第62卷 第4期 天 文 学 报 Vol.62 No.4
2021年7月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Jul., 2021

doi: 10.15940/j.cnki.0001-5245.2021.04.001

两个新的Hansen系数的递推公式*

吴连大[1†] 张明江[1,2‡]

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210023)
(2 中国科学院空间目标与碎片观测重点实验室 南京 210023)

摘要 推导给出了两个新的Hansen系数$X_k^{-(n+1),m}$的递推关系:

$$\begin{cases} 2k\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,m} = (m-n)eX_k^{-(n+1),m-1} + 2mX_k^{-(n+1),m} + \\ (m+n)eX_k^{-(n+1),m+1}, \end{cases} \tag{R5}$$

$$\begin{cases} (m+1)(m-n-1)(n-m)e^2X_k^{-(n+1),m-2} - \\ (m+1)(m+n-1)(2m-n-1)e^2X_k^{-(n+1),m} - \\ (m-1)(m-n+1)(n+2m+1)e^2X_k^{-(n+1),m} + \\ (m+1)(m-1)\left[4m+2me^2-4k(1-e^2)^{3/2}\right]X_k^{-(n+1),m} + \\ 2k(m-1)(n+2m+1)e\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,m+1} + \\ 2k(m+1)(2m-n-1)e\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,m-1} - \\ (m-1)(n+m+1)(n+m)e^2X_k^{-(n+1),m+2} = 0, \end{cases} \tag{R6}$$

其中, n、m和k是Hansen系数$X_k^{-(n+1),m}$的3个指标, e为轨道偏心率. 递推公式(R5)可以执行普通Hansen系数的向后递推, 需要一行初值, 公式简单. 递推公式(R6)可以执行偏心率函数的向前递推, 需要两行初值, 比Vakhidov给出的递推公式明显简单. 算例说明, 这两种递推是有效的.

关键词 天体力学, 摄动理论: 摄动函数及其展开方法, 方法: 数值
中图分类号: P133; **文献标识码**: A

1 Hansen系数的基本递推公式

在卫星动力学领域, Hansen系数$X_k^{n,m}$有两种: 一种是n为负数, 出现在地球引力场摄动的摄动函数展开中[1]; 一种是n为正数, 出现在第3体引力摄动的摄动函数展开中[2]. 从而, 将Hansen系数表达为$X_k^{-(n+1),m}$和$X_k^{n,m}$形式, 其中, n、m和k是Hansen系数$X_k^{-(n+1),m}$和$X_k^{n,m}$的3个指标.

2020-10-03收到原稿, 2020-11-22收到修改稿
*国家自然科学基金项目(11873096)和中国科学院青年创新促进会(2017367)资助
†wld@pmo.ac.cn
‡mjzhang@pmo.ac.cn

Giacaglia[3]和McClain[4]给出了许多Hansen系数$X_k^{-(n+1),m}$和$X_k^{n,m}$的递推公式. 但是, 这些递推公式只有5个是独立的, 即:

$$m\sqrt{1-e^2}X_k^{-(n+2),m} = \frac{ne}{2\sqrt{1-e^2}}\left[X_k^{-(n+1),m-1} - X_k^{-(n+1),m+1}\right] + kX_k^{-n,m}, \tag{R1}$$

$$(1-e^2)X_k^{-(n+1),m} = X_k^{-n,m} + \frac{1}{2}e\left[X_k^{-n,m+1} + X_k^{-n,m-1}\right], \tag{R2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (1-e^2)^2X_k^{-(n+2),m} = (1-e^2)e\left[X_k^{-(n+1),m+1} + X_k^{-(n+1),m-1}\right] + \\ (1-\frac{e^2}{2})X_k^{-n,m} - \frac{e^2}{4}\left[X_k^{-n,m+2} + X_k^{-n,m-2}\right], \end{array}\right. \tag{R3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (m-n-1)e^2X_k^{-(n+1),m-2} + 2(2\,m-n-1)eX_k^{-(n+1),m-1} + \\ \left[4m + 2me^2 - 4k(1-e^2)^{3/2}\right]X_k^{-(n+1),m} + \\ 2(n+2m+1)eX_k^{-(n+1),m+1} + (n+m+1)e^2X_k^{-(n+1),m+2} = 0, \end{array}\right. \tag{R4}$$

