

# 历表误差对脉冲星计时残差空间 相关性影响的研究\*

朱幸芝<sup>1†</sup> 童明雷<sup>1,2‡</sup> 赵成仕<sup>1,2</sup> 高玉平<sup>1,2</sup>

(1 中国科学院国家授时中心 西安 710600)

(2 中国科学院时间频率基准重点实验室 西安 710600)

**摘要** 在介绍脉冲星计时残差及历表误差影响机制的基础上, 给出了由历表误差引起的脉冲星计时残差及其角相关的解析式, 基于澳大利亚PPTA (Parkes Pulsar Timing Array)毫秒脉冲星实测计时数据, 计算由不同历表如DE (Development Ephemeris) 200、DE405和DE421导致的计时残差角相关结果, 并在4种脉冲星参数拟合情况下进行了比较和分析, 验证了历表误差会导致计时残差角相关结果具有不同程度的偶极效应, 发现历表误差引起的太阳系质心(SSB)位置误差是导致脉冲星计时残差角相关偶极效应的主要原因, 通过拟合自转参数和天测参数可消除历表误差对计时残差相关性的影响.

**关键词** 天体测量学, 时间, 脉冲星, 历表, 方法: 解析

中图分类号: P127; 文献标识码: A

## 1 引言

从1982年发现毫秒脉冲星B1937+21后, 毫秒脉冲星因其高长期频率稳定性引起了广泛关注. 目前脉冲星的观测通常利用计时阵开展, 国际上主要的脉冲星计时阵澳大利亚Parkes天文台计时阵PPTA (Parkes Pulsar Timing Array)、北美脉冲星计时阵NANOGrave (North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves)和欧洲计时阵EPTA (European Pulsar Timing Array)对毫秒脉冲星脉冲到达时间(TOA)的典型测量精度为几百纳秒, 以探测引力波和建立标准脉冲星时间尺度为主要科学目标<sup>[1]</sup>. 脉冲星计时观测即得到TOA序列的过程, 由射电望远镜接收到一系列脉冲信号, 经接收机放大处理后进行消色散和周期折叠得到一个积分脉冲轮廓, 并与标准轮廓进行相关以确定基准点, 脉冲基准点对应的测站参考原子时即TOA. 利用几何和物理模型, 由TOA推算出到达假想的处于无介质无引力场环境中的太阳系质心时刻, 并用太阳系

2017-03-29收到原稿, 2017-05-31收到修改稿

\*国家自然科学基金项目(U1531112、11403030、11373028、11103024)、中国科学院“西部之光”青年学者A项目(XAB2015A06)、中国科学院青年创新促进会项目(2017450)和陕西省青年科技新星项目(2015KJXX-56)资助

†zhuxingzhi@ntsc.ac.cn

‡mltong@ntsc.ac.cn

质心坐标时(TCB)尺度表示, 其与脉冲星钟模型预报的时刻之差即为脉冲星计时残差。理想情况下, 计时模型参数和钟模型参数准确且无测量噪声时, 计时残差应为零, 但事实并非如此。引起脉冲星计时残差的原因有很多, 排除TOA的测量误差及计时模型误差, 主要系统误差包括参考历表误差、原子钟钟差和引力波, 此外还有脉冲星自转不稳定噪声、星际介质色散变化噪声等因素。

