第 44 卷 第 2 期 天 文 学 报 Vol.44 No.2
2003 年 5 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA May, 2003

考虑地球扁率摄动影响的初轨计算方法*

刘 林 王 歆

(南京大学天文系 南京 210093)

摘要 在二体问题意义下的短弧定轨， Laplace 型方法是最主要最典型的一种初轨计算方法. 若测角资料达到 $10^{-4}-10^{-5}$ 精度 (相当于 $2''-20''$ 之间), 那么要使定轨精度达到与其相应的程度，地球非球形引力位中的扁率项摄动应该考虑，在此前提下，同样可以采用相应的 Laplace 型定轨方法. 即给出这种严格包含扁率摄动的初轨计算方法的原理和具体计算过程以及计算实例. 除采用多资料定轨方法外，这种方法也是提高初轨计算精度的一种途径，它同样可用于多资料的情况. 这种方法对于大扁率主天体 (即中心天体) 的卫星定轨将更有实用价值.

关键词 天体力学：轨道计算，扁率摄动，短弧定轨， Laplace 方法

中图分类号： P 133

1 引言

二体问题意义下的短弧定轨, 在航天测控领域中仍然是一件不可缺少的工作, 通常称为初轨计算，它的作用往往是短弧精密定轨 (即轨道改进) 无法替代的. 在初轨计算中，测角资料起着重要作用. 关于初轨计算，如何充分利用多资料的统计信息，以改善定轨质量、真正提高定轨精度，是一项极有意义的工作，文 [1,2] 的有关探讨即属于这一类型. 本文则是从另一角度作一探讨，即在测角资料精度稍高的情况下，“严格” 考虑不可忽略的主星扁率 (特别是大扁率的主星) 影响，建立一种有摄情况下的 Laplace 型初轨计算方法，这种方法也同样可用于多资料定轨.

在无摄情况下的 Laplace 型定轨方法中，引用的一个关键性的表达式即卫星的地心位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 对历元 (t_0) 位置矢量和速度矢量 $(\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0)$ 的时间幂级数展开式：

$$\boldsymbol{r}(t) = F(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_0; \tau)\boldsymbol{r}_0 + G(\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0, \tau)\dot{\boldsymbol{r}}_0 \,, \tag{1}$$

其中 $\tau = t - t_0$, 且为无量纲，在对应的计算单位中，地心引力常数 $\mu = GM = 1$. 对于低

2002-07-21 收到原稿， 2002-10-16 收到修改稿

* 高校博士点科研基金 (批准号 2000028416) 资助

轨卫星 10—15 分钟的测量弧段， F 和 G 对 τ 的展开式只要取到 τ^6 项，即

$$\begin{aligned} F &= 1-\frac{1}{2}u_3\tau^2+\frac{1}{2}u_5\sigma\tau^3+\frac{1}{24}u_5(3V_0^2-2u_1-15u_2\sigma^2)\tau^4+ \\ &\quad \frac{1}{8}u_7\sigma(-3V_0^2+2u_1+7u_2\sigma^2)\tau^5+ \\ &\quad \frac{1}{720}u_7[u_2\sigma^2(630V_0^2-420u_1-945u_2\sigma^2)-(22u_2-66u_1V_0^2+45V_0^4)]\tau^6\,, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} G &= \tau-\frac{1}{6}u_3\tau^3+\frac{1}{4}u_5\sigma\tau^4+\frac{1}{120}u_5(9V_0^2-8u_1-45u_2\sigma^2)\tau^5+ \\ &\quad \frac{1}{24}u_7\sigma(-6V_0^2+5u_1+14u_2\sigma^2)\tau^6\,. \end{aligned} \tag{3}$$

F 和 G 为表达式中的几个量， V_0^2 、 σ 和 $u_n(n=1,2,\cdots)$ 如下：

$$\sigma=\boldsymbol{r}_0\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_0\,,\quad V_0^2=\dot{\boldsymbol{r}}_0^2\,,\quad u_n=\frac{1}{r_0^n}\,, \tag{4}$$

上述各式中的 $\dot{\boldsymbol{r}}=d\boldsymbol{r}/d\tau$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 均为无量纲量，长度单位是地球赤道半径. 注意 σ 与轨道偏心率 e 同量级.

