由于两次经过月球旁近, 总体 Δv_1 略小于族16, 但飞行时间比族16多出了将近一个日-地-月相合周期.

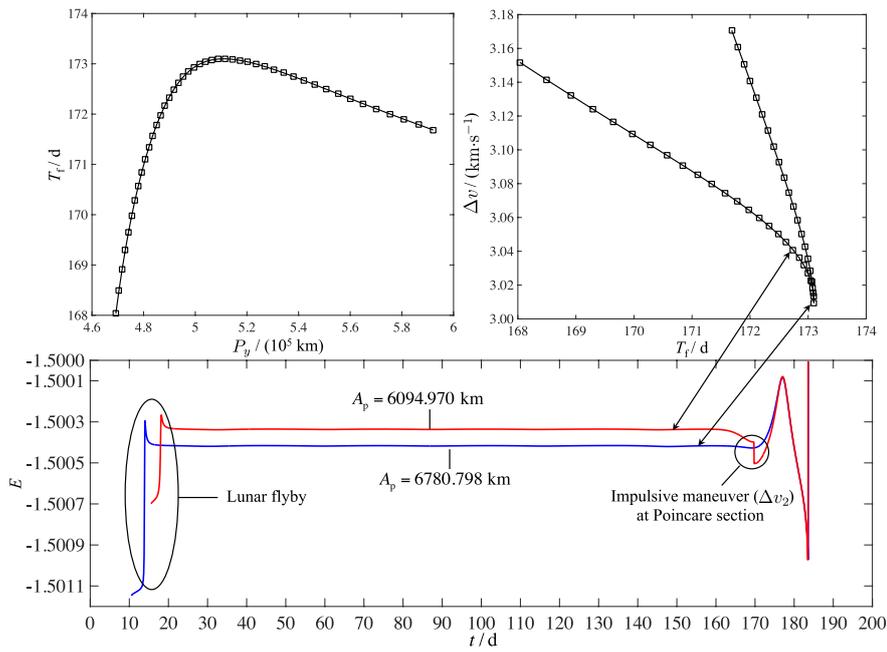


图 14 族2轨道 P_y - T_f 、 T_f - Δv 和 E - t 曲线

Fig. 14 The curves of P_y - T_f , T_f - Δv , and E - t of family 2

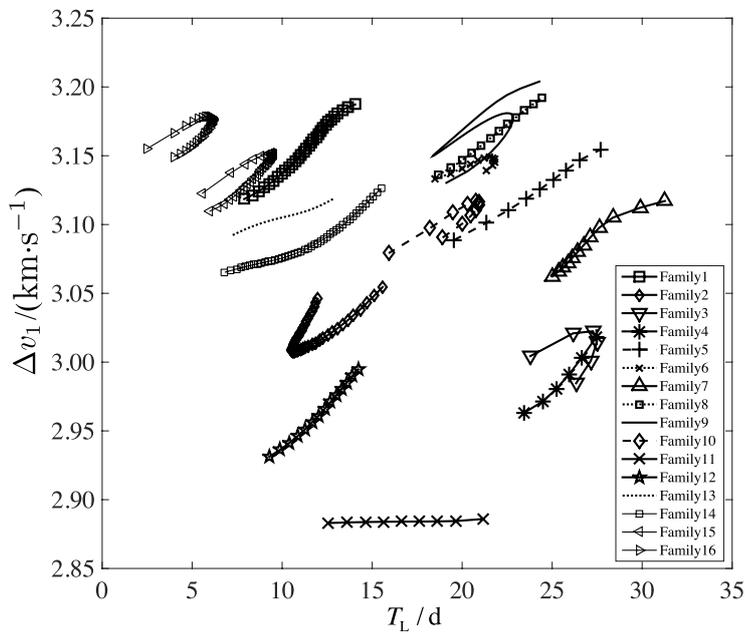


图 15 各族轨道 Δv_1 与 T_L 关系曲线

Fig. 15 The relation curves between Δv_1 and T_L in different families

表1给出了各族低能转移轨道的一些参数, 这些转移轨道都是从高度为200 km的地球低轨道出发, 到达高度为200 km的月球低轨道. 表中发射窗口宽度描述的是航天器利用该族转移轨道的发射机会总天数, 发射窗口宽度越宽说明利用该族轨道发射的机会越多. 从表1可看出发射机会最多的是族14轨道, 其发射窗口宽度为8.69 d, 但由于该族轨道对应的地球低轨道是逆行轨道, 不宜优先考虑. 族11的总体速度增量都保持在一个较低的水平, 仅仅在 $3.043 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ 至 $3.080 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ 之间变化, 同时具有8.61 d的发射机会, 然而其飞行时间都在220 d以上, 在所有轨道族中最长. 尽管族2具有最小的速度增量, 但其速度增量的变化范围较大, 以至于要保证其速度增量低于族11的最大值, 根据图10和图14得出其发射机会仅有1.74 d. 注意到族2的发射窗口关闭之后族11的发射窗口仍然打开, 在不对飞行时间加以严格限制的情况下, 优先考虑族2为速度增量最优轨道族, 一旦错过发射窗口, 族11轨道可以作为族2的替补方案. 族16轨道具有最优飞行时间, 但发射窗口宽度仅有3.65 d, 一旦错过发射窗口, 则需要再等25.88 d才有下一次发射机会.

表 1 各族轨道参数
Table 1 Trajectory parameters of different families

Family	Interval of transfer duration/d	Interval of $\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 / (\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$	Interval of $\Delta v_2 / (\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$	Width of launch window/d