自1980年起, 美国国家航空航天局(NASA)的JPL实验室(Jet Propulsion Laboratory)就以DE (Development Ephemeris)系列发布了历表DE102, 此后不定期更新。DE系列历表以太阳系大质量星体的动力学模型进行积分, 在太阳质心参考系(BCRS)框架下给出各行星在给定时间的相对位置和速度<sup>[2-3]</sup>, 目前广泛应用于行星探索、深空导航和脉冲星观测等天文领域。由于历表使用的力学模型不完善, 直接影响到脉冲信号从观测站到太阳系质心(SSB)的传播时延估计, 并最终吸收至计时残差中。Tiburzi等<sup>[4]</sup>通过大量模拟数据清楚地揭示了参考钟钟差、太阳系行星历表误差和引力波等会导致脉冲星计时残差的空间相关性, 但不同因素产生的空间相关性具有各自的特征。参考原子钟钟差对所有脉冲星计时残差影响都相同, 呈单极性; 历表误差对脉冲星计时残差的影响呈偶极相关; 而引力波会导致脉冲星计时残差间具有四极相关性<sup>[5]</sup>。虽然这三者引起的空间相关性不同, 但历表误差和参考钟钟差仍会对引力波探测产生干扰<sup>[4]</sup>。目前, 引力波已在高频段被激光引力波干涉仪(AdvLIGO)直接探测到<sup>[6]</sup>, 证明引力波是确实存在的, 因此, 脉冲星计时阵对低频引力波的探测迫在眉睫。引力波的存在会改变时空性质, 无论是单源引力波<sup>[7-8]</sup>还是背景引力波<sup>[9]</sup>, 均使得脉冲星的TOA发生改变, 从而产生额外的脉冲星计时残差。Tiburzi等<sup>[4]</sup>发现参考钟钟差对引力波探测的影响比较容易消除, 而历表误差的影响较难消除。作为引力波探测的一种误判因素, 有必要进一步开展由历表误差引起的脉冲星计时残差空间相关性研究, 分析其空间相关的特征和主要原因, 进而消除历表误差对脉冲星计时残差相关性的影响。

本文在介绍脉冲星计时残差产生过程及历表误差影响的基础上, 给出了由历表误差引起的脉冲星计时残差及其角相关函数解析式, 从PPTA实测的20颗星中优选出14颗, 参考TT (Terrestrial Time)及JPL公布的DE421, 计算由不同历表误差及参数拟合所导致的PPTA计时阵中各脉冲星之间计时残差的空间相关结果, 进行比较分析后得出相关结论。

## 2 历表误差引起的计时残差及其相关性解析式

由于地球的动力学特性, 地面观测站进行脉冲星计时观测时必须选定一个理想的参考点, 才能与脉冲星发出脉冲的本征时间进行比对。由于地心至太阳系质心的位置可由历表提供, 且观测站到地心位置可精确测定, 而太阳质心坐标系可视为一个准惯性系, 因此建立在太阳系质心处的TOA能最大程度客观地反映出脉冲星的自转规律, 故脉冲星计时观测最终都归算至SSB。为将TOA从计时观测站有效转换到SSB, 需要依赖精确的太阳系行星历表。在BCRS中, 地球在给定时间相对于SSB的位置和速度由DE系列历表给出。历表误差即参考系误差, 引起脉冲星发出的脉冲从观测站到SSB的时延误差, 通过TOA从测站到SSB的转换吸收至脉冲星计时残差中。而脉冲信号从观测站到SSB的传播时延, 即Roemer时延<sup>[10]</sup>。Roemer时延是测站观测时间转换至SSB过程中最主要的时

延修正项<sup>[11]</sup>. 由于零阶Roemer延迟项远大于其他项, Roemer时延近似表达式可表示为:

$$\Delta_{R_\odot} = -\vec{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}/c, \quad (1)$$

其中 $\vec{r}$ 为测站相对于SSB的位置矢量,  $\hat{\mathbf{n}}$ 为脉冲星某时刻的单位位置矢量, 包含了脉冲星自行信息, PPTA观测数据将 $\hat{\mathbf{n}}$ 归算至历元MJD54500,  $c$ 为真空条件下的光速. 故某时刻由历表误差引起的某颗星的计时残差可表示为<sup>[4]</sup>:

$$r_i(t) = 1/c \cdot \overrightarrow{e(t)} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i. \quad (2)$$

此处 $r_i(t)$ 为历表误差引起的某颗星的计时残差,  $\overrightarrow{e(t)}$ 表示与时间相关的测站到SSB的位置矢量误差,  $\hat{\mathbf{k}}_i$ 表示脉冲星*i*相对于SSB的单位位置矢量. 则历表误差引起的某两颗脉冲星*i*和*j*的残差协方差为:

$$C(r_i, r_j) = \langle r_i \cdot r_j \rangle = 1/c^2 \langle (\overrightarrow{e} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i)(\overrightarrow{e} \cdot \hat{\mathbf{k}}_j) \rangle, \quad (3)$$

