第 44 卷 第 3 期 天 文 学 报 Vol.44 No.3
2003 年 8 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Aug., 2003

# 三星星座对地定位的最佳构形研究 *

余 敏 徐 劲 夏 益 陆本魁

(中国科学院紫金山天文台 南京 210008)
(中国科学院国家天文台 北京 100012)

**摘要** 用数值方法对三星星座几何构形与定位精度的关系进行了仿真计算，结果表明对满足较高定位精度的区域进行定位，三星的几何构形呈等边三角形时，定位精度最高.

**关键词** 人造卫星，三星星座，定位
**中图分类号**： P 138

## 1 引言

随着航天技术的不断发展，小卫星以其体积小、重量轻、成本低、研制周期短、发射方便灵活 (可单独发射、搭载或一箭多星) 而日益受到人们的重视. 其中小卫星编队飞行星座 (有时也称作网络星座或卫星簇) 就是小卫星应用领域中的一个重要研究内容. 所谓小卫星编队飞行星座，是指由轨道参数基本相同 (半长轴、轨道倾角、偏心率相同，卫星纬度角、升交点赤经相近) 、星间距较近 (一般在百公里量级以内) 、空间几何构形相对稳定的多颗卫星所组成的小卫星星座. 小卫星编队飞行星座具有广泛的应用价值，其中对地面目标进行定位就是其应用领域之一.

小卫星编队飞行星座对地面目标进行定位属时差几何定位范畴，其定位原理为： $N$ 颗卫星同时被动接收地面目标所发出的无线电信号，根据各卫星接收到信号时间的不同，可获得 $N-1$ 组独立的时差观测数据，由 $N-1$ 组独立的时差观测数据可建立 $N-1$ 个含有 $N-1$ 个未知量的非线性测量方程，解此 $N-1$ 个非线性测量方程所组成的方程组可求得 $N-1$ 个未知量的解. 本文假设定位目标分布在参考椭球体上，那么定位点只需地理经度 $\lambda$ 和地理纬度 $\varphi$ 两个量来描述，从定位原理关系式可知，由三星组成小卫星编队飞行星座可完成求两个未知量的定位任务. 本文就是以这样的三星小卫星编队飞行星座为仿真模型.

众所周知，由于实际的测量资料当中总存在一定的测量误差，这些测量误差将通过测量方程传播到方程组的解当中去，显然不同的星座构形对测量误差的传播方式是不一样的，也就是说不同的星座构形将对应不同的定位精度. 本文所做的工作就是提供一种分析星座构形与定位精度关系的计算方法，并用此方法求出最佳定位意义上的三星星座

2002-12-10 收到原稿， 2003-01-27 收到修改稿
* 国家自然科学基金资助项目 ( 10273026 )

几何构形.

## 2　定位原理和测量方程的建立

如图 1 所示，在地固坐标系中，设 $O$ 、 $l$ 和 $S_i$ 分别为地心、定位点和卫星位置；定位点的理论位置矢量为 $\boldsymbol{R}_l$ ；三颗卫星的理论位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 、 $\boldsymbol{r}_2$ 、 $\boldsymbol{r}_3$ ；定位点到 3 颗星的矢量分别 $\boldsymbol{\rho}_1$ 、 $\boldsymbol{\rho}_2$ 、 $\boldsymbol{\rho}_3$. 对某一构形的三星卫星星座，设二组含有测量误差 $\Delta K1$ 、 $\Delta K2$ 的距离差数据 (标量)

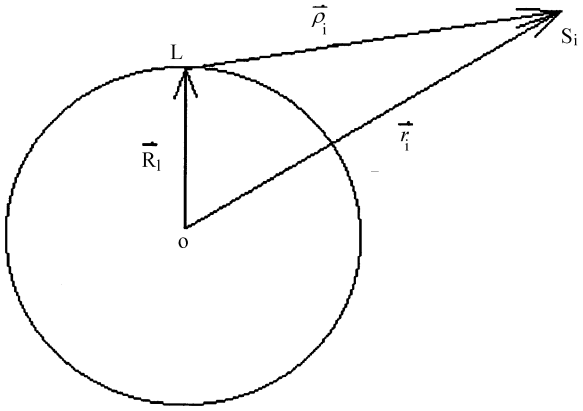


图 1　三星位置示意

Fig. 1　T he relation of the three satellites

为 $\Delta\rho$ 和 $\Delta\rho^*$ ；不含测量误差的距离差数据 (标量) 为 $\Delta\rho_\circ$ 和 $\Delta\rho_\circ^*$ ；并用 $\Delta\rho$ 、 $\Delta\rho_\circ$ 表示定位点 $l$ 到卫 3 和到卫星 1 的距离差， $\Delta\rho^*$ 、 $\Delta\rho_\circ^*$ 表示定位点 $l$ 到卫星 3 和到卫星 2 的距离差.

