

# 探究系外行星系统中行星质量排序熵的演化\*

吴东红<sup>†</sup>

(安徽师范大学物理与电子信息学院 芜湖 241002)

**摘要** 研究定义了多行星系统中与质量排序有关的熵, 并利用蒙特卡洛模拟和 $N$ 体动力学数值模拟研究了行星系统动力学演化对行星质量排序熵的影响. 结果表明, 行星系统动力学演化过程中的碰撞、位置交换等行为会导致行星系统的质量排序熵发生变化. 位置交换会使系统的质量排序熵逐渐增加, 而碰撞则可能导致系统质量排序熵减少. 尽管系统的熵值可能减少, 但当前系统的质量排序熵与当前系统所能达到的最大质量排序熵的比一直呈增加的趋势, 表明系统是朝着平衡态的方向演化的. 与开普勒多行星系统的比较发现, 约 $16.9\% \pm 4.7\%$ 的开普勒多行星系统仍保持有序的质量排布, 说明这些系统可能没有经历剧烈的动力学演化.

**关键词** 方法: 数值, 方法: 统计, 行星与卫星: 动力学演化与稳定性, 熵

**中图分类号** P132; **文献标识码**: A

## 1 引言

热力学第二定律阐明了自然界中自发物理过程的方向性, 即在孤立系统中, 这些过程都沿着熵增的方向进行. 统计物理学证明, 热力学系统的熵与热力学概率之间存在如下玻尔兹曼关系<sup>[1]</sup>:

$$S = k \ln W, \quad (1)$$

其中 $W$ 表示与给定宏观状态相对应的微观状态数, 即热力学概率,  $k$ 为玻尔兹曼常量. 从微观角度来看, 自发物理过程实质上是由概率较小的状态向概率较大的状态演变, 由包含微观态数目较少的宏观态向包含微观态数目较多的宏观态演变. 热力学中常见的热传导过程<sup>[2]</sup>、功变热过程<sup>[3]</sup>以及扩散现象<sup>[4]</sup>等都是熵增的过程, 即热力学概率增加的结果. 热力学概率增加的过程本质上是系统由非

平衡态向平衡态演化的过程.

除了这些直接跟热相关的现象, 自然界中的很多其他过程, 例如行星系统的动力学演化也是朝着平衡态的方向进行的. 本文拟类比热力学中玻尔兹曼熵的定义, 定义行星系统中与行星质量排序有关的熵, 并结合行星系统的蒙特卡洛模拟和 $N$ 体动力学数值模拟, 研究质量排序熵的演化.

## 2 开普勒行星系统中行星质量排序熵的定义

有研究<sup>[5]</sup>认为开普勒行星系统中行星的排列是有序的, 即行星离中心恒星的距离越远, 行星的半径和质量越大. 在热力学中, 有序通常意味着低熵. 许多关于行星演化的理论<sup>[6-7]</sup>认为, 我们今天所观测到的行星系统经历了数千万年的动力学演化.

2024-04-19收到原稿, 2024-07-29收到修改稿

\*国家自然科学基金项目(12103003)、安徽师范大学物理与电子信息学院2024年院级“课程思政”示范课程建设项目(wdxykcsz202402)资助

<sup>†</sup>wudonghong@ahnu.edu.cn

在这个演化过程中, 行星可能会经历相互碰撞、合并以及位置交换, 预期今天看到的行星系统的排列应该是高度无序的. 如果行星系统在排列上非常有序, 那说明这些行星系统可能没有经历过特别剧烈的动力学过程, 至少它们的相对位置并没有频繁发生改变. 根据行星系统当前的熵来推断其演化历史对于研究行星系统的动力学演化过程具有重要意义. 那么, 如何确定行星系统中跟行星排序有关的熵呢? 一种合适的方法是利用熵的微观解释来定义多行星系统中与排序有关的熵.