且 $\overrightarrow{e} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i = |e| \cos \alpha_i$ ,  $\overrightarrow{e} \cdot \hat{\mathbf{k}}_j = |e| \cos \alpha_j$ , 则 $C(r_i, r_j) = 1/c^2 (\langle |e|^2 \cos \theta_{ij} \rangle - \langle |e|^2 \sin \alpha_i \sin \alpha_j \cos \beta \rangle)$ , 其中 $r_i$ 和 $r_j$ 分别为上文中提到的 $r_i(t)$ 和 $r_j(t)$ ,  $\overrightarrow{e}$ 即 $\overrightarrow{e(t)}$ ,  $\langle \rangle$ 表示期望算符,  $\alpha_i$ 和 $\alpha_j$ 分别为脉冲星*i*和*j*位置矢量在 $\overrightarrow{e}$ 方向投影的夹角,  $\theta_{ij}$ 为脉冲星*i*、*j*在天球赤道坐标系中的方向夹角,  $\beta$ 为 $\hat{\mathbf{k}}_i$ 、 $\hat{\mathbf{k}}_j$ 和 $\overrightarrow{e}$ 构成的球面三角中 $\theta_{ij}$ 在球面的投影角. 若 $\overrightarrow{e}$ 与脉冲星方向无关, 则上式可表示为:

$$C(\theta_{ij}) = 1/c^2 \langle |e|^2 \rangle \cos \theta_{ij}. \quad (4)$$

由理论解析式可知, 历表误差引起的任意两颗脉冲星计时残差的协方差与两星的夹角有关(故空间相关性也可称角相关性), 且呈现偶极特征. 当不存在历表误差时,  $C(\theta_{ij}) = 0$ ; 脉冲星观测到的脉冲到达时间TOA一般参考基于TAI (International atomic time)修正得到的由国际权度局BIPM (Bureau International des Poids et Measures) 2011年计算公布的地球时TT (BIPM2011), 参考钟误差对所有计时残差影响一致, 则 $C(\theta_{ij}) > 0$ , 即参考钟误差引起的计时残差相关性呈单极性<sup>[4]</sup>.

### 3 关于历表误差对脉冲星计时残差相关性影响的实测数据计算及分析

#### 3.1 历表误差的产生机制及实现方式

理想的天球参考架以SSB为原点, 而SSB的计算取决于运行在其周围的行星质量及其轨道. 由于行星质量存在估算误差, 天球参考架的原点位置相对于理想的SSB位置存在一定偏差<sup>[11-12]</sup>, 因此, 历表所提供的地球到SSB的位置矢量并不完全精确, 这将直接影响到脉冲信号从观测站转换到SSB的时延估计. 历表误差对参考系的影响主要分为SSB位置漂移误差和坐标系微小旋转误差, 在计时残差中相应产生长期漂移及周年波动. 当存在历表误差时, 只拟合脉冲星自转参数(自转频率F0及其1阶导数F1)时, 由历表误差引起的计时残差的线性和二次项将被吸收, 此时由历表误差导致的参考架误差主要含坐标轴旋转误差; 而只拟合脉冲星天体测量参数(位置、自行和视差)时, 由历表

误差引起的计时残差周年波动项也将被吸收, 此时由历表误差导致的参考架误差主要含SSB位置不规则漂移误差<sup>[13]</sup>.

本文利用脉冲星计时处理软件Tempo2, 将脉冲到达时间和计时模型参数作为输入量, 经处理得到计时残差序列. 采用的PPTA实测数据在观测及处理过程中参考JPL DE421历表, 我们以该历表发布的参考架原点为理想SSB位置, 通过设置Tempo2软件的计时模型参数文件中的历表参数产生历表误差, 且选择性拟合多种脉冲星参数组合, 运行后得到对应的残差序列, 计算在选定参数拟合情况下由历表误差导致的计时残差角相关结果. 为得到显性的区分结果, 我们先后使用DE200 (1981年9月建立)和DE405 (1995年5月建立)产生相对于DE421的历表误差, 且设置4种参数拟合情况进行残差角相关结果对比.