由卫星轨道理论知道 [1−2] ：

$$\Delta\rho_= |\boldsymbol{\rho}_3| - |\boldsymbol{\rho}_1| = |\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{R}_l| - |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{R}_l| \ ,$$

$$\Delta\rho^* = |\boldsymbol{\rho}_3| - |\boldsymbol{\rho}_2| = |\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{R}_l| - |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{R}_l| \ .$$

将上两式在 $\Delta\rho_\circ$ 和 $\Delta\rho_\circ^*$ 处进行泰勒级数展开，忽略二次以上高阶项，则得：

$$\Delta\rho = \Delta\rho_\circ + \frac{\partial\left(|\boldsymbol{\rho}_3| - |\rho_1|\right)}{\partial \boldsymbol{R}_l}\Delta\boldsymbol{R}_l = \Delta\rho_\circ + \left(\frac{\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}_3}{|\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}_3|} - \frac{\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}_1|}\right)^T \Delta\boldsymbol{R}_l \ ,$$

$$\Delta\rho^* = \Delta\rho_\circ^* + \frac{\partial\left(|\boldsymbol{\rho}_3| - |\boldsymbol{\rho}_2|\right)}{\partial \boldsymbol{R}_l}\Delta\boldsymbol{R}_l = \Delta\rho_\circ^* + \left(\frac{\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}_3}{|\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}_3|} - \frac{\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{R}_l - r_2|}\right)^T \Delta\boldsymbol{R}_l \ .$$

设参考椭球体为： $\boldsymbol{R}_l = \begin{pmatrix} N\cos\varphi\cos\lambda \\ N\cos\varphi\sin\lambda \\ N(1-e^2)\sin\varphi \end{pmatrix}$，$\lambda$ 为地理经度，$\varphi$ 为地理纬度；$e^2 = 2f - f^2$；$N = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$，$f$ 为参考椭球体扁率，$a$ 为参考椭球体赤道半径. 则：

$$\Delta\boldsymbol{R}_l = \begin{pmatrix} -\dfrac{N^3}{a^2}(1-e^2)\sin\varphi\cos\lambda & -N\cos\varphi\sin\lambda \\ -\dfrac{N^3}{a^2}(1-e^2)\sin\varphi\sin\lambda & N\cos\varphi\cos\lambda \\ \dfrac{N^3}{a^2}(1-e^2)\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \\ \Delta\lambda \end{pmatrix},$$

经过整理可得：

$$\Delta K1 = \Delta\rho - \Delta\rho_\circ = \left(\frac{\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}_3}{|\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}_3|} - \frac{\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}_1|}\right)^T \begin{pmatrix} -\dfrac{N^3}{a^2}(1-e^2)\sin\varphi\cos\lambda & -N\cos\varphi\sin\lambda \\ -\dfrac{N^3}{a^2}(1-e^2)\sin\varphi\sin\lambda & N\cos\varphi\cos\lambda \\ \dfrac{N^3}{a^2}(1-e^2)\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \\ \Delta\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Delta K2 = \Delta\rho^* - \Delta\rho_\circ^* = \left(\frac{\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}_3}{|\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}_3|} - \frac{\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{r}_2|}\right)^T \begin{pmatrix} -\dfrac{N^3}{a^2}(1-e^2)\sin\varphi\cos\lambda & -N\cos\varphi\sin\lambda \\ -\dfrac{N^3}{a^2}(1-e^2)\sin\varphi\sin\lambda & N\cos\varphi\cos\lambda \\ \dfrac{N^3}{a^2}(1-e^2)\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \\ \Delta\lambda \end{pmatrix}.$$

以上是两个独立的测量方程，由于在进行泰勒级数展开时忽略了二次以上高阶项，解上述测量方程一般采取牛顿迭代法，即首先计算出 $\Delta\lambda$ 、 $\Delta\varphi$ ；然后设 $\lambda^* = \lambda + \Delta\lambda$ ；$\varphi^* = \varphi + \Delta\varphi$ ； $\boldsymbol{R}_l^* = \begin{pmatrix} N\cos\varphi^*\cos\lambda^* \\ N\cos\varphi^*\sin\lambda^* \\ N(1-e^2)\sin\varphi^* \end{pmatrix}$ ；将 $\boldsymbol{R}_l^*$ 、 $\lambda^*$ 、 $\varphi^*$ 作为新的 $\boldsymbol{R}_l$ 、 $\lambda$ 、 $\varphi$ 代入原测量方程组进行迭代计算，通过多次迭代求出符合某一收敛精度要求的 $\boldsymbol{R}_l^*$, 此 $\boldsymbol{R}_l^*$ 即为目标定位点的计算位置. 定位精度就用 $\sigma^* = |\boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{R}_l^*|$ 表示.