鉴于文献[8]的研究中参考(1)式玻尔兹曼熵的形式定义过行星系统中跟行星半径排序有关的熵, 我们也类似定义行星系统中跟行星质量排序有关的熵. 我们选择用质量替代半径定义熵是因为质量与行星系统的动力学演化是直接相关的. 在我们的定义中, 宏观状态是行星排序的得分, 相应的微观状态是在这个得分下, 行星系统有多少种可能的排序. 在一个有  $N$  颗行星的系统中, 相邻行星质量的排序得分为: 若  $m_{i+1} > m_i$ , 则得分  $t_i = 1$ ; 若  $m_{i+1} \leq m_i$ , 则得分  $t_i = -1$ . 其中  $m_i$  和  $m_{i+1}$  分别为系统中从内往外(即从靠近恒星到远离恒星)数的第  $i$  颗行星和第  $i+1$  颗行星的质量. 整个系统的质量排序得分为  $T = \sum_{i=1}^{N-1} t_i$ . 而与这个得分相对应的行星系统质量排序的热力学概率, 即微观状态数  $W_T$  可以由欧拉数  $A_{N, (N+T-1)/2}$  进行计算<sup>[8]</sup>. 欧拉数  $A_{n,q}$  的表达式为:

$$A_{n,q} = \sum_{j=0}^q (-1)^j \binom{n+1}{j} (q+1-j)^n. \quad (2)$$

欧拉数  $A_{n,q}$  表示在 1 到  $n$  的排列中, 恰好有  $q$  个位置, 其中元素比前一个元素大. 那么排序得分为  $T$  的行星系统的质量排序熵则为  $S_T = \ln W_T$ , 这里排序熵的定义略去了传统玻尔兹曼关系中的玻尔兹曼常数. 如果一个包含  $N$  颗行星的系统中, 行星从内到外是按照质量从小到大的顺序排列的, 那么系统的质量排序得分为  $N-1$ , 相应的微观状态只有一种, 即  $W_T = 1$ , 系统的质量排序熵为 0. 类似的, 如果行星从内到外按照质量从大到小的

顺序排列, 那么系统的质量排序得分为  $-N+1$ , 相应的微观状态也只有一种, 系统的排序熵也为 0. 可以看到, 在行星系统有序排列的时候, 系统的排序熵非常小. 文献[8]在考虑上述熵的基础上, 又额外考虑了行星排序积分路径对状态数的影响和相邻行星对得分异号对状态数的影响. 这两种熵在确定系统状态数的时候需要用数值的方法来进行统计, 计算量较大. 因为上述 3 种熵的演化趋势相近, 我们只选择了最简单的第 1 种熵用于我们的工作中. 尽管行星系统中行星的数目一般小于 10, 不是“大数分子”系统, 但是其熵的演化, 可以类比热力学中玻尔兹曼熵的演化, 反映了系统向平衡态演化的过程.

### 3 行星系统的动力学演化对行星系统质量排序熵的影响

#### 3.1 利用蒙特卡洛模拟研究行星系统的演化对质量排序熵的影响

核吸积模型认为小质量行星倾向于在行星系统内部形成, 而大质量行星倾向于在系统外部形成<sup>[9]</sup>. 但如果行星系统在演化过程中发生了位置交换, 那么行星系统的质量排序熵也会相应变化. 文献[8]借助蒙特卡洛方法, 模拟了行星系统演化过程中的位置交换造成的行星系统半径排序熵的变化, 并发现行星系统的半径排序熵随着系统的演化逐渐增加. 事实上, 在行星系统的演化过程中, 除了位置交换, 行星之间极有可能发生碰撞、散射等过程, 这些过程也会让行星系统的质量排序熵发生变化. 这里, 我们同样利用蒙特卡洛方法, 模拟 100 组包含 20 颗行星的行星系统的动力学演化. 这些系统中行星的质量取自均值为 6 倍地球质量、标准差为 1 倍地球质量的高斯分布, 同时我们规定行星质量不能低于 0.1 倍地球质量. 我们按照质量从小到大的顺序, 将这些行星从内往外依次排列. 在每次迭代过程中, 我们假定系统中相邻行星有 10% 的概率发生位置交换, 有 0.5% 的概率发生碰撞, 且每次至多只有一对相邻行星发生位置交换或者碰撞. 同时, 我们限定当系统中只剩 8 颗行