### 3.2 脉冲星的选取

PPTA计时阵由澳大利亚Parkes天文台利用64 m射电望远镜对选定的20余颗毫秒脉冲星进行常规观测, 每颗星观测周期大约2–3周, 每次观测典型持续时长约1 h, TOA测量精度为百纳秒量级<sup>[1,12]</sup>, 所有脉冲星计时残差都由Tempo2软件拟合处理得到, 观测历表采用DE421太阳系行星质心历表, 观测站参考时间采用TT (BIPM2011). 本文将PPTA发布的具有高精度TOA观测结果的20颗脉冲星作为备选对象, 由于以下5颗星: J1600–3053、J1744–1134、J1824–2452、J1939+2134和J2145–0750在长时间跨度上频率稳定度反向波动, 为避免低频红噪声影响, 不参与此次运算. 另外, J1857+0943整个22 yr观测残差序列的前半部分由Arecibo观测得到, 中断11 yr后的数据由Arecibo、Parkes和Effelsberg 3个观测系统合并得到, 期间Arecibo望远镜系统设备更新升级, 导致TOA数据可靠性并不高<sup>[11]</sup>, 因此该星也不纳入计算. 选定的14颗脉冲星中, PSR J1643–1224与PSR J1730–2304相距最近, 夹角为15.4°, PSR J0613–0200与PSR J1713+0747相距最远, 夹角为164°, 只有8对脉冲星之间的夹角大于150°. 具体14颗脉冲星参数见表1, 表中 $N_{\text{obs}}$ 为观测数据点个数, RA和DEC分别为脉冲星的赤经和赤纬.

### 3.3 不同历表误差对脉冲星残差角相关性的影响

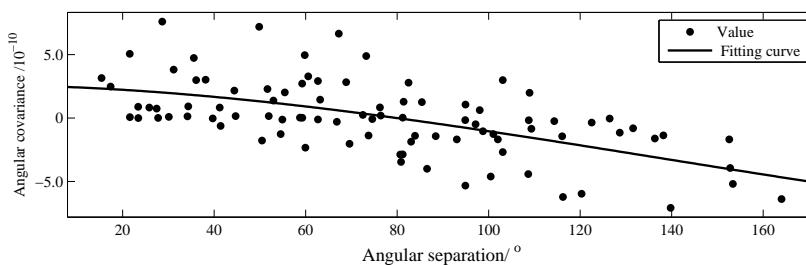
脉冲星计时残差数据由于时间跨度和观测时间间隔不同, 我们利用30 d采样取点法或30 d移动平均法<sup>[14]</sup>进行预处理, 即以30 d为等间隔, 将有效观测时间段内的残差进行加权平均, 权重取为计时误差平方的倒数, 既实现了等时间间隔和等跨度, 又能消除全球定位系统GPS提供的时间同步比对和参考时钟的白调频噪音, 且不会影响1 yr以上连续时间的长期稳定性. 再计算脉冲星两两之间计时残差协方差矩阵, 根据脉冲星赤经赤纬参数得到天球赤道坐标系中各星之间的夹角. 由于两星间夹角互换性和协方差矩阵对称性, 以下图中只给出91组有效值和对应的拟合曲线结果.