$$\left\{\begin{array}{l} n\left[(n-2)^2 - m^2\right](1-e^2)X_k^{n-4,m} - n(n-2)(2n-3)X_k^{n-3,m} + \\ (n-1)\left[n(n-2) + 2km\sqrt{1-e^2}\right]X_k^{n-2,m} - (n-2)k^2X_k^{n,m} = 0, \end{array}\right. \tag{R*}$$

其中, e为轨道偏心率.

由于递推公式(R*)需要较大的初值, 一般很少使用. 因此, 上述(R1)–(R4)式, 称之为Hansen系数的基本递推公式.

在卫星动力学领域, 摄动函数展开, 涉及两类特殊的Hansen系数$G_{l,p,q}$和$H_{l,p,q}$[1–2]: $G_{l,p,q} = X_{l-2p+q}^{-(l+1),l-2p}$, $H_{l,p,q} = X_{l-2p+q}^{l,l-2p}$. 它们通常称之为偏心率函数[3, 5], l、p、q是偏心率函数$G_{l,p,q}$和$H_{l,p,q}$的3个指标. 若用Hansen系数的$X_k^{-(n+1),m}$和$X_k^{n,m}$形式, 表达偏心率函数$G_{l,p,q}$和$H_{l,p,q}$, 则为: $G_{n,(n-m)/2,k-m} = X_k^{-(n+1),m}$和$H_{n,(n-m)/2,k-m} = X_k^{n,m}$. 显然, 对于偏心率函数, 要求Hansen系数$X_k^{-(n+1),m}$和$X_k^{n,m}$的指标n、m, 满足条件: $(n-m)$为偶数.

2 Hansen系数递推的分类

利用递推公式(R1)–(R3), 可以进行n递推; 利用递推公式(R4), 可以进行m递推. 利用递推公式(R1)–(R3)进行n向前递推, 需要辅助递推.

举个例子, 考察下列递推过程:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & X_k^{-3,-2}, & X_k^{-3,-1}, & X_k^{-3,0}, & X_k^{-3,1}, & X_k^{-3,2} & & \\ & X_k^{-4,-3}, & X_k^{-4,-2}, & X_k^{-4,-1}, & X_k^{-4,0}, & X_k^{-4,1}, & X_k^{-4,2}, & X_k^{-4,3} & \\ X_k^{-5,-4}, & X_k^{-5,-3}, & X_k^{-5,-2}, & X_k^{-5,-1}, & X_k^{-5,0}, & X_k^{-5,1}, & X_k^{-5,2}, & X_k^{-5,3}, & X_k^{-5,4} \end{array}$$

利用递推公式(R2)进行Hansen系数$X_k^{-(n+1),m}$的n向前递推, m的取值范围为$[-n, +n]$. 从$n=2$开始, 到第2行, 只能递推出中间3个函数, 两头的4个函数(标为红色的函数)需要利用递推公式(R4)递推(或用直接方法计算), 再向下推, 仍然有4个函数(标为红色的函数)递推不出来, 继续向下推, 每一行均是如此. 利用递推公式(R1)和(R3)的n向前递推, 也存在同样的问题. 在n向前递推中, 需要解决这个问题. 然而, 在n向后递推中, 不存在这个问题.

综上所述, 利用递推公式(R1)–(R4), 可以实行的递推, 如表1所示. 由表1可知, 这里没有普通Hansen系数的一行初值向后递推公式, 也缺少偏心率函数的向前递推的辅助递推公式.