星时, 将不再发生碰撞. 为了比较碰撞、位置交换对行星系统质量排序熵的影响, 我们同时做了两个对照组的数值模拟. 其中一组仅考虑行星相互之间的碰撞, 另一组仅考虑行星相互之间的位置交换. 在我们的模拟中, 两颗行星的碰撞皆视为质量合并<sup>[10]</sup>. 每个行星系统进行  $10^5$  次迭代, 我们追踪这些系统中行星质量排序熵的演化.

此外, 我们定义了一个新的量  $\mathcal{F}_T$  来衡量系统是否处于当前所能达到的最大热力学概率的状态,

即平衡态.  $\mathcal{F}_T$  定义如下:

$$\mathcal{F}_T = \frac{S_T}{S_{\max}}, \quad (3)$$

其中  $S_T$  是当前系统的质量排序熵,  $S_{\max}$  是当前系统中的行星质量排序所能达到的最大熵. 如果  $\mathcal{F}_T = 1$ , 意味着该系统已经达到平衡态, 即熵最大的状态.  $\mathcal{F}_T$  越小, 意味着距离平衡态越远, 系统越有序.  $S_T$  与  $\mathcal{F}_T$  的演化如图1所示.

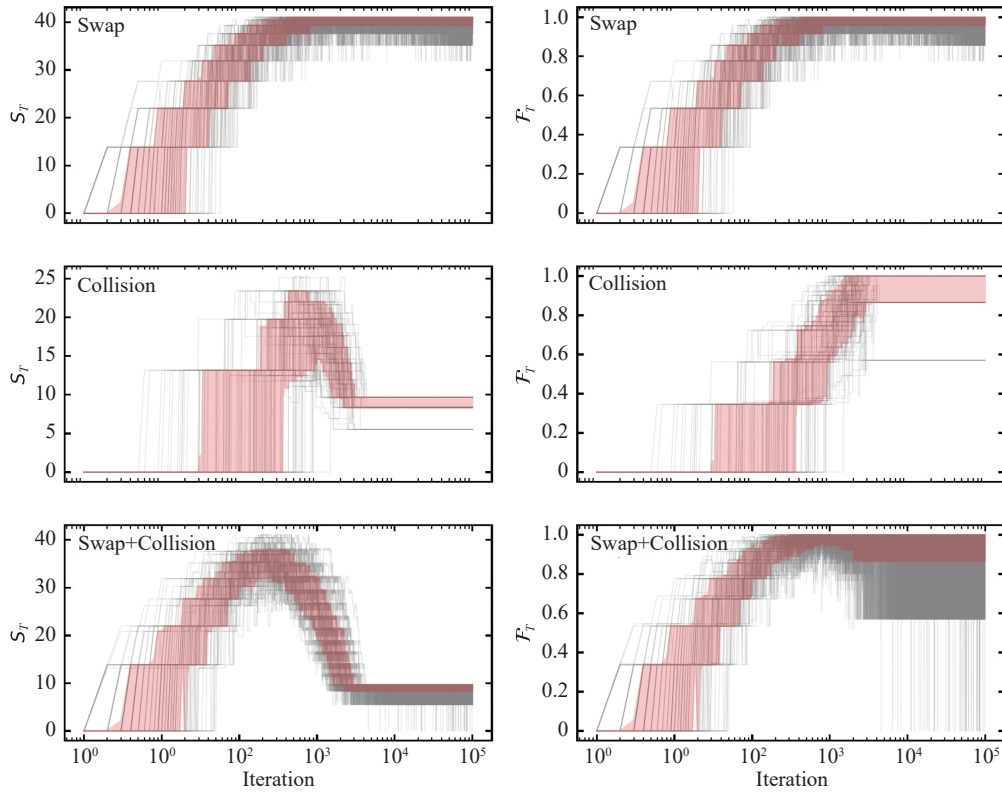


图 1 100组包含20颗行星、初始质量排序熵为0的行星系统中, 熵  $S_T$  以及熵与最大熵之比  $\mathcal{F}_T$  随迭代次数的演化. 从上到下分别展示了只考虑位置交换、只考虑碰撞以及同时考虑碰撞与位置交换的情形. 其中红色阴影区域表示100组系统的  $S_T$  和  $\mathcal{F}_T$  的68%置信区间.

Fig. 1 The evolution of entropy  $S_T$  and the ratio of entropy to maximum entropy  $\mathcal{F}_T$  in 100 sets of planetary systems, each containing 20 planets with an initial  $S_T$  of 0. From top to bottom, the plots illustrate scenarios considering only positional swaps, only collisions, and both positional swaps and collisions simultaneously. The red shaded areas represent the 68% confidence intervals for  $S_T$  and  $\mathcal{F}_T$  of the 100 sets of systems.