表1 选取的14颗PPTA脉冲星相关参数

Table 1 The related parameters of the adopted 14 PPTA pulsars

Pulsar name	MJD range	$N_{\text{obs}}$	RA/rad	DEC/rad	Post-fitting residual/ $\mu\text{s}$
J0437-4715	53880.3-55618.4	475	1.210	-0.825	0.075
J0613-0200	53431.3-55619.3	218	1.631	-0.035	1.070
J0711-6830	53431.4-55619.2	212	1.885	-1.196	0.845
J1022+1001	53468.5-55617.6	246	2.718	0.175	1.724
J1024-0719	53431.5-55619.5	175	2.726	-0.128	1.104
J1045-4509	53450.6-55619.5	185	2.818	-0.788	2.623
J1603-7202	53430.9-55618.1	168	4.204	-1.257	2.139
J1643-1224	53452.7-55597.9	148	4.379	-0.217	1.646
J1713+0747	53532.6-55618.9	98	4.511	0.136	0.307
J1730-2304	53431.1-55597.9	130	4.583	-0.403	1.467
J1732-5049	53724.9-55581.2	102	4.594	-0.887	2.245
J1909-3744	53517.9-55618.1	138	5.017	-0.659	0.132
J2124-3358	53431.2-55618.0	184	5.606	-0.593	1.905
J2129-5721	53476.9-55617.9	182	5.626	-1.001	0.797

图1-4均采用DE200以产生相对于DE421的历表误差, 但所选择拟合参数不同。图1只拟合脉冲星自转参数 $F_0$ 和 $F_1$ , 即变换参考架时只含坐标轴旋转误差; 图2只拟合脉冲星天体测量参数: 赤经赤纬、位置自行和视差, 即变换参考架时只含SSB位置误差; 图3将自转参数和天体测量参数均作拟合, 即不含参考架误差; 图4不拟合任何参数(变换参考架), 既包含SSB位置漂移误差, 同时含坐标旋转误差。为便于与理论解析结果对比, 图2和图4均给出了理想余弦曲线。由图1、2和4可见, 在夹角小于 $\alpha$  ( $81^\circ$ 、 $108^\circ$ 和 $106^\circ$ )时, 脉冲星计时残差与夹角呈正相关, 且两星间夹角越小, 残差相关性越强。在夹角大于 $\alpha$ 时, 脉冲星残差与夹角呈负相关, 且两星间夹角越大, 残差负相关性越强。计算得出图1和图3角相关拟合曲线服从多项式分布, 图2和图4近似符合余弦分布, 相对更接近理论解析式结果, 图4拟合误差更小。由图3可见, 拟合脉冲星自转及天测参数后, 计时残差协方差值接近0。

图1 拟合 $F_0$ 和 $F_1$ 时各星计时残差的角相关结果Fig. 1 The angular covariance results of pulsars' timing residuals based on the fitting of  $F_0$  and  $F_1$

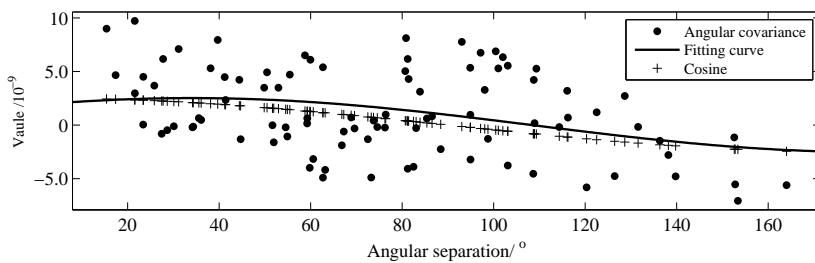


图 2 拟合天体测量参数时各星计时残差角相关结果

Fig. 2 The angular covariance results of pulsars' timing residuals based on the fitting of astrometric parameters

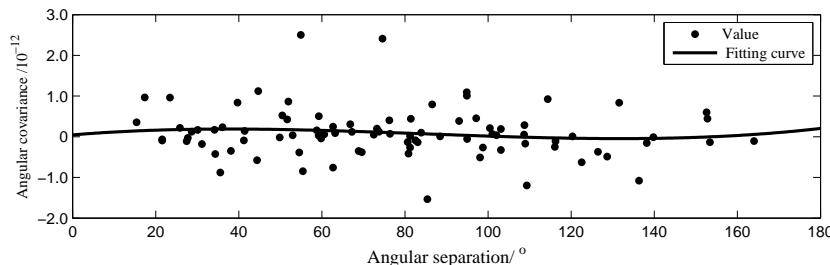


图 3 拟合自转参数和天体测量参数时各星计时残差角相关结果

Fig. 3 The angular covariance results of pulsars' timing residuals based on the fitting of the rotational and astrometric parameters