## 3 仿真模型的选取

### 3.1 卫星轨道参数的选取和各种三星构形的产生

从测量方程可以知道，三星如果全都分布在同一个轨道面上，测量方程组将出现秩亏而无法求解，因此，三星必须分布在不同的轨道面上，本文采用一种简单而不影响结

论的仿真方法，让三星分别分布在两个轨道面上，其中一个轨道面上有两颗卫星，另一颗同轨面上有 一颗卫星，如图 2 所示，称 $S_1$ 和 $S_2$ 为同轨卫星， $S_3$ 为异轨卫星．由于

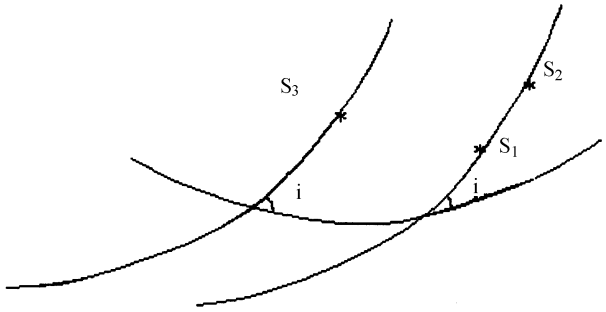


图 2　三星位置分布

Fig. 2　Distributing of the three satellites

卫星受动力学条件的约束，三星构形在卫星运行过程中会发生变化，因此，要确保星座构形保持相对稳定以使构形变化不超出某一容许的范围，本文分别用 $d_{\max}$ 和 $d_{\min}$ 来表示最大和最小星间距，也就是说三星在运行过程中始终要满足 $d_{\min} \le$ 任意两星之间的距离 $\le d_{\max}$ 的约束条件，这样的约束条件决定了两轨道面升交点赤经之差 $\Delta\Omega$ 的选取不是任意的， $\Delta\Omega$ 的选取直接影响三星星座的构形， $\Delta\Omega$ 取值范围的计算方法如下：

设 $\Delta\Omega_{\min}$ 和 $\Delta\Omega_{\max}$ 分别表示两轨道面的最小经度差和两轨道面的最大经度差； $\Omega_d$ 和 $L_d$ 分别表示双星轨道的升交点赤径和格林尼治东经， $\Omega_s$ 和 $L_s$ 分别表示单星轨道的升交点赤径和格林尼治东经，则单星轨道与双星轨道的经度差为：

$$\Delta\Omega = \Omega_d - \Omega_s = L_d - L_s\,.$$

如图 3 所示，考虑单星轨道与双星轨道皆为小偏心率轨道，根据球面三角理论不难证明

$$\sin(\Delta\Omega_{\min} + \alpha) = \frac{\sin\beta + \sin\varphi\cos i}{\cos\varphi\sin i}, \quad (\Delta\Omega + \alpha \le \frac{\pi}{2})\,.$$

单星轨道面与双星轨道面升交点的最小经度差为：

$$\Delta\Omega_{\min} = \sin^{-1}\left(\frac{\sin\beta + \sin\varphi\cos i}{\cos\varphi\sin i}\right) - \alpha\,,$$

其中：

$$\beta = 2\sin^{-1}(\frac{d_{\min}}{2a})\,,$$

$$\sin\varphi = \sin u_2 \sin i\,,$$

$$\cos\varphi\cos\alpha = \cos u_2\,,$$

$$\cos\varphi\sin\alpha = \sin u_2\cos i\,.$$

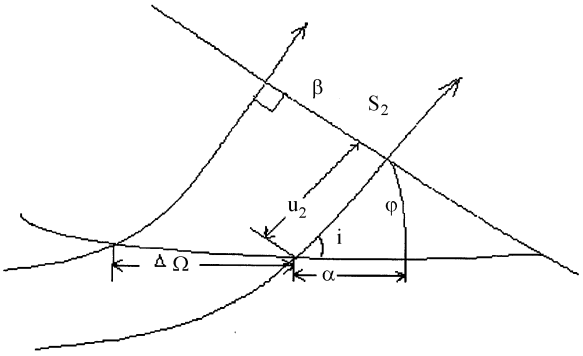


图 3 两轨道面的最小经度差

Fig. 3 The minimum span of the two orbital plane

如图 4 所示，根据球面三角理论不难证明：

$$\sin(\Delta\Omega_{\max}\ +\psi)=\frac{\sin(i+A)\mathrm{ctg}i}{\sqrt{\mathrm{ctg}^2b+\cos^2(i+A)}}\,,\qquad(\Delta\Omega\ +\psi\le\frac{\pi}{2})\,.$$