可以看到, 仅考虑位置交换时, 行星系统的质量排序熵  $S_T$  随迭代次数增加而不断增加. 经过1 000次迭代以后, 大部分行星系统的熵值达到最大, 行星的质量排序完全无规则. 仅考虑碰撞时, 行星系

统的熵值随迭代次数的增加先增加后降低. 先增加是因为行星间的碰撞合并改变了初始的质量排序, 增加了系统的微观状态数. 后降低则是因为行星的数目减少, 使得微观状态数目相应减少. 同时考

考虑位置交换和碰撞后,行星系统的熵值也是先增后降.在我们的模拟中,行星数目的减少对系统的熵值影响很大.而由 $\mathcal{F}_T$ 的演化可以看到,不管是否考虑碰撞,行星系统的 $\mathcal{F}_T$ 都有随迭代次数的增加而增加的趋势.对于有些系统而言,尽管行星数目减少,但其仍处于当前所能达到的最大热力学概率的状态.因此,在行星系统演化中,碰撞和位置交换,都会促使行星系统尽快达到平衡态.

### 3.2 利用 $N$ 体数值模拟研究行星系统的演化对质量排序熵的影响

上述模拟是理想化的,其中行星的位置交换、碰撞都是以给定概率发生的,且碰撞和位置交换都发生在相邻行星之间.接下来,我们通过 $N$ 体数值模拟检验行星系统动力学演化对行星系统质量排序熵的影响.我们假定每个行星系统中有20颗行星,围绕中心质量为太阳质量的恒星在共面的圆轨道上运转.其中,最内行星的轨道半长轴设置为0.1 au.同一个系统中,行星之间的距离设置为相互Hill半径的 $K$ 倍,即其他行星的轨道半长轴按照如下关系进行选取:

$$a_{i+1} - a_i = K \frac{a_{i+1} + a_i}{2} \left( \frac{m_{i+1} + m_i}{3M_s} \right)^{1/3}, \quad (4)$$

其中, $a_i$ 为第 $i$ 颗行星的轨道半长轴, $M_s$ 为中心恒星的质量,在本研究中取为太阳质量. $K$ 是一个无量纲量, $K$ 值越小,表示相邻行星相隔越近,行星系统越容易发生不稳定性.这里,我们假定 $K$ 值取自以6为均值、3为标准差的高斯分布,以确保行星系统在演化过程中发生不稳定行为<sup>[11]</sup>,从而研究行星系统的质量排序熵在动力学演化过程中的变化.值得注意的是,为了避免 $K$ 值过小以及可能取到负数的情况,我们只考虑 $K > 1$ 的情形.

系统中每个行星的质量取自平均值为6倍地球质量、标准差为1倍地球质量的高斯分布.同时,我们设定行星的质量不能低于0.1倍地球质量.依据行星的质量,我们利用文献[12]给出的Forecaster程序包推测行星的半径.我们假定这20颗行星的初始平近点角随机分布在 $0^\circ$ – $360^\circ$ 之间.

