第 44 卷 第 2 期 天 文 学 报 Vol.44 No.2
2003 年 5 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA May, 2003

# 用改进的 SPEA 求解轨道转移的时间 − 能量极小化问题

王 石 戴金海

(国防科技大学航天与材料工程学院 长沙 410073)

**摘要** 提出了改进的 SPEA, 这是一种多目标进化算法. 适于求解大尺度空间的多目标优化的 Pareto 最优解. 并应用于求解轨道转移的时间 — 能量极小化问题, 计算结果表明算法的有效性.

**关键词** 火箭飞行力学, 改进的 SPEA, 轨道转移, 时间 - 能量优化

**中图分类号**: P 135

## 1 引言

轨道转移的问题在航天任务中经常遇到, 比如卫星网络 (卫星星座便是卫星网络的一种), 某颗星损坏, 就要由备份卫星转移到指定位置上. 这不但对转移的燃料消耗 (能量) 有一定的要求, 同时还对时间有一定的要求, 即同时最小化时间和能量. 但燃料最省 (以所加的冲量形式表示, 具体见 [1]) 和时间最小是相互矛盾的. 它是一个多目标优化问题, 其一般数学模型可描述如下:

$$V_{-\max}, \quad f(x) = [f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)]^T,$$

$$x \in X, \quad (\text{X 为一给定集合}) \text{ 称为状态空间},$$

其中 $V_{-\max}$ 为向量极大化, 即 $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)]^T$ 中的各个子目标函数都尽可能的极大化. 当然也可等价地表示为 $V_{-\min}$.

这类问题一般没有唯一的完全解, 而是具有一系列的非劣解 (或非支配解) 构成的解集合, 通常称为 Pareto 最优解, 非劣性的定义如下:

定义 **1.1** 设 $X$ 是多目标优化模型的状态空间, $f(x)$ 是向量目标函数, $x_1 \in X, x_2 \in X$, 若

2002-09-22 收到原稿, 2003-03-14 收到修改稿

$$\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}, f_i(x_1) \leq f_i(x_2) \quad \Lambda \quad \exists_i \in \{1,\cdots,n\}, f_i(x_1) < f_i(x_2)$$

则称 $x_2$ 非劣于 $x_1$, 或 $x_2$ 优于 $x_1$, 记作 $x_1 < x_2$.

定义 **1.2** 设 $X$ 为多目标优化模型的状态空间, $f(x)$ 是向量目标函数. 若 $\bar{x} \in X$, 并且不存在比 $\bar{x}$ 更优越的 $x$, 则称 $\bar{x}$ 是多目标化模型的 Pareto 最优解, 所有这样的解构成的集合称为 Pareto 最优集.

多目标优化问题的本质是在多数情况下各个子目标是相互冲突的, 要使多个子目标都达到最优值是不可能的, 只能对它们进行协调和折衷处理, 使各个子目标尽可能达到最优. 由于进化算法是对整个群体的进化运算操作, 它具有隐含的并行性, 并且是个体集合的操作, 而多目标优化问题的 Pareto 最优解一般也是一个集合, 因而进化算法解决多目标优化具有天然的合理性. 经典的优化设计 (如梯度下降法、单纯形搜索) 着眼于局部搜索的单点优化, 它们从本质上不是为多目标优化设计的, 因而进化算法求解多目标优化问题比经典方法具有更大的优越性.

SPEA(Strength Pareto Evolutionary Algorithm) 是一种多目标进化算法 [2,3], 本文的作者对其进行了改进, 使其适用于航天大尺度空间的搜索并且加快了其收敛速度. 同时用改进的 SPEA 算法来求解轨道转移的时间 - 能量优化问题. 我们求得了一组 Pareto 最优解. 从计算结果看. 利用改进的 SPEA 求解该问题是十分有效和迅速的.