表 1 4种基本递推可以实行的递推

Table 1 The recursions implemented by four basic recursion formulae

Application	Direction	Initial values		Auxiliary recursion	Singularity
		One line	Two lines		
Ordinary Hansen coefficient	Forward	(R2)	(R1) and (R3)	(R4)	(R1): $m=0$
	Backward	Lack	(R1)		
Eccentricity function	Forward		(R1) and (R3)	Lack	(R1): $m=0$
	Backward		(R1)		

3 基本递推公式的补充

3.1 普通Hansen系数的一行初值向后递推公式

利用基本递推公式(R1)和(R2), 不难推导出普通Hansen系数的一行初值向后递推公式, 具体推导方法如下:

(R1)式乘以$\sqrt{1-e^2}$, 得到:

$$2m(1-e^2)X_k^{-(n+2),m} = ne\left[X_k^{-(n+1),m-1} - X_k^{-(n+1),m+1}\right] + 2k\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,m}. \quad (1)$$

(R2)式中, $n \Rightarrow n+1$, 乘以m, 得到:

$$2m(1-e^2)X_k^{-(n+2),m} = 2mX_k^{-(n+1),m} + me\left[X_k^{-(n+1),m+1} + X_k^{-(n+1),m-1}\right]. \quad (2)$$

上述(1)和(2)式相减, 即得:

$$\left\{\begin{array}{l} 2k\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,m} = (m-n)eX_k^{-(n+1),m-1} + 2mX_k^{-(n+1),m} + \\ (m+n)eX_k^{-(n+1),m+1}, \end{array}\right. \quad \text{(R5)}$$

此即我们需要的普通Hansen系数的一行初值向后递推公式.

递推公式(R5)为连续3推1方式, 向后递推. 它的另一个用处是: 可以将不是偏心率函数的Hansen系数, 表达成3个偏心率函数的组合.

3.2 偏心率函数向前递推需要的辅助递推公式

偏心率函数向前递推, 一般采用递推公式(R1)和(R3)进行递推. 考察如下向前递推过程:

$$\begin{array}{c} X_k^{-3,-2}, \quad \cancel{X_k^{-3,-1}}, \quad X_k^{-3,0}, \quad \cancel{X_k^{-3,1}}, \quad X_k^{-3,2} \\ X_k^{-4,-3}, \quad \cancel{X_k^{-4,-2}}, \quad X_k^{-4,-1}, \quad \cancel{X_k^{-4,0}}, \quad X_k^{-4,1}, \quad \cancel{X_k^{-4,2}}, \quad X_k^{-4,3} \\ X_k^{-5,-4}, \quad \cancel{X_k^{-5,-3}}, \quad X_k^{-5,-2}, \quad \cancel{X_k^{-5,-1}}, \quad X_k^{-5,0}, \quad \cancel{X_k^{-5,1}}, \quad X_k^{-5,2}, \quad \cancel{X_k^{-5,3}}, \quad X_k^{-5,4} \end{array}$$

其中, 未被划去的函数均是偏心率函数, 我们希望递推均在这些函数中进行. 从已知的初值(第1、第2行), 递推到第3行, 中间的偏心率函数均可递推处理. 但是, 两头的$X_k^{-5,-4}$和$X_k^{-5,4}$递推不出来, 这时需要补充新的递推公式.

对于普通的Hansen系数(包括上述递推中的所有函数), 可以利用递推公式(R4)进行递推. 但是, 对于偏心率函数, 在一行中是不连续的, 偏心率函数和普通的Hansen系数交替出现, 普通的Hansen系数是不能参加递推的, 这就必须推导新的递推公式.

不失一般性, 考察下面5个偏心率函数:

$$\begin{gathered} X_k^{-n,m-3}, X_k^{-n,m-1} \\ X_k^{-(n+1),m-4}, X_k^{-(n+1),m-2}, X_k^{-(n+1),m} \end{gathered}$$

如果能够推导出这5个函数的递推关系, 这个问题也就解决了.