同一个系统中,20颗行星从内到外的质量可

能依次增加、依次减少或者随机排序.我们针对这3种可能各模拟了100组行星系统,分别记作A组、B组和C组.我们考虑行星与恒星之间的牛顿万有引力、行星与行星之间的牛顿万有引力作用,利用Python程序包REBOUND<sup>[13]</sup>中的mercurius<sup>[14]</sup>积分器对这些系统进行积分,积分时间设置为 $10^6$  yr.在这 $10^6$  yr间,一旦两颗行星相互之间的距离小于其半径之和,我们就认为这两颗行星发生了碰撞.在我们的模拟中,我们假定所有碰撞行为皆导致行星合并,且行星的轨道角动量、总质量以及动量在合并前后守恒.此外,一旦某颗行星离中心恒星的距离超过100 au,则认为这颗行星被散射出了行星系统.在后续分析中,我们只统计积分结束后包含至少4颗行星的系统.

A组行星系统中的行星从内到外都是按照行星质量增加的顺序排列的,所以初始熵值为0.我们挑选其中一个行星系统来分析其质量排序熵的演化,如图2所示.由图2左可以看到,在初始时刻,该系统中的行星从内到外质量依次增加.在 $10^3$  yr内,行星的总数目由20减少到10,且部分行星发生了位置互换,行星系统的质量排序熵增加, $\mathcal{F}_T$ 也逐渐增加.在 $10^3$  yr到 $5 \times 10^3$  yr之间,行星的数目由10减少到6,系统的质量排序熵减少,但 $\mathcal{F}_T$ 增加到1.说明尽管系统的熵值减少,但是系统当前的排序是该系统中行星排序概率最大的状态.在我们整个模拟中,系统最后一次构型的改变发生在 $7.6 \times 10^5$  yr左右,此时系统中只剩下5颗行星,使得行星系统对应的微观状态数减少,系统熵值也减少,但系统仍处于当前排序概率最大的状态.

3组模拟中行星系统的 $\mathcal{F}_T$ 随时间的演化如图3所示.可以看到,A组和B组中绝大多数系统的 $\mathcal{F}_T$ 都随着演化时间的增加而增加,即大部分系统逐渐趋于平衡态.而C组中行星系统始终维持一个较高的 $\mathcal{F}_T$ 值.对于初始 $\mathcal{F}_T$ 为0的A组和B组中的行星系统,只有2%的系统在演化后还能维持质量从小到大或者从大到小的排序.而对于初始 $\mathcal{F}_T$ 接近1的C组中的行星系统,只有1%的系统最后的 $\mathcal{F}_T$ 等于0.