单星轨道与双星轨道升交点的最大经度差为：

$$\Delta\Omega_{\max}=\sin^{-1}\left(\frac{\sin(i+A)\mathrm{ctg}i}{\sqrt{\mathrm{ctg}^2b+\cos^2(i+A)}}\right)-\psi\,,$$

其中：

$$\Delta u=u_2-u_1\,,$$

$$\beta=2\sin^{-1}\left(\frac{d_{\max}}{2a}\right)\,,$$

$$b=\cos^{-1}\left(\frac{\cos\beta\cos\left(u_1+\frac{\Delta u}{2}\right)}{\cos\frac{\Delta u}{2}}\right)\,,$$

$$A=\cos^{-1}\left(\frac{\cos\beta\sin\left(u_1+\frac{\Delta u}{2}\right)}{\sin b\cos\frac{\Delta u}{2}}\right)\,,$$

$$\psi=\sin^{-1}\left(\frac{\cos(i+A)}{\sqrt{\mathrm{ctg}^2b+\cos^2(i+A)}}\right)\,.$$

若 $\beta=\Delta u$ 则由 $\Delta\Omega$ 形成的两轨道面可使三颗卫星产生等边三角形的形状.

另外，由卫星轨道理论可知，当轨道倾角 $i$ 等于 $63.4^\circ$ 时，其近地点幅角进动率等于零，这样两轨道面拱线在惯性空间上的方向就能基本保持不变，使星座构形在长时间运行过程当中保持相对稳定. 因此，按照上述 $\Delta\Omega_{\min}$ 、 $\Delta\Omega_{\max}$ 和 $i$ 的选择要求，本文选择的卫星轨道参数见表 1 ：

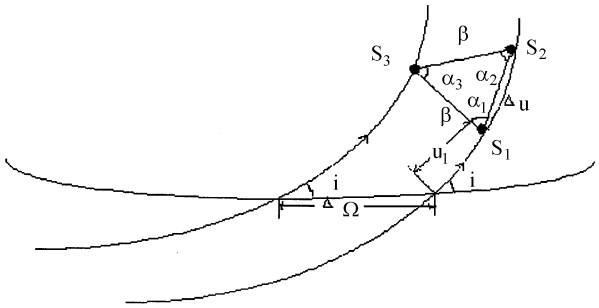


图 4　两轨道面的最大经度差

Fig. 4　The maximum span of the two orbital plane

**表 1　卫星轨道参数**

**Table 1　Satellite's orbital elements**

| | Satellite-1 | Satellite-2 | Satellite-3 |
|---|---|---|---|
| Semi-major axis (km) | 7449.20 | 7449.20 | 7449.20 |
| Inclination ( degree ) | 63°.43 | 63°.43 | 63°.43 |
| Eccentricity | 0.00275 | 0.00275 | 0.00275 |
| Right ascension of ascending node (degree) | 108°.74 | 108°.74 | 108°.33 |
| Argument of perigee ( degree ) | 220°.0 | 220°.0 | 190°.0 |
| Argument of latitude ( degree ) | 25°.70 | 26°.09 | 25°.21—26°.97 |

星座构形的产生方法为：由于在星间距长度一定时，三星星座的构形由第三颗异轨卫星与两同轨卫星的相对位置确定，因此在进行仿真计算时，将同轨双星在某时刻的位置固定在某一纬度处 (本文设为北纬 23 度), 通过改变异轨卫星在其轨道上的位置，使其既满足星间距的要求 (本文分别取 $d_{\max}$=150 公里和 $d_{\min}$=30 公里) 又满足三星同时可视定位点的要求，逐点仿真各种三星构形，本文取异轨单星的仿真步长为 0.01 度.