下文利用(R4)和(R5)两个递推公式, 推导给出偏心率函数向前递推需要的辅助递推公式, 具体推导方法如下:

(R5)式中, $m \Rightarrow m+1$, 乘以$(m-1)$, 得到

$$\left\{ \begin{aligned} & 2(m+1)(m-1)X_k^{-(n+1),m+1} = 2(m-1)k\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,m+1} - \\ & (m-1)(m+n+1)eX_k^{-(n+1),m+2} - (m-1)(m-n+1)eX_k^{-(n+1),m}. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

(R5)式中, $m \Rightarrow m-1$, 乘以$(m+1)$, 得到

$$\left\{ \begin{aligned} & 2(m-1)(m+1)X_k^{-(n+1),m-1} = 2\,k(m+1)\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,m-1} - \\ & (m+1)(m+n-1)eX_k^{-(n+1),m} - (m+1)(m-n-1)eX_k^{-(n+1),m-2}. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

将(3)和(4)式代入(R4)式, 乘以$(m+1)(m-1)$, 即得

$$\left\{ \begin{aligned} & (m+1)(m-n-1)(n-m)e^2X_k^{-(n+1),m-2} - \\ & (m+1)(m+n-1)(2m-n-1)e^2X_k^{-(n+1),m} - \\ & (m-1)(m-n+1)(n+2m+1)e^2X_k^{-(n+1),m} + \\ & (m+1)(m-1)[4m+2me^2-4k(1-e^2)^{3/2}]X_k^{-(n+1),m} + \\ & 2k(m-1)(n+2m+1)e\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,m+1} + \\ & 2k(m+1)(2m-n-1)e\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,m-1} - \\ & (m-1)(n+m+1)(n+m)e^2X_k^{-(n+1),m+2} = 0\,, \end{aligned} \right. \tag{R6}$$

此即我们需要的递推公式.

特别是当$m=n-2$时, 可得$X_k^{-(n+1),n}$:

$$\left\{ \begin{aligned} & (n-3)(2n-1)e^2X_k^{-(n+1),n} = -3e^2X_k^{-(n+1),n-4} + \\ & \left[2(n-3)(n-2)+3(n-2)e^2-2(n-3)k(1-e^2)^{3/2}\right]X_k^{-(n+1),n-2} + \\ & 3(n-3)ke\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,n-1} + (n-5)ke\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,n-3}\,. \end{aligned} \right. \tag{R6-1}$$

当$m=-n+2$时, 可得$X_k^{-(n+1),-n}$:

$$\left\{\begin{array}{l}(n-3)(2n-1)e^2X_k^{-(n+1),-n}=-3e^2X_k^{-(n+1),-n+4}+\\ \left[2(n-2)(n-3)+3(n-2)e^2+2(n-3)k(1-e^2)^{3/2}\right]X_k^{-(n+1),-n+2}-\\ 3(n-3)ke\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,-n+1}-(n-5)ke\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,-n+3}\,.\end{array}\right. \tag{R6-2}$$

上述(R6-1)和(R6-2)式, 就是偏心率函数递推所需要的辅助递推公式.

值得说明的是, Vakhidov利用如下递推[6]:

$$\begin{array}{c}X_k^{-n,m-1},X_k^{-n,m+1}\\ X_k^{-(n+1),m-2},X_k^{-(n+1),m},X_k^{-(n+1),m+2}\\ \Rightarrow\quad X_k^{-(n+2),m-3},X_k^{-(n+2),m-1},X_k^{-(n+2),m+1},X_k^{-(n+2),m+3}\end{array}$$