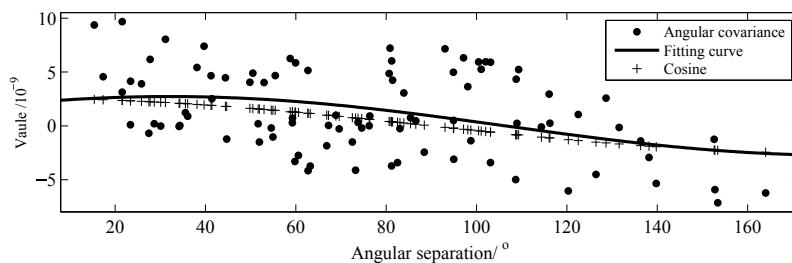


图 4 不作脉冲星参数拟合时各星计时残差角相关结果

Fig. 4 The angular covariance results of pulsars' timing residuals without fitting

为有效比较以上几种参数拟合情况对计时残差的角相关影响程度, 将计时残差协方差换算为相关系数。图5和图6分别为图1和图2两种参数拟合情况下对应的相关系数结果。结果显示: 只拟合脉冲星天体测量参数(主要含SSB位置误差)情况下的相关系数几乎接近 $\pm 1$ , 即相关性明显强于只拟合脉冲星自转参数 $F_0$ 和 $F_1$ (主要含坐标轴旋转误差)的情况。

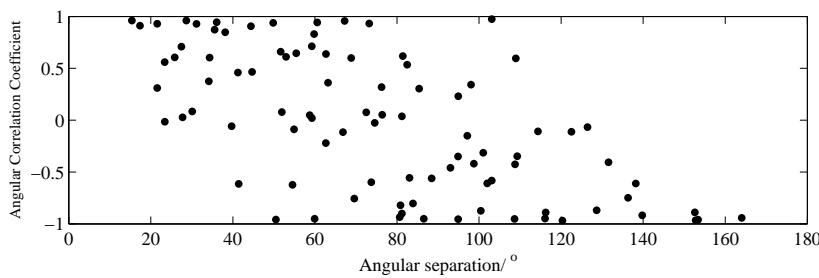
图 5 拟合  $F_0$ 、 $F_1$  时各星计时残差相关系数

Fig. 5 The angular correlation coefficient results of pulsars' timing residuals based on the fitting of  $F_0$  and  $F_1$

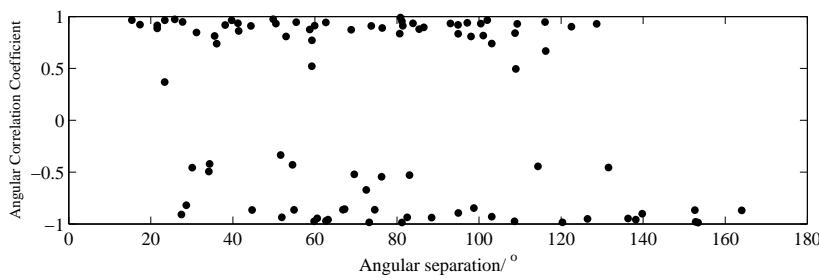


图 6 拟合天体测量参数时各星计时残差相关系数

Fig. 6 The angular correlation coefficient results of pulsars' timing residuals based on the fitting of astrometric parameters

由上可得, 由历表误差引起的坐标轴旋转误差(只拟合  $F_0$  和  $F_1$ )相对于SSB位置误差(只拟合天测参数)导致的计时残差角相关性可忽略, 即SSB位置误差是导致脉冲星计时残差角相关性的主要原因; 在不拟合脉冲星参数的情况下, 计算结果与理论预计更符合, 呈偶极效应.

为研究不同版本历表对脉冲星计时残差角相关特性的影响, 下面采用DE200、DE405和DE421进行计算, 由于DE405在DE200基础上经14 yr的改进, 观测数据精度提高和理论模型的更新使得DE405比DE200有更高的精度. 同样在不拟合脉冲星参数的情况下, 计算脉冲星计时残差相关系数结果. 由图7-9可见: 所采用的历表越精确, 由历表误差导致的脉冲星计时残差角相关性越弱.