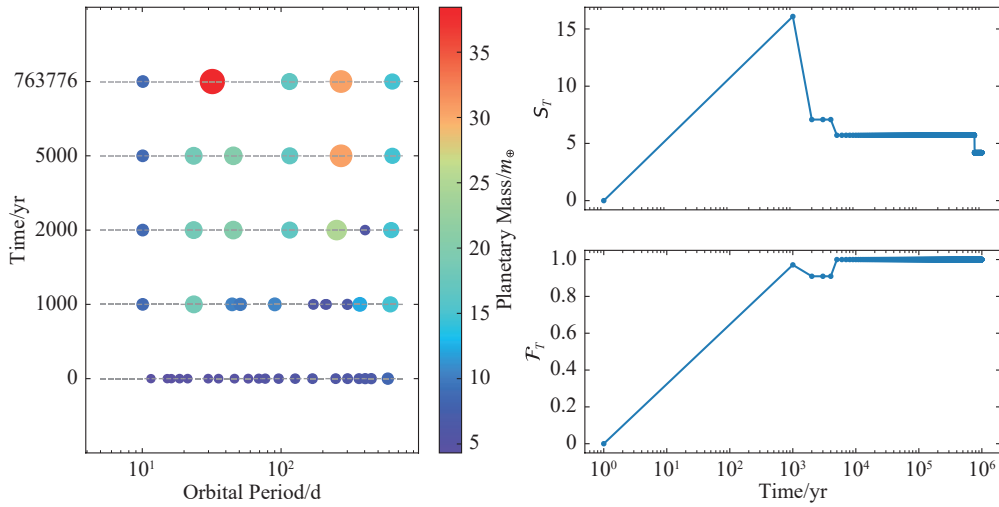


图 2 左图: 不同时刻行星系统中行星的排列, 圆圈大小和颜色表示行星的质量. 右图: 上图表示行星系统的排序熵  $S_T$  随时间的演化; 下图表示当前系统的排序熵与当前系统中行星所能达到的最大排序熵之比  $F_T$  随时间的演化.

Fig. 2 Left panel: the arrangement of planets in planetary systems at different times, where the size and color of the circles represent the mass of the planets. Right panel: the upper part illustrates the evolution of  $S_T$  for the planetary system over time. The lower part illustrates the evolution of  $F_T$  over time.

#### 4 与观测的比较

开普勒卫星探测到了77个包含4颗及以上行星的系统(去除了包含木星的系统). 这里我们只考虑包含4颗及以上数目行星的系统, 因为这些系统在观测上完备性较高<sup>[15]</sup>, 且便于和模拟结果进行比较. 前人的研究<sup>[9]</sup>认为开普勒行星系统呈现出比较有序的质量排序, 是把所有开普勒行星系统看作一个整体得到的结论. 他们将真实开普勒行星系统质量排序与随机质量排序进行对比, 发现真实的开普勒行星系统有序性更高一些. 我们借鉴这个思想可以比较上述77个开普勒行星系统真实质量排序的平均  $F_T$  (记作  $\bar{F}_T$ ) 和随机质量排序的  $\bar{F}_T$ . 具体做法是: 首先, 我们利用文献[12]给出的质量半径关系, 基于行星的半径推断出行星的质量. 然后把上述77个开普勒系统中的行星全部取出作为总的行星样本, 并按照每个系统中原有行星的个数, 从行星样本中选取相应数目的行星分发给这个系统. 分发完之后, 我们重新计算所有系统的  $\bar{F}_T$ . 这个过程重复1000次, 可以得到1000组  $\bar{F}_T$ , 结果如图4所示. 图4上图展示了随机质量排序得到的  $\bar{F}_T$  的分布与开普勒系统真实的  $\bar{F}_T$ , 下图展示了77个开普勒系统的  $F_T$  分布.

开普勒系统随机质量排序得到的  $\bar{F}_T$  的中值为0.911 (非常接近随机分发数值模拟中得到的最终  $F_T$  的中值0.918), 标准差  $\sigma$  为0.027. 而开普勒真实系统的  $\bar{F}_T$  为0.798. 因此, 真实开普勒系统中行星质量排序有序的显著性为  $4.1\sigma$ , 比文献[5]得到的质量排序有序的显著性稍微低一些. 一个可能的原因是文献[5]中的(3)式定义的质量排序参数实际上只比较了一个系统中最外行星与最内行星质量的相对大小.

在77个开普勒行星系统中, 有53个系统的  $F_T = 1$ , 说明这些系统在演化历史中很有可能经历了比较剧烈的动力学过程. 在气体盘消散之前, 这些系统极有可能处于一种类似于我们数值模拟中所假定的非常紧凑的构型<sup>[7]</sup>. 气体盘消散后, 失去了气体盘的缓冲作用, 行星之间的相互作用激发了行星的偏心率, 使得整个系统变得非常不稳定. 行星相互之间发生碰撞、位置交换或者散射, 导致行星系统的质量排序变得非常混乱.