(1) 式是无摄运动中的表达式，在推导过程中引用了无摄运动方程：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}=-\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\,. \tag{5}$$

如果在短弧定轨中考虑地球扁率摄动，那么在地心赤道坐标系中，相应的受摄运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}+\left(\frac{3J_2}{2}\right)\left(5\frac{z^2}{r^7}-\frac{1}{r^5}\right)\boldsymbol{r}-\left(\frac{3J_2}{2}\right)\left(\frac{2z}{r^5}\right)\hat{k}\,, \tag{6}$$

$$\hat{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\,, \tag{7}$$

在此情况下，位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 的时间幂级数展开式 (1) 式将发生变化，即摄动变化. 下面给出相应的表达式，并用于 Laplace 型定轨方法中，建立一种严格考虑扁率摄动的 Laplace 定轨方法.

2 在受摄情况下位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 的时间幂级数展开式

在前面提到的精度要求下，只要在 τ^2 、 τ^3 和 τ^4 项中考虑扁率摄动即可，在 $\tau^5/120$ 和 $\tau^6/720$ 项中已无意义. 略去推导过程，给出 $\boldsymbol{r}(t)$ 的展开形式如下：

$$\begin{cases} x=F(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\tau)x_0+G(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_0,\tau)\dot{x}_0 \\ y=F(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\tau)y_0+G(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_0,\tau)\dot{y}_0 \\ z=F_z(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\tau)z_0+G_z(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_0,\tau)\dot{z}_0 \end{cases}\,, \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned} F &= 1+\frac{\tau^2}{2}\left[-u_3+(\frac{3J_2}{2})(5u_7z_0^2-u_5)\right] \\ &\quad +\frac{\tau^3}{6}\left[(3u_5\sigma)+(\frac{3J_2}{2})(5(u_7-7u_9z_0^2)\sigma+10u_7z_0\dot{z}_0)\right] \\ &\quad +\frac{\tau^4}{24}\Big[u_5(3V_0^2-2u_1-15u_2\sigma^2)+(\frac{3J_2}{2})(6u_8(4u_2z_0^2-1)-5u_7(7u_2z_0^2-1)V_0^2 \\ &\quad +10u_7\dot{z}_0^2+35u_9(9u_2z_0^2-1)\sigma^2-140u_9\sigma z_0\dot{z}_0)\Big]+O(\tau^5) \quad , \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} G &= \tau+\frac{\tau^3}{6}\left[-u_3+(\frac{3J_2}{2})(5u_7z_0^2-u_5)\right] \\ &\quad +\frac{\tau^4}{24}\left[6u_5\sigma+(\frac{3J_2}{2})(20u_7z_0\dot{z}_0-10u_7(7u_2z_0^2-1)\sigma\right]+O(\tau^5) \quad , \end{aligned} \tag{10}$$

$$F_z=F+(\frac{3J}{2})\left[\frac{\tau^2}{2}(-2u_5)+\frac{\tau^3}{6}(10u_7\sigma)+\frac{\tau^4}{24}u_7(10V_0^2-6u_1-70u_2\sigma^2)\right] \quad , \tag{11}$$

$$G_z=G+(\frac{3J}{2})\left[\frac{\tau^3}{6}(-2u_5)+\frac{\tau^4}{24}(20u_7\sigma)\right] \quad , \tag{12}$$

对于 F 和 G 中的 $\tau^5/120$ 和 $\tau^6/720$ 项，仍与 (2)—(3) 式中相同.

3　考虑地球扁率摄动的 Laplace 方法

关于在短弧定轨中的 Laplace 方法 [3−4], 这里不再详细介绍, 关键在于根据一列测角资料确定历元 $t_0(t_0\in[t_1,t_N]$, t_1 、 t_N 分别为采样的第一和最后一个时刻) 时刻的卫星位置矢量 $\boldsymbol{r}_0$ 和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$. 略去推导过程，给出相应的基本方程 (形式上的线性代数方程组) 如下：

$$(F\nu)x_0-(F_z\lambda)z_0+(G\nu)\dot{x}_0-(G_z\lambda)\dot{z}_0=(\nu X-\lambda Z)\,, \tag{13}$$

$$(F\nu)y_0-(F_z\mu)z_0+(G\nu)\dot{y}_0-(G_z\mu)\dot{z}_0=(\nu Y-\mu Z)\,, \tag{14}$$

$$(F\mu)x_0-(F\lambda)y_0+(G\mu)\dot{x}_0-(G\lambda)\dot{y}_0=(\mu X-\lambda Y)\,. \tag{15}$$

对于一次测角采样资料，这 3 个方程只有两个是独立的，至少需要 3 次采样才能定轨. 方程中的 (X,Y,Z) 和 (λ,μ,ν) 各个测站坐标分量和测站到卫星的观测矢量 $\boldsymbol{\rho}=\rho\hat{L}$ 单位矢量 $\hat{L}$ 的 3 个分量.