通过前面两行5个函数, 递推第3行最靠边的函数, 利用计算机代数推导, 给出了类似的表达式. 例如, $X_k^{-(n+1),-n}$的公式为[6]:

$$\begin{array}{r}\alpha_1X_s^{n-2,m-3}=\beta_1X_s^{n-1,m-2}+\gamma_1X_s^{n-1,m}+\delta_1X_s^{n-1,m+2}+\\ \varepsilon_1X_s^{n,m-1}+\varphi_1X_s^{n,m+1},\end{array} \tag{V1}$$

其中, $s\neq 0$, $n<0$,

$$\left\{\begin{array}{ll}\alpha_1= & 2e^2(1-e^2)^{3/2}(m+n-2)(m+n-3)(m^2-1),\\ \beta_1= & 4se(2m^3+2m^2n-4m^2-nm-3n-2m+4)(1-e^2)^2+\\ & 2ne(m^2-1)\sqrt{1-e^2}\left[e^2(2m+2n-3)-2(m-2)\right],\\ \gamma_1= & 4se(m+1)(n+2m^2-6m+4)(1-e^2)^2+e^3n\sqrt{1-e^2}\times\\ & (3n-n^2m+2-3m-2m^2+3m^3-nm-2m^2n+n^2)+\\ & 4e\sqrt{1-e^2}mn(1-m^2),\\ \delta_1= & e^3\sqrt{1-e^2}n(m-1)(m-n)(m-n+1),\\ \varepsilon_1= & 8s^2(1-e^2)^{5/2}(2-m^2+m)+4se^4(m^2-1)(m+2n-2)+\\ & 4se^2(1-m^2)(2n+3m-6)+8s(m^2-1)(m-2),\\ \varphi_1= & 2se^2(1-e^2)(-m^3+2m^2+mn^2-n^2-2m^2n+nm+n+m-2).\end{array}\right. \tag{V2}$$

注意: 上述(V1)和(V2)式中, $s\Rightarrow k$, $n\Rightarrow -n$, 相应函数表达形式即与本文一致. 显然, Vakhidov给出的表达式(V1)和(V2)[6], 比公式(R6-2)复杂得多.

4　递推方法

4.1　Hansen系数的(R5)向后递推方法

Hansen系数的(R5)向后递推, 需要计算一行初值, 递推过程如下:

$$X_k^{-(n+1),-n}, X_k^{-(n+1),-n+1}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, X_k^{-(n+1),n-1}, X_k^{-(n+1),n}$$
$$\vdots$$
$$X_k^{-5,-4}, X_k^{-5,-3}, X_k^{-5,-2}, X_k^{-5,-1}, X_k^{-5,0}, X_k^{-5,1}, X_k^{-5,2}, X_k^{-5,3}, X_k^{-5,4}$$
$$X_k^{-4,-3}, X_k^{-4,-2}, X_k^{-4,-1}, X_k^{-4,0}, X_k^{-4,1}, X_k^{-4,2}, X_k^{-4,3}$$
$$X_k^{-3,-2}, X_k^{-3,-1}, X_k^{-3,0}, X_k^{-3,1}, X_k^{-3,2}$$

这种向后递推, 可以递推出所有Hansen系数, 没有像向前递推那样需要“另外计算”的函数; 而且, 没有奇点, 也没有e分母. 从公式上看, 这是一种安全的递推, 只是初值计算量要大一些.

顺便说一下, 递推出Hansen系数后, Hansen系数的导数可以利用Hansen系数计算. 从这个意义上讲, 这种方法多计算的“无用的”函数也不能认为是完全无用的.