## 2 改进的 SPEA

自从 20 世纪 80 年代 Schaffer[4,5] 提出向量评价遗传算法 (VEGA) 求解多目标优化问题以来, 越来越多的有关多目标进化算法的文献出现, 它们一般基于 Pareto 排序来设计算法: 给定某一代群体, 找出其所有的 Pareto 最优解, 令其序号为 1, 然后把 Pareto 最优解从该群体中去掉, 再找出其余元素组成的集合的 Pareto 最优解, 令这些元素的序号为 2, 依次类推. 这样可对群体的每个个体都赋予适应度, 然后用进化算法的通常算子对群体进行操作. 为了防止群体出现早熟现象, 增加个体的多样性, 一般引入小生境算子 (Niching), 设置共享函数, 然后对个体的适应度进行修正. 然而设置共享函数所需的参数有时极其困难, 与具体问题密切相关, 有时不亚于求解问题的本身.

Zitcher 提出的 SPEA 是一种多目标进化算法 (MOEA), 这种算法的优越性在于不需要设置小生境算子, 从而不需要设置共享函数所需的参数, 这是因为其设置个体的多样性已包含在适应度的设计中, 设第 $t$ 代群体为 $P_t$ 和外部集合为 $\bar{P}_t$(是当前的 Pareto 最优集), 则第 $t$ 代个体的适应度设置方法如下:
对每一个 $i \in \bar{P}_t$, 设置一定值 $S(i) \in [0,1]$ 称为压力 [2] :

$$S(i) = \frac{|\{j | j \in P_t \wedge i > j\}|}{N+1}$$

其中 $|\ \ |$ 表示集合的基数, 即集合中元素数目的多少. 然后对群体的每个个体进行适应度评价:

$$F(i) = 1 + \sum_{i \in \bar{P}_t, , i > j} S(i) \tag{1}$$

这种适应度评价的机制蕴含着：每个个体适应度反映的是个体和 Pareto 最优解的接近程度以及在目标函数空间内的分布均匀性，因而体现小生境的思想而又不用设置一些参数，详细图解见文 [2,3].

Zitcher 的 SPEA 方法虽然和 MOEA 相比有许多优点，但其收敛速度不太理想，特别是在大尺度空间内进行的搜索，关键在于其使用的交叉算子是两个个体的交叉，而变异是正态变异 (因而生成的个体在局部范围内). 为了增加个体的多样性，我们引进多体交叉和 Cauchy 变异的概念 [6],[7].

在进化算法中，两个个体的算术交叉为大家熟知，由此可得到多个个体参与算术交叉的操作方法. 一般地，对应选出的 $b$ 个父代个体 $X_i (1 \le i \le b)$，从 [0,1] 中选取 $r_1, r_2, \cdots, r_b$ 个随机数，共生成 $b$ 次，得到 $b$ 个个体 $X_i' = \left( \sum_{j=1}^{b} r_j X_j \right) \Big/ \left( \sum_{j=1}^{b} r_j \right)$, $i = 1, 2, \cdots, b$. 这样多体交叉比两个个体交叉产生的新个体的多样性要明显，因为多体交叉利用了多个个体的信息，从群体中选取 $r (r > 2)$ 个个体要比从群体中选取两个个体的组合数目大得多.

在进化算法中，变异算子是一种重要的操作，即 $X \to X'$，其中 $X$ 为原来的个体，而 $X'$ 是在 $X$ 邻域中产生，如 $X' = X + N(0, \sigma^2)$，其中 $\sigma$ 是需设定的参数. 类似地，在模拟退火中，也在 $X$ 的邻域产生了 $X'$. 众所周知，Cauchy 退火比正态退火更能找到全局最优解. 因为 Cauchy 退火有更大的搜索范围，能更好地跳出局部最优解. 因此可类似地用 Cauchy 变异来代替正态变异，即 $X' = X + Cauchy(a)$, $a$ 为要设置的参数. 对于大空间的搜索，Cauchy 变异更有可能产生 “好” 的个体. 用多体交叉和 Cauchy 变异代替 SPEA 中的两体交叉和正态变异便可得到改进的 SPEA.