具体定轨过程与无摄情况并无差别，仍旧是一个简单的迭代过程. 对于没有初始信息的情况，可采用

$$F^{(0)}=1 \quad G^{(0)}=\tau \quad F_z^{(0)}=F^{(0)} \quad G_z^{(0)}=G^{(0)} \tag{16}$$

作为迭代初值，由多次采样对应的方程组 (13)—(15) 求解 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$, 再去按 (9)—(12) 式和 (2)—(3) 式中的 τ^5 和 τ^6 项计算 F,G,F_z,G_z, 重复上述步骤，直到满足下列不等式为止：

$$Max\,|(\Delta F,\Delta G,\Delta F_z,\Delta G_z)|<\varepsilon\,, \tag{17}$$

$$\begin{cases} \Delta F = F^{(k)} - F^{(k-1)} & \Delta G = G^{(k)} - G^{(k-1)} \\ \Delta F_z = F_z^{(k)} - F_z^{(k-1)} & \Delta G_z = G_z^{(k)} - G_z^{(k-1)} \end{cases} \quad k = 1, 2, \cdots , \tag{18}$$

(17) 式中的 ε 是所给定的收敛标准，如 $\varepsilon = 10^{-5}, 10^{-6}, \cdots$

确定 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 后即可转换为历元 t_0 时刻的轨道根数 $a, e, i, \Omega, \omega, M$, 这一转换无新内容，不再阐述.

4 计算实例

我们选取了由国内某一测站对某颗卫星的测角资料，采样6 次， “归算” 到测站为紫金山天文台的采样时刻 (UT1), 方位角 A 和地平高度 h 的值列于表 1

表 1 6 次采样的 UT1, A, h 值

Table 1 Values of UT1, A and h

UT1(Hour)	$A(^\circ)$	$h(^\circ)$
21.575128	258.3680	34.0767
21.603111	237.4997	38.1744
21.631420	214.3386	37.1074
21.654491	198.2984	32.7557
21.714094	173.4703	17.7083
21.742876	166.9298	11.1860

对上述 6 次采样，分别对无摄运动情况和受摄运动情况 (考虑 J_2 项摄动) 定出的对应历元 $t_0 = 21^{\mathrm{h}}.659002$ 的 6 个轨道根数列于表 2

表 2 t_0 时刻的轨道根数

Table 2 Orbit elemtns at t_0

	a	e	$i(^\circ)$	$\Omega(^\circ)$	$\omega(^\circ)$	$M(^\circ)$
Two-body	1.220365	0.011019	47.248640	31.089913	311.131609	205.254185
Perturbed	1.222382	0.009595	47.249634	31.079579	307.999084	208.382990

由于是小偏心率，故应看 $\lambda = M + \omega$ 的差别，上述两种情况对应的值如下：

$$\lambda = 156^\circ.385794, \quad 156^\circ.382074 .$$

不难看出，两种情况定出的轨道差为

$$(\Delta a, \Delta e) = O(10^{-3}) ,$$

$$(\Delta\Omega, \Delta\lambda) = O(10^{-4}) ,$$

$$\Delta i = O(10^{-5}) ,$$

其中角度差为弧度单位. 结果表明，对于上述 10 分钟的定轨弧段，考虑 J_2 项摄动的影响量级为 $10^{-3} - 10^{-4}$, 这是符合本文分析的. 在短弧测角资料具有一定精度的前提下，

要定出相应较好的初轨，考虑 J_2 项摄动还是有意义的，而且并未给初轨计算带来任何麻烦，方法仍旧很简单.

参 考 文 献

1　WU Lian-Da, JIA Pei-Zhang. AcASn, 1997, 38(3): 288-295
2　JIA Pei-Zhang, WU Lian-Da. AcASn, 1998, 39(4): 337-343
3　刘林. 人造地球卫星轨道力学. 北京：高等教育出版社， 1992
4　刘林. 天体力学方法. 南京：南京大学出版社， 1998

A Method of Orbit Determination Considering the Oblatenss of the Earth

LIU Lin　WANG Xin
(*Department of Astronomy, Nanjing University, Nanjing* 210093)

Abstract　Laplace method is a typical method of orbit computing for short arc in the model of two-body problem. If the angel measurement is as accurate as $10^{-4}-10^{-5}$ ($2''-20''$), the oblateness of the Earth should be considered in the orbit computing. The theory and the process of an improved Laplace method together with numerical examples are given. Besides the orbit computing with multi-type measurements, this method is an efficient way to improve the accuracy of orbit computing. And it will be more useful to the orbit computing of the body with large oblateness.

Key words　Celestial mechanics: orbital determination, perturbation due to oblateness, orbit computing of short arc, Laplace method