4.2 偏心率函数的(R6)向前递推方法

偏心率函数的向前递推过程如下:

$$X_k^{-3,-2}, \cancel{X_k^{-3,-1}}, X_k^{-3,0}, \cancel{X_k^{-3,1}}, X_k^{-3,2}$$
$$X_k^{-4,-3}, \cancel{X_k^{-4,-2}}, X_k^{-4,-1}, \cancel{X_k^{-4,0}}, X_k^{-4,1}, \cancel{X_k^{-4,2}}, X_k^{-4,3}$$
$$X_k^{-5,-4}, \cancel{X_k^{-5,-3}}, X_k^{-5,-2}, \cancel{X_k^{-5,-1}}, X_k^{-5,0}, \cancel{X_k^{-5,1}}, X_k^{-5,2}, \cancel{X_k^{-5,3}}, X_k^{-5,4}$$
$$\vdots$$
$$X_k^{-(n+1),-n}, \cancel{X_k^{-(n+1),-n+1}}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \cancel{X_k^{-(n+1),n-1}}, X_k^{-(n+1),n}$$

其中, 未被划去的函数均是偏心率函数. 首先, 利用递推公式(R1), 递推出中间的偏心率函数(当$m=0$时, 利用递推公式(R3)递推); 然后, 利用公式(R6-1)和(R6-2), 计算两头的$X_k^{-(n+1),n}$和$X_k^{-(n+1),-n}$.

对于给定的k和N (n的上限), 给定偏心率函数的两行初值:

$$X_k^{-3,-2}, X_k^{-3,0}, X_k^{-3,2}$$
$$X_k^{-4,-3}, X_k^{-4,-1}, X_k^{-4,1}, X_k^{-4,3}$$

即可递推出$X_k^{-(n+1),m}$ $(n=4,5,\cdots,N; m=-n,-n+2,\cdots,n-2,n)$. 显然, 递推公式中出现的均是偏心率函数, 得到了与Vakhidov递推[6]同样的效果.

5 (R5)和(R6)递推算例

(R5)向后递推方法, 适用于普通Hansen系数的递推, 这种方法最简单; (R6)向前递推方法, 适用于偏心率函数的递推, 这种方法实际上利用了(R1)、(R3)和(R6) 3种递推公式, 计算程序比较复杂.

对于$k=1$、偏心率$e=0.1$, 相应计算结果如表2所示. 这里给出该算例的目的是为了清晰地展现(R5)和(R6)递推方法的递推过程: 需要哪些初值, 递推出哪些结果. 表2中, 给出了6列数据, 前3列分别是Hansen系数$X_k^{-(n+1),m}(e)$的指标n、$-(n+1)$和m; 后面3列

分别是Wnuk方法[7]、(R5)向后递推和(R6)向前递推的计算结果. Wnuk方法的计算结果用来作为参考, 比对(R5)和(R6)的递推计算结果. 表2后两列中, 有下划线的数据是递推初值, 其他均是递推结果.

表 2　Hansen系数$X_k^{-(n+1),m}(e)$递推的简单算例($k=1, e=0.1$)

Table 2　A simple example of recursion of Hansen coefficients $X_k^{-(n+1),m}(e)$ ($k=1, e=0.1$)