综上所述，我们得到改进后的 SPEA 算法如下 (p(A) 表示 A 上的 Pareto 最优集)：

(1) 设置群体大小 $N$ 及外部集合的大小 $\bar{N}$ 和最大代数 $T$，令代数 $t = 0$，初始化群体 $P_0$，外部集合 $\bar{P}_t = p(P_t)$ ($\bar{P}_t$ 为存放当前 Pareto 最个体的集合)

(2) 多体交叉 $P_t \to P_t'$;

(3)Cauchy 变异 $P_t \to P_t''$;

(4) 记 $P_t''' = P_t \cup P_t' \cup P_t''$ 更新 $\bar{P}_t$: $\bar{P}_t = p(P_t \cup P_t' \cup P_t'')$，如果 $\bar{N} < \left|\bar{P}_t\right|$ 对 $\left|\bar{P}_t\right|$ 进行筛选;

(5) 对于 $P_t'''$ 的每个个体按 (1) 式赋予适应度，采用 $\lambda + \mu$ 选择准则，选出 $N = |P_t|$ 个体;

(6)$t \leftarrow t + 1$，如果 $t \ge T$，则输出最优解 $\bar{P}_t$

在 (4) 中，对 $\bar{P}_t$ 进行筛选原则按个体距离的大小把 $\bar{P}_t$ 分成 $\bar{N}$ 类，然后从中选出有代表性的一个个体 (比如距离其他点距离和最近的点)，上面算法的形式和 Zitcher 稍微不同，但原则上是一样的，其中交叉和变异是本文的改进部分. 下面用改进的 SPEA 求解

轨道转移问题.

## 3 轨道转移问题及其求解

若航天器在 $t_1$ 时刻位于初始轨道 I 的 1 点，已知其位置和速度矢量分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 、 $\boldsymbol{V}_1$, 设空间有另外一点位于轨道 II 的 2 点，其位置和速度矢量分别为 $\boldsymbol{r}_2$ 、 $\boldsymbol{V}_2$, 现在要在 $t_1$ 时刻变轨后经过 $\boldsymbol{r}_2$ 、 $\boldsymbol{V}_2$. 一般经过 $\boldsymbol{r}_1$ 、 $\boldsymbol{r}_2$ 的轨道为转移轨道，设转移轨道在 $\boldsymbol{r}_1$ 、 $\boldsymbol{r}_2$ 的速度分别为 $\boldsymbol{V}_1'$ 、 $\boldsymbol{V}_2'$, 需要施加的冲量分别为 $\left|\boldsymbol{V}_1'-\boldsymbol{V}_1\right|+|\boldsymbol{V}_2-V'_2|\underline{\Delta}\Delta V_1+\Delta V_2$, 并设经历的时间为 $T$,
则我们使

$$(\Delta V_1+\Delta V_2, T)=\min\ .$$

但事实上，要求 $\Delta V_1+\Delta V_2$ 和 $T$ 是相互抵触的，因此该问题只存在 Pareto 解. 在给定 $T$ 值后， $\Delta V_1$ 、 $\Delta V_2$ 是可以求出来的，因为 $\boldsymbol{r}_1$ 、 $\boldsymbol{r}_2$ 、 $T$ 确定后，便可确定出 $\boldsymbol{V}_1'$ 、 $\boldsymbol{V}_2'$, 其步骤如下 (Lambert 定理) ： 令

$$r_1=|\boldsymbol{r}_1|,\quad r_2=|\boldsymbol{r}_2|,\quad C=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|,\quad S=\frac{1}{2}(r_1+r_2+C),\quad a_{\min}=\frac{1}{2}S,\quad \lambda=\frac{\sqrt{r_1r_2}}{S}\cos\frac{\Delta f}{2},$$

其中 $\Delta f$ 为 $\boldsymbol{r}_1$ 到 $\boldsymbol{r}_2$ 的夹角，这里假设 $0<\Delta f<2\pi$

令

$$x^2=1-\frac{a_m}{a},$$

由 Lambert 定理可得如下的超几何级数形式 [8] ：

$$\Delta t=\sqrt{\frac{a_m^2}{\eta}}\left[\frac{4}{3}\eta^3F(3,1,\frac{5}{2},S_1)+4\lambda\eta\right],$$