1	110.50–116.70	3.142–3.261	0.0021–0.0735	6.17
2	168.03–173.10	3.009–3.171	0.0002–0.1247	5.05
3	185.66–189.36	3.060–3.133	0.0560–0.1482	3.70
4	182.79–189.71	3.166–3.177	0.1264–0.2137	6.92
5	126.39–134.57	3.228–3.387	0.1400–0.2323	8.18
6	102.78–106.11	3.384–3.431	0.2451–0.2984	3.32
7	152.41–158.69	3.322–3.341	0.2044–0.2776	6.27
8	100.19–105.94	3.556–3.772	0.4200–0.5796	5.77
9	100.32–106.21	3.325–3.719	0.1949–0.5146	5.92
10	133.20–138.22	3.275–3.353	0.1957–0.2495	5.02
11	221.58–230.20	3.043–3.080	0.1573–0.1971	8.61
12	198.99–203.92	3.055–3.192	0.1241–0.1973	4.94
13	141.22–146.90	3.137–3.294	0.0185–0.2013	5.63
14	138.60–147.34	3.092–3.243	0.0021–0.1781	8.69
15	115.06–119.01	3.141–3.190	0.0001–0.0800	3.96
16	88.91–92.55	3.173–3.215	0.0002–0.0599	3.65

7 结论

本文基于日、地、月、航天器构成的双圆问题(BCP)模型, 重点研究经过月球附近的低能地月转移轨道在相空间的分布情况以及这些轨道的特点. 研究结果表明:

(1)地-月旋转坐标系下考虑太阳引力摄动的不变流形也能够用来设计月球弹道捕获段轨道;

(2)经过月球旁近的低能地月转移轨道以族的形式存在于相空间中;

(3)在一个日-地-月相合周期中, 即第0天到第29.53天的时间段内, 任意时刻都能至少找到一条经过月球旁近的低能地月转移轨道, 该时刻为轨道对应的出发时刻;

(4)状态空间图描述了不同轨道族、不同近地点高度下, 轨道出发时刻和所能到达的Poincaré截面位置的关系, 利用状态空间图可以指导此类轨道的设计;

(5)一般而言, 以较低的近月点高度经过月球旁近能够有效降低 v_1 , 但并非近月点高度越低越好, 在经过月球旁近后航天器的能量有所增加, 而往往在Poincaré截面处与月球弹道捕获段轨道拼接时不需要太多的能量;

(6)族2可以作为速度增量最优轨道族优先选择, 族16可以作为飞行时间最优轨道族, 但这两个轨道族的发射窗口宽度都比较窄, 容易错过发射机会.