n	$-(n+1)$	m	Wnuk's method	(R5) backward recursion	(R6) forward recursion
5	−6	−5	$0.220463393108\times10^{-10}$	$\underline{0.220463393108\times10^{-10}}$	$0.22046\mathit{5230850}\times10^{-10}$
5	−6	−4	$0.886030357479\times10^{-6}$	$\underline{0.886030357479\times10^{-6}}$	
5	−6	−3	$0.709351254089\times10^{-4}$	$\underline{0.709351254089\times10^{-4}}$	$0.709351254089\times10^{-4}$
5	−6	−2	$0.230562863411\times10^{-2}$	$\underline{0.230562863411\times10^{-2}}$	
5	−6	−1	$0.379033046485\times10^{-1}$	$\underline{0.379033046485\times10^{-1}}$	$0.379033046485\times10^{-1}$
5	−6	0	$0.315059918333\times10^{0}$	$\underline{0.315059918333\times10^{0}}$	
5	−6	1	$0.106724073232\times10^{1}$	$\underline{0.106724073232\times10^{1}}$	$0.106724073232\times10^{1}$
5	−6	2	$0.105280679952\times10^{0}$	$\underline{0.105280679952\times10^{0}}$	
5	−6	3	$0.393010452060\times10^{-2}$	$\underline{0.393010452060\times10^{-2}}$	$0.39301045206\mathit{1}\times10^{-2}$
5	−6	4	$0.438917338407\times10^{-4}$	$\underline{0.438917338407\times10^{-4}}$	
5	−6	5	$0.262254655670\times10^{-6}$	$\underline{0.262254655670\times10^{-6}}$	$0.262254655\mathit{504}\times10^{-6}$
4	−5	−4	$0.263814353966\times10^{-8}$	$0.263814353966\times10^{-8}$	$0.26381435\mathit{1998}\times10^{-8}$
4	−5	−3	$0.174907485179\times10^{-4}$	$0.174907485179\times10^{-4}$	
4	−5	−2	$0.105469787460\times10^{-2}$	$0.105469787460\times10^{-2}$	$0.105469787460\times10^{-2}$
4	−5	−1	$0.245399987149\times10^{-1}$	$0.245399987149\times10^{-1}$	
4	−5	0	$0.258630759867\times10^{0}$	$0.258630759867\times10^{0}$	$0.258630759867\times10^{0}$
4	−5	1	$0.104103118694\times10^{1}$	$0.104103118694\times10^{1}$	
4	−5	2	$0.521120013220\times10^{-1}$	$0.521120013220\times10^{-1}$	$0.521120013220\times10^{-1}$
4	−5	3	$0.128624966754\times10^{-2}$	$0.128624966754\times10^{-2}$	
4	−5	4	$-0.209251647771\times10^{-4}$	$-0.209251647771\times10^{-4}$	$-0.20925164777\mathit{7}\times10^{-4}$
3	−4	−3	$0.263043347113\times10^{-6}$	$0.263043347113\times10^{-6}$	$\underline{0.263043347113\times10^{-6}}$
3	−4	−2	$0.341066515102\times10^{-3}$	$0.341066515102\times10^{-3}$	
3	−4	−1	$0.140614245716\times10^{-1}$	$0.140614245716\times10^{-1}$	$\underline{0.140614245716\times10^{-1}}$
3	−4	0	$0.204322416608\times10^{0}$	$0.204322416608\times10^{0}$	
3	−4	1	$0.102037928865\times10^{1}$	$0.102037928865\times10^{1}$	$\underline{0.102037928865\times10^{1}}$
3	−4	2	$0.509311808276\times10^{-3}$	$0.509311808276\times10^{-3}$	
3	−4	3	$0.125210136568\times10^{-2}$	$0.125210136568\times10^{-2}$	$\underline{0.125210136568\times10^{-2}}$
2	−3	−2	$0.209775890238\times10^{-4}$	$0.209775890238\times10^{-4}$	$\underline{0.209775890238\times10^{-4}}$
2	−3	−1	$0.633435513970\times10^{-2}$	$0.633435513970\times10^{-2}$	
2	−3	0	$0.151708126135\times10^{0}$	$0.151708126135\times10^{0}$	$\underline{0.151708126135\times10^{0}}$
2	−3	1	$0.100508697100\times10^{1}$	$0.100508697100\times10^{1}$	
2	−3	2	$-0.499376309904\times10^{-1}$	$-0.499376309904\times10^{-1}$	$\underline{-0.499376309904\times10^{-1}}$

Note: The underlined data in the fifth and sixth columns of the table are the initial values of recursive calculations; and the numbers in italics marked in red in the sixth column are the ones with errors by comparing the calculation results of (R6) forward recursion and Wnuk's method.

对于(R5)向后递推, 需要$n=5$ (或$-(n+1)=-6$)的所有11个数据(这里从$n=5$ (或$-(n+1)=-6$)开始递推, 如果递推的阶次更高, 需要计算更多的初值); 而对于(R6)向前递推, 需要给出$n=2$和$n=3$ (或$-(n+1)=-3$和$-(n+1)=-4$)两行7个数据, 但是只要给出偏心率函数的数据即可, 给出的递推结果, 同样也只有偏心率函数.