其中 $S_1=\frac{1}{2}(1-\lambda-x\eta), \eta=y-\lambda x$, $y=\sqrt{1-\lambda^2(1-x^2)}$.
利用超几何级数迭代方法，可得 $x$ 的值，进而求出

$$a=\frac{a_m}{1-x^2}(\text{转移轨道的长半轴}),$$

$$P=\frac{r_1r_2}{a_m\eta^2}\sin^2\frac{\Delta f}{2}(\text{半通径}).$$

求得：

$$\boldsymbol{V}_1'=\frac{\sqrt{np}}{r_1r_2\sin\Delta f}\left[(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)+\frac{r_2}{P}(1-\cos\Delta f)\boldsymbol{r}_1\right],$$

$$\boldsymbol{V}_2' = \frac{\sqrt{np}}{r_1 r_2 \sin\Delta f}\left[(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + \frac{r_1}{P}(1-\cos\Delta f)\boldsymbol{r}_2\right] .$$

从而得出： $\Delta V_1 + \Delta V_2$.

## 4　优化方法及计算结果

我们知道，给定 $T$, 便有 $\Delta V_1 + \Delta V_2$, 因此目标函数为：

$$V - \min \qquad (\Delta V_1 + \Delta V_2, T)$$

是以 $T$ 为自变量，设 $T$ 的取值范围是 $[T_{\min}, T_{\max}]$, 我们目的是求 $[T_{\min}, T_{\max}]$ 的 Pareto 解，这样便可用改进的 SPEA 进行优化.

在实际应用中， $\Delta V_1 + \Delta V_2$ 应有一定的范围限制，无妨设其上界为 $\Delta V$ max, 为了求得满足约束的解，在 (1) 式中对每个个体适应度加上一惩罚函数项，即：

$$F_{\text{new}} = F(i) + \max(0, \Delta V_1 + \Delta V_2 - \Delta V_{\max})$$

其中 $F(i)$ 为原有的适应度函数， $F_{\text{new}}(i)$ 为加惩罚函数之后的适应函数. 这样便可得到满足约束的 Pareto 最优解.

我们设置的参数： $T$ 的取值区间为 [800,1600] (单位：秒), $\Delta V_{\max} = 180$ (单位：米 / 秒), 最大进化代数为 20, 群体大小为 24, $\bar{N}$=20, $\boldsymbol{r}_1$ = [0.0 7380000.0 0.0], $\boldsymbol{V}_1$ = [7349.21 0.0 0.0], $\boldsymbol{r}_2$ = [6401659.785 3696000.0 0.0], $\boldsymbol{V}_2$ = [3671.622 − 6359.435 0.0]; 我们求得 20 组 Pareto 最优解. 如图 1 所示

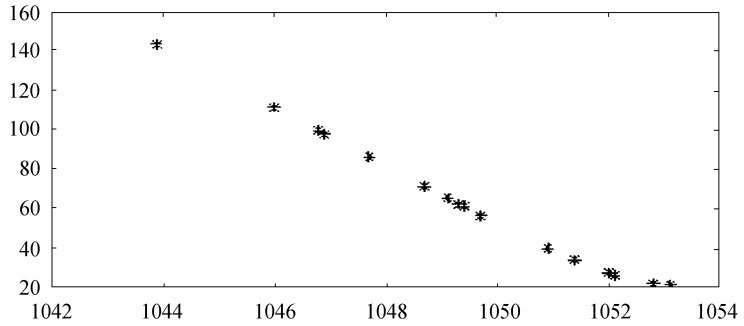


图 1　用改进的 SPEA 求解的 Parerto 解

Fig.1　Pareto Optimal Solutions

表 1 列出需要加的冲量和时间 (因篇幅所限，只列出 5 组).

表中的 $T$ 为时间， $dV$ 为所加的冲量， $DV1$ 、 $DV2$ 分别为在 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 所加的冲量. 从计算结果可知，随着时间的增大，所需的冲量将逐步减少，但增加到一定程度时，

冲量将不再减少，这个临界值大约在 1053.1 附近. 临界值后面的值将不再是 Pareto 最优解. 从计算所需的代数来看，由此可知改进后的 SPEA 收敛速度较令人满意.