参 考 文 献

- [1] Belbruno E. Capture Dynamics and Chaotic Motions in Celestial Mechanics: with Applications to the Construction of Low Energy Transfers. Princeton/Oxford: Princeton University Press, 2004: 144
- [2] Koon W S, Lo M W, Marsden J E, et al. Chaos, 2000, 10: 427
- [3] Koon W S, Lo M W, Marsden J E, et al. CeMDA, 2001, 81: 63
- [4] Koon W S, Lo M W, Marsden J E, et al. Dynamical Systems, the Three-body Problem, and Space Mission Design. Berlin: World Scientific, 2000: 123
- [5] 龚胜平, 李俊峰, 宝音贺西, 等. 应用数学和力学, 2007, 28: 183
- [6] Zhang P, Li J F, Baoyin H X, et al. AcAau, 2013, 91: 77
- [7] 俞辉, 宝音贺西, 李俊峰. 宇航学报, 2007, 28: 637
- [8] 李俊峰, 宝音贺西, 蒋方华. 深空探测动力学与控制. 北京: 清华大学出版社, 2014: 382-429
- [9] 侯锡云, 赵玉晖, 刘林. 天文学报, 2012, 53: 308
- [10] Hou X Y, Zhao Y H, Liu L. ChA&A, 2013, 37: 183
- [11] Parker J S. JAnSc, 2011, 58: 311
- [12] Gómez G, Masdemont J, Simó C. JAnSc, 1998, 46: 135
- [13] Gómez G, Mondelo J M. PhyD, 1999, 132: 189
- [14] Gómez G, Koon W S, Lo M W, et al. Nonli, 2004, 17: 1571
- [15] Howell K C, Barden B, Lo M W. JAnSc, 1997, 45: 161
- [16] Howell K C, Kakoi M. AcAau, 2006, 59: 367
- [17] Howell K C, Ozimek M T. JGCD, 2010, 33: 533
- [18] Marsden J E, Ross S D. BAMaS, 2006, 43: 43
- [19] Howell K C, Spencer D B. AcAau, 1986, 13: 473
- [20] Wilson R S, Howell K C. JSpRo, 1998, 35: 191
- [21] Short C R, Howell K C. AcAau, 2014, 94: 592
- [22] 祁瑞, 徐世杰. 宇航学报, 2013, 34: 1055
- [23] Qi Y, Xu S. CeMDA, 2016, 125: 1
- [24] Qi Y, Xu S. Aerospace Science Technology, 2016, 55: 282

Low-energy Lunar Trajectories with Lunar Flybys

WEI Bing-wei LI Yin-shan

(Department of Mechanics, School of Mechanical Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300130)

ABSTRACT The low-energy lunar trajectories with lunar flybys are investigated in the Sun-Earth-Moon bicircular problem (BCP). Accordingly, the characteristics of the distribution of trajectories in the phase space are summarized. To begin with, by using invariant manifolds of the BCP system, the low-energy lunar trajectories with lunar flybys are sought based on the BCP model. Secondly, through the treating time as an augmented dimension in the phase space of nonautonomous system, the state space map that reveals the distribution of these lunar trajectories in the phase space is given. As a result, it is become clear that low-energy lunar trajectories exist in families, and every moment of a Sun-Earth-Moon synodic period can be the departure date. Finally, the changing rule of departure impulse, midcourse impulse at Poincaré section, transfer duration, and system energy of different families are analyzed. Consequently, the impulse optimal family and transfer duration optimal family are obtained respectively.

Key words celestial mechanics, space vehicles, planets and satellites: general, methods: numerical