### 3.2　测量误差的选取和仿真定位点的产生

求解上述测量方程需要知道测量误差, 但测量误差一般无法直接获得. 本文仿真计算中所用的测量误差是通过编程使其产生均值为零、中误差 $\sigma$=50 米的正态白噪声仿真数据. 同时由于同一构形对不同的区域内的定位点进行定位所得到的定位精度是不同的，通过大量的仿真计算可知，虽然三星同时可视的区域较大，但定位精度较高的区域仅局限在以三星几何中心星下点为中心的一个较小区域内，为了客观反映定位点的随机分布特性，又满足较高定位精度的实际要求，本文定位点的选取是在以三星平面几何中心星下点为中心、以 5 度地心张角为半径的圆形区域内，编程产生满足均匀分布函数规律的定位点.

## 4　计算步骤和结果

按照上述仿真计算模型，在求某一构形对某一定位点的定位误差时，本文选取 200

组满足均值为零、中误差 $\sigma$=50 米的正态白噪声作为测量误差的样本，通过测量方程，可得到 200 组定位误差值，并计算 200 组定位误差值的平均值，$\bar{\sigma}_{\circ}=\sum_{1}^{200}\sigma^{*}/200$，用该值表示某一构形对某一定位点的平均定位精度．为了反映定位点选取的随机性，提高计算结果的可靠性，我们在定位点仿真区域内，分别选取 500 个、1000 个两组随机定位点，对每一个仿真定位点逐一进行计算，分别可得到 500 个和 1000 个这样的平均定位精度，计算这 500 个、1000 个平均定位精度的平均值 $\bar{\sigma}=\sum_{1}^{500}(\bar{\sigma}_0)/500$、$\bar{\sigma}=\sum_{1}^{1000}(\bar{\sigma}_0)/1000$，用该值表示某一构形对该仿真区域内随机定位点的平均定位精度．最后求出各种构形中 $\bar{\sigma}$ 最小的那组三星构形，这组三星构形即为所求的最佳定位意义上的三星星座构形，由于计算结果的数据较多，因此，本文采用图形的形式将结果显示出来，详见图 5 和图 6.

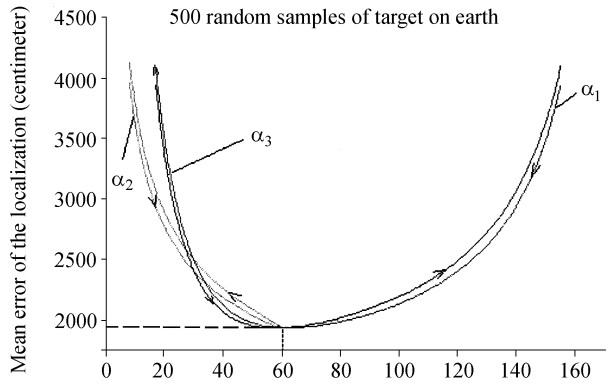


图 5 仿真计算结果

Fig. 5 The result of the simulation

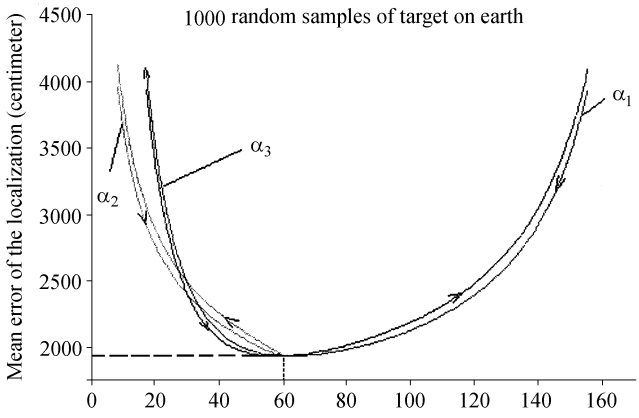


图 6 仿真计算结果

Fig. 6 The result of the simulation

通过仿真计算，我们得出统计意义上的三星最佳构形为等边三角形，结论非常稳定.

## 参 考 文 献

1　Oliver Montenbruck and Eberhard Gill,Satellite orbits,Berlin： Springer, 2000
2　王守信. GPS 卫星测量定位理论与应用. 长沙：国防科技大学出版社, 1996

# A Study of Optimal Configuration of Three-Satellite Constellation for Localizing the Object on Earth

YU Min　XU Jing　XIA Yi　LU Ben-Kui
(*Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing* 210008)
(*National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100012)

**Abstract**　The relation between the optimal precise localization and the three-satellite constellation is studied. The localization of an object on the earth by the observational data from three satellites which conbined as a constellation is an important method for present navigation. The precision of localization depends on the figuration of three satellites. By precise numerical computation, the optimal configuration with highest precision can be obtained statistically. The results indicate that the localization precision is the highest when the three-satellite constellation is presented in equilateral triangle within a localization precision area.

**Key words**　artificial satellite, three-satellite constellation,localization