此外, 有13个系统的  $F_T = 0$ . 这说明这些系统很有可能维持了形成之初的质量排序. 在它们的演化历史中, 可能并没有经历频繁的位置交换或者碰撞. 这些系统的轨道构型在气体盘消散之前

或许并没有那么紧凑, 或者这些系统中的行星经过盘迁移后处于比较稳定的一阶共振链中. 在气体盘消散之后, 即使失去气体盘的缓冲作用, 行星之间的相互作用也不会使系统内部发生频繁的不稳定行为. 这些系统可能保留着气体盘消散之初的构型.

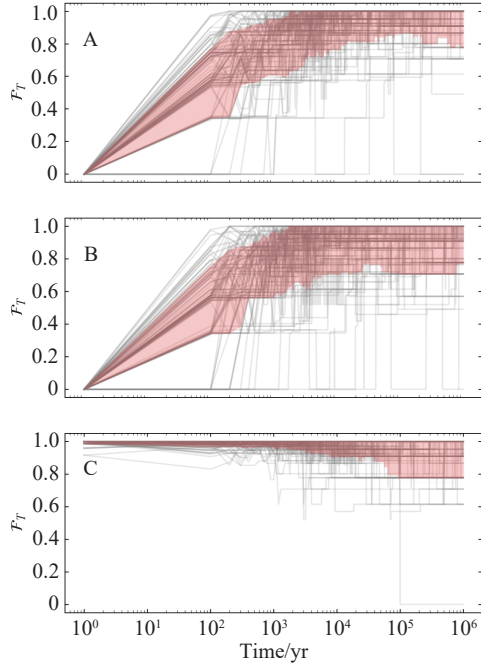


图 3 从上往下依次是 A、B、C 3 组模拟中行星系统  $\mathcal{F}_T$  的演化. 其中 A 组行星系统中初始行星质量从内往外按从小到大的顺序排序, B 组行星系统中初始行星质量从内往外按从大到小的顺序排序, C 组行星系统中初始行星质量从内往外随机排布. 其中红色阴影区域表示 100 组系统的  $\mathcal{F}_T$  的 68% 置信区间.

Fig. 3 From top to bottom, the evolution of  $\mathcal{F}_T$  is shown for three sets of simulations, labeled as A, B and C. In set A, the initial planetary masses are sorted from smallest to largest outwardly. In set B, the initial planetary masses are sorted from largest to smallest outwardly. In set C, the initial planetary masses are randomly arranged outwardly from the center. The red shaded areas represent the 68% confidence intervals for  $\mathcal{F}_T$  of the 100 sets of systems.

观测上, 行星系统  $\mathcal{F}_T = 0$  的占比为  $16.9\% \pm 4.7\%$ , 其中误差为泊松误差. 而在 3.2 小节中, 随机分发的数值模拟结果显示, 行星系统  $\mathcal{F}_T = 0$  的占比为  $1.0\% \pm 1.0\%$ . 因此, 在  $3.3\sigma$  的水平上, 开普勒多行星系统相较于随机分发的模拟系统更加有序.

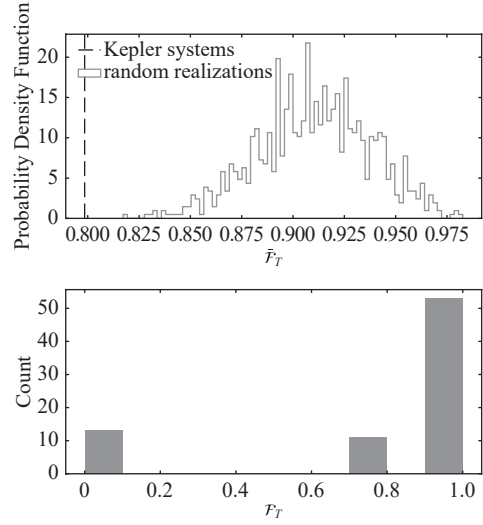


图 4 上图: 真实开普勒多行星系统的  $\bar{\mathcal{F}}_T$  与随机重组后的开普勒多行星系统的  $\bar{\mathcal{F}}_T$  的分布. 下图: 开普勒多行星系统中  $\mathcal{F}_T$  的分布.