最后, 为验证不存在历表误差时, 各星间计时残差协方差  $C(\theta_{ij}) = 0$ , 图10为采用实际观测和数据处理所参考的历表DE421, 结果显示不含历表误差时脉冲星计时残差协方差接近0. 由图3和图10可得, 采用原计时观测所参考的历表DE421时, 脉冲星计时残差协方差接近于0, 此时角相关性可忽略, 且由DE200产生的相对于DE421的历表误差对计时残差的相关性影响可通过拟合脉冲星自转参数和天体测量参数消除.

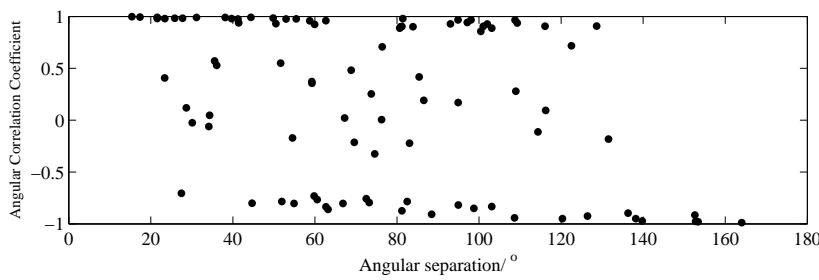


图 7 采用DE200时各星计时残差相关系数

Fig. 7 The angular correlation coefficient results of pulsars' timing residuals using DE200 without fitting

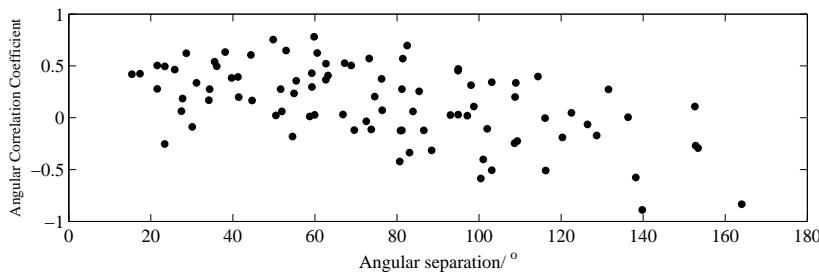


图 8 采用DE405时各星计时残差相关系数

Fig. 8 The angular correlation coefficient results of pulsars' timing residuals using DE405 without fitting

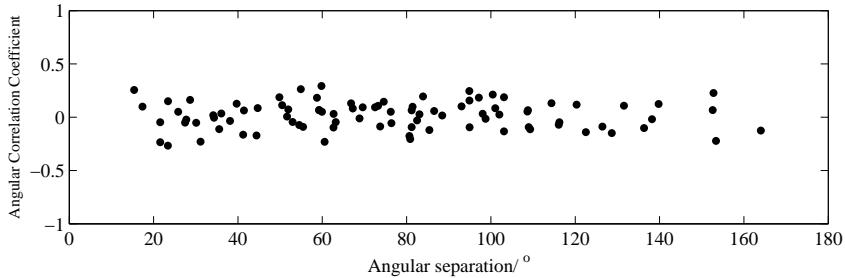


图 9 采用DE421时各星计时残差相关系数

Fig. 9 The angular correlation coefficient results of pulsars' timing residuals using DE421 without fitting

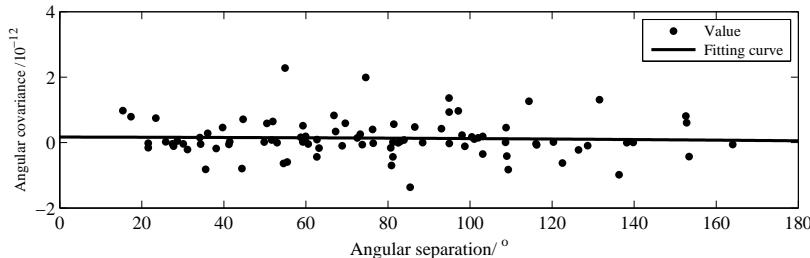


图 10 采用DE421时各星计时残差角相关结果

Fig. 10 The angular covariance results of pulsars' timing residuals using DE421 without fitting