**表 1 Pareto 最优解及在 $r_1$ 和 $r_2$ 所加的冲量**

**Table 1 Pareto Optimal Solutions and Impulsive at $r_1$ and $r_2$**

| $T$ | $DV1$ | $DV2$ | $dV$ |
|---|---|---|---|
| | 39.036043 | -61.427953 | |
| 1046.0 | -31.099579 | 2.649918 | 111.394966 |
| | 0.0 | 0.0 | |
| | 20.579431 | -33.817411 | |
| 1049.7 | -9.908199 | -2.686391 | 56.764377 |
| | 0.0 | 0.0 | |
| | 14.624167 | -24.898722 | |
| 1050.9 | -3.059720 | -4.402566 | 40.225674 |
| | 0.0 | 0.0 | |
| | 5.225511 | -10.813396 | |
| 1052.8 | 7.761179 | -7.105414 | 22.595332 |
| | 0.0 | 0.0 | |
| | 3.744921 | -8.593411 | |
| 1053.1 | 9.467002 | -7.530569 | 21.606912 |
| | 0.0 | 0.0 | |

## 5 结论

轨道转移问题是航天任务中经常遇到的问题，而且往往要求取得 Pareto 最优解. 文 [9] 就轨道转移小推力的情形用 Pareto 遗传算法对时间 - 能量优化问题求得了一组 Pareto 最优解，所用的是小生境算子和局部搜索技术. 而我们用的是改进的 SPEA, 不必设置过多的参数，而且在大尺度空间搜索非常有效. 在工程应用中，多目标优化问题是非常普遍的问题，而且往往需要求得 Pareto 最优解，因此对算法的收敛速度的改进有重要意义的. 轨道转移中的时间 - 能量优化问题是航天任务中多目标优化的一个重要例子.

## 参 考 文 献


1 任萱. 人造卫星轨道力学. 长沙：国防科技大学出版社， 1988

2 Zitcher E. Evolutionary Algorithms for Multiobjective Evolutionary Optimization: Method and Application. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology(ETH), Zurich, Switzerland, 1999

3 Zitcher E, Thieler L. IEEE Transaction on Evolutionary Computation, 1999, 3(4): 257-271

4 Glimter Rudolph. Evolutionary search for minimal elements in partially ordered finite set. In: Proceeding of the Seventh Annual Conference on Evolutionary Programming, Springer, Berlin. 1998a

5 Glimter Rudolph. On a multi-objective evolutionary algorithms and its convergence to the Pareto set. In: Proceeding of the 1998 IEEE Conference on Evolutionary Computation.IEEE. 1998a

6 Xin Yao, Yong Liu, Guangming Lin. IEEE transaction on Evolutionary Computation, 1999, 1(4)

7 朱学军，陈形，薛量，等. 电子学报， 2000, 1

8 Richard H Batin. An introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. AIAA Education Estries, New York. 198

9 William J, Mason Jogn W, Hartmann, optimal earth orgiting satellite constellations VIA a pareto, genetic algorithm, AIAA-98-4381, 2000

10 John W Hartmann, Victoria L. Coverstone-Carroll, Steven N Williams. The Journal of Astronauical Science, 1998, 3

# Solving Minimizing Time-Energy Problem of Orbital Transformation via the Improved SPEA

WANG Shi　DAI Jin-Hai

(*College of Astronautics and Material Engineering , NUDT, Changsha* 410073 )

**Abstract**　An improved SPEA, which is a multiobjective evolutionary algorithm be pointed out. And the algorithm has high capability to solve problems defined in large scale space compared to the old one. On applying the algorithm to solve minimizing time-energy problem of orbital transformation which is always encountered in space mission, the computing results show that the algorithm is valid and efficient.

**Key words**　Rocket flight dynamis, improved SPEA, orbit transformation, minimizing time-energy