由表2中的递推结果可见: (R5)的递推结果较好, 与Wnuk方法的计算结果一致. 但是, (R6)向前递推的结果一开始就出现了误差, 表2中标为红色的斜体数字, 就是计算有误差的数据. 这也许是由于递推公式中的几个数据相加减损失了有效数字. 特别是对于绝对值较小的偏心率函数, 有效数字损失得比较严重. 例如$X_1^{-6,-5}(0.1)$只有5位有效数字了. 如果需要递推到更高的阶, 这种现象可能会更加严重, 因此需要给予特别的关注.

6 结论

本文推导给出了两个新Hansen系数的递推公式(R5)和(R6), 它们可以作为基本递推公式的有效补充. 递推公式(R5)能够实现普通Hansen系数的一行初值向后递推. 递推公式(R6)作为偏心率函数向前递推需要的辅助递推公式, 能够完整实现偏心率函数的两行初值向前递推. (R5)和(R6)递推公式简单, 算例表明这两种递推方法有效.

参 考 文 献

[1] Kaula W M. GeoJI, 1961, 5: 104

[2] Kaula W M. AJ, 1962, 67: 300

[3] Giacaglia G E O. CeMec, 1976, 14: 515

[4] McClain W D. A Recursively Formulated First-Order Semianalytic Artificial Satellite Theory Based on the Generalized Method of Averaging. Volume II. The Explicit Development of the First-Order Averaged Equations of Motion for the Nonspherical Gravitational and Nonresonant Third-Body Perturbations. NASA CR-156783, 1978

[5] Kaula W M. Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy. Waltham: Blaisdell Publishing Company, 1966

[6] Vakhidov A A. CeMDA, 2001, 81: 177

[7] Wnuk E. AdSpR, 1997, 19: 1735

Two New Recursion Formulae of Hansen Coefficients

WU Lian-da[1] ZHANG Ming-jiang[1,2]

(1 Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210023)
(2 Key Laboratory of Space Object and Debris Observation, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210023)

Abstract Two new recursion formulae of Hansen coefficents $X_k^{-(n+1),m}$ are deduced:

$$\left\{\begin{array}{l} 2k\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,m} = (m-n)eX_k^{-(n+1),m-1} + 2mX_k^{-(n+1),m} + \\ (m+n)eX_k^{-(n+1),m+1}, \end{array}\right. \tag{R5}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (m+1)(m-n-1)(n-m)e^2X_k^{-(n+1),m-2} - \\ (m+1)(m+n-1)(2m-n-1)e^2X_k^{-(n+1),m} - \\ (m-1)(m-n+1)(n+2m+1)e^2X_k^{-(n+1),m} + \\ (m+1)(m-1)\left[4m+2me^2-4k(1-e^2)^{3/2}\right]X_k^{-(n+1),m} + \\ 2k(m-1)(n+2m+1)e\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,m+1} + \\ 2k(m+1)(2m-n-1)e\sqrt{1-e^2}X_k^{-n,m-1} - \\ (m-1)(n+m+1)(n+m)e^2X_k^{-(n+1),m+2} = 0, \end{array}\right. \tag{R6}$$

where n, m and k are three indexes of Hansen coefficients $X_k^{-(n+1),m}$, and e is the orbital eccentricity. Recursion formula (R5) can be used to perform the backward recursion of ordinary Hansen coefficents with one line of initial values, and it is simple. Recursion formula (R6) can be used to perform the forward recursion of eccentricity functions with two lines of initial values, and it is obviously simpler than Vakhidov's recursion formula. Numerical example shows that these two new recursion formulae of Hansen coefficents are effective.

Key words celestial mechanics, perturbation theory: perturbation function and its expansion method, methods: numerical