## 4 结论

本文基于PPTA实测数据计算并验证了太阳系行星历表误差引起的PPTA计时阵中各脉冲星计时残差角相关偶极特征, 在使用DE200且不作脉冲星参数拟合的情况下, 角相关结果更符合余弦波动趋势; 历表越精确, 由历表误差导致的脉冲星计时残差角相关性越弱; 发现由历表误差引起的SSB位置误差是导致脉冲星计时残差角偶极相关的主要原因; 通过拟合脉冲星自转参数和天体测量参数, 可消除历表误差对残差相关性的影响。由于此次计算所采用的PPTA脉冲星分布区间有限, 在两星夹角大于 $150^\circ$ 时数据点稀少, 且选取的PPTA实测数据时间跨度不足5 yr, 由于脉冲星计时模型中参数拟合精度有限, 导致计算结果与理论估计有一定差距。随着国际上更多大型望远镜加入脉冲星计时阵列开展工作, 脉冲星计时阵观察能力的提高使得更多分布于不同天区的脉冲星将列入常规观测, 精度更高跨度更长的计时观测结果会陆续发表, 由太阳系行星历表误差引起的残差角相关偶极效应的可辨别特征将更为明显。

## 参 考 文 献

- [1] Manchester R N. ChJAS, 2006, 6: 139
- [2] 邓雪梅, 樊敏, 谢懿. 天文学报, 2013, 54: 550
- [3] Deng X M, Fan M, Xie Y. ChA&A, 2014, 38: 330
- [4] Tiburzi C, Hobbs G B, Kerr M, et al. MNRAS, 2016, 455: 4339
- [5] Hellings R W, Downs G S. ApJ, 1983, 265: 39
- [6] Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. PhRvL, 2016, 116: 061102
- [7] Tong M L, Yan B R, Zhao C S, et al. ChPhL, 2013, 30: 100402
- [8] Tong M L, Zhao C S, Yan B R, et al. RAA, 2014, 14: 390
- [9] Tong M L, Ding Y H, Zhao C S, et al. RAA, 2016, 16: 49
- [10] Edwards R T, Hobbs G B, Manchester R N. MNRAS, 2006, 372: 1549
- [11] Champion D J, Hobbs G B, Manchester R N, et al. ApJ, 2010, 720: 201
- [12] Liang L, Li G, Wang G L. RAA, 2016, 16: 58
- [13] Andrew L, Francis G S. Pulsar Astronomy, 4th Edition. New York: Cambridge University Press, 2012: 66-69
- [14] Petit G, Thomas C, Tavella P. Proceedings of the 24th PTI Meeting, 1993: 73

# Research on the Spatial Correlations of Pulsar Timing Residuals Induced by Solar System Ephemeris Errors

ZHU Xing-zhi<sup>1</sup> TONG Ming-lei<sup>1,2</sup> ZHAO Cheng-shi<sup>1,2</sup> GAO Yu-ping<sup>1,2</sup>

(1 National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600)

(2 Key Laboratory of Time and Frequency Primary Standard, National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600)

**ABSTRACT** Based on the introduction of pulsar timing residuals and the influential mechanism of ephemeris errors, the resolution of timing residuals and its angular correlation induced by ephemeris errors has been provided. The angular correlation of the timing residuals induced by different ephemeris, such as DE200, DE405, and DE421, is calculated based on the practically measured data observed by the Australia observatory PPTA (Parkes Pulsar Timing Array), and the results in 4 kinds of fitting methods about pulsar timing parameters are compared. The distinct level of dipolar interaction on the angular correlation induced by ephemeris errors has been verified. The SSB (Solar System Barycenter) position error induced by ephemeris errors is the main factor leading to the dipolar turbulence of angular correlation, and the angular correlation effect induced by ephemeris errors could be removed by means of fitting both the rotational parameters and astrometric parameters of pulsars.

**Key words** astrometry, time, pulsar, ephemerides, methods: analytical