Fig. 4 Upper panel:  $\bar{\mathcal{F}}_T$  for Kepler multi-planet systems, and the distribution of  $\bar{\mathcal{F}}_T$  for random realizations of Kepler multi-planet systems. Lower panel: the distribution of  $\mathcal{F}_T$  in Kepler multi-planet systems.

## 5 结论

本文基于前人的研究<sup>[8]</sup>, 给出了多行星系统中与行星质量排序有关的熵的定义, 并利用蒙特卡罗模拟和  $N$  体动力学数值模拟, 研究了行星系统的动力学演化对行星质量排序熵的影响.

我们的研究表明, 在行星系统的动力学演化过程中, 碰撞、位置交换等行为会导致行星系统的质量排序熵发生变化. 尽管某些情况下系统的熵值可能减少, 但当前系统的质量排序熵与当前系统所能达到的最大质量排序熵的比一直呈现增加的趋势, 这表明系统逐步趋于平衡态. 与开普勒多行星系统进行比较时, 我们发现约有  $16.9\% \pm 4.7\%$  的开普勒行星系统保持很高的有序性, 这意味着这些系统在形成后很有可能并未经历剧烈的动力学演化, 仍保持着形成初期的质量排序. 这为我们更好地理解系外行星的动力学演化提供了重要线索.

**致谢** 感谢审稿人对文章提出的宝贵建议, 使文章的质量有了显著的提高. 感谢 ADS 数据库. 感谢安徽师范大学物理与电子信息学院天文物理与技术研究中心提供的高性能计算服务器.



## 参考文献

- [1] 李椿, 章立源, 钱尚武. 热学. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2019: 164
- [2] 李成金. 大学物理, 1992, 11: 6
- [3] 胡华. 江西师范大学学报, 2005, 29: 124
- [4] 何丽珠, 邵渭泉. 热学. 北京: 清华大学出版社, 2013: 149
- [5] Millholland S, Wang S, Laughlin G. ApJL, 2017, 849: L33
- [6] Goldberg M, Batygin K. AJ, 2022, 163: 201
- [7] Izidoro A, Ogiwara M, Raymond S N, et al. MNRAS, 2017, 470: 1750
- [8] Kipping D. MNRAS, 2018, 473: 784
- [9] Zhou J, Aarseth S, Lin D, et al. ApJL, 2005, 631: L85
- [10] Chambers J. EPSL, 2004, 223: 241
- [11] Lammers C, Hadden S, Murray N. MNRAS, 2023, 525: L66
- [12] Chen J, Kipping D. ApJ, 2017, 834: 17
- [13] Rein H, Liu S. A&A, 2012, 537: A128
- [14] Rein H, Hernandez D, Tamayo D, et al. MNRAS, 2019, 485: 5490
- [15] Obertas A, Tamayo, D, Murray N. MNRAS, 2023, 526: 2118

## Exploring the Evolution of the Entropy Related to Mass Ordering in Multi-planet Systems

WU Dong-hong

(Department of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu 241002)

**ABSTRACT** We define an entropy related to mass ordering in multi-planetary systems. Through Monte Carlo simulations and  $N$ -body dynamical numerical simulations, we explore the impact of dynamical evolution on the entropy of planetary mass ordering. Our findings suggest that collisions and positional swaps during the dynamical evolution of planetary systems can modify the entropy of mass ordering within the system. Positional swaps tend to gradually increase the entropy of mass ordering, whereas collisions may lead to a decrease. Despite the potential decrease in the system's entropy value, the ratio of the current system's mass ordering entropy to the maximum attainable mass ordering entropy consistently rises, indicating the system's progression toward equilibrium. Observations on Kepler multi-planetary systems reveal that about  $16.9\% \pm 4.7\%$  of them still maintain an ordered mass distribution, implying that these systems may not have experienced significant dynamical evolution.

**Key words** methods: numerical, methods: statistical, planets and satellites: dynamical evolution and stability, entropy