第 44 卷 第 3 期 天 文 学 报 Vol.44 No.3
2003 年 8 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Aug., 2003

4 颗卫星情况的几何优化法修正*

郑作亚 黄 成 冯初刚 张飞鹏

(中国科学院上海天文台 上海 200030)

摘要 在 GPS 定位与导航中，用户可以通过选择至少 4 颗可见卫星的观测，得到测站位置和站钟差信息. 卫星相对于测站的几何关系直接影响到定位和导航的精度. 考虑用 4 颗卫星进行定位，在当前有一定的现实意义，在 Kihara 等人工作的基础上对四面体的性质进行了深入讨论，推导了 4 颗可见卫星构成四面体体积的计算公式，实例分析证明该计算公式更合理、更精确.

关键词 **天体力学**, GPS, GDOP

中图分类号: P 228

1 引言

作为现代空间导航系统，GPS(Global Positioning System— 全球定位系统) 已经引起各国的国防和民用部门的极大关注. 在 GPS 导航和定位中，它的定位精度一直是我们关注的重点，主要与两个因素有关 [1]: (1) 测站 GPS 接收机的精度，即观测标准差; (2) 相对测站而言，卫星的几何构形. 通常，用户可以通过至少 4 颗可见卫星得到测站位置和钟差信息. 在可观测卫星中，所选卫星的几何关系直接影响到定位或导航的精度. 导航或定位的精度与观测星座几何精度因子 (GDOP) 有关 [2]. 在 GPS 快速定位与导航中，要在短时间内进行坐标解算，可以利用少量最佳卫星的观测数据进行快速解算，同时考虑到一些老型号接收机的通道少，其内存也相对较小，而要进行较长时间的连续观测，基于上述几个原因，应该从可观测到的卫星中选择最佳的至少 4 颗卫星进行观测. 因此，讨论 4 颗卫星的位置、卫星星座构成的四面体体积和 GDOP 值的关系在目前是有一定意义的.

用户在地面上任何位置和时间，在 5° 高度角以上通常可以看见 6—12 颗卫星 [3]. 用户可以根据卫星星历选择最佳的 4 颗卫星来测定测站位置和站钟偏差. 以下是几种常用的卫星选择方法:

(1) 从可见卫星中依次选择 4 颗卫星，进行不同的组合，分别计算它们的 GDOP. 然后选出最小 GDOP 的组合，最小 GDOP 的值就对应于最佳几何组合 [4].

2002-11-07 收到原稿, 2003-03-10 收到修改稿

* 国家 “973” 项目 (G1998040703)、上海市科技发展基金项目 (01JC14058)、国家自然科学基金面上项目 (NSFC - 10073017)、国家自然科学基金 (40174008) 和中国科学院知识创新工程重要方向项目 (KJCX2—SW—T1) 资助

(2) 从可见卫星中依次选择 4 颗卫星, 根据这 4 颗卫星的地心向量所形成的四面体, 计算它们的体积, 在这些组合中, 四面体体积最大的认为是最佳的几何组合 [4,5].

(3) 首先在北、东和天顶方向选择 3 颗最大距离的卫星, 然后从其余的可见卫星中选择 1 颗卫星, 构成四面体, 保证四面体体积最大, 即 GDOP 值最小 [6].

在上述 3 种方法中, 方法 (1) 可以保证得到最佳几何组合, 但是在计算中涉及到矩阵的求逆等运算, 工作量很大; 方法 (2) 作为一种方法进行理论讨论是可行的, 并且计算量会相对减少, 但是它的精度不如方法 (1) ; 方法 (3) 是目前使用较多的方法, 它的计算量最小, 但是它在理论上还有待进一步研究. Kihara 等 [7] 讨论了卫星几何形状和精度的关系, 提出了一种简单、高精度的卫星选择方法. 本文将在文 [7] 的基础上进行四面体方法的讨论和修正.

2 四面体法原理

如图 1 所示, 设 4 颗卫星 A 、B 、C 、D 相对测站 P 构成位置单位向量 $\boldsymbol{e}_1$ 、$\boldsymbol{e}_2$ 、$\boldsymbol{e}_3$ 、$\boldsymbol{e}_4$, 卫星 A 、 B 间的向量为 $\boldsymbol{l}$, B 、 C 间的向量为 $\boldsymbol{m}$, C 、D 间的向量为 $\boldsymbol{n}$, 令卫星位置相对于测站的方向矢量在测站坐标系中的坐标分别为 $\boldsymbol{A}(x_1', y_1', z_1')$, $\boldsymbol{B}(x_2', y_2', z_2')$, $\boldsymbol{C}(x_3', y_3', z_3')$, $\boldsymbol{D}(x_4', y_4', z_4')$, 则可以得到 4 颗卫星所构成的四面体的体积为:

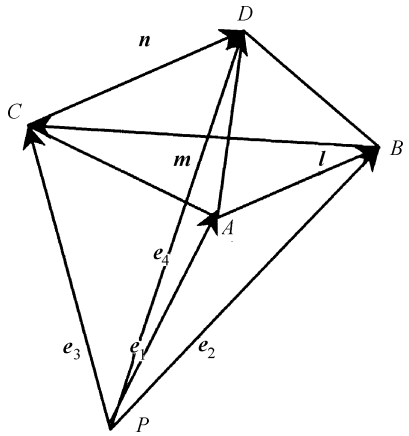

图 1　测站和卫星几何分布图

Fig. 1　the geometry of station and satellites

$$V = \frac{1}{6}(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{m}) \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2' - x_1' & y_2' - y_1' & z_2' - z_1' \\ x_3' - x_2' & y_3' - y_2' & z_3' - z_2' \\ x_4' - x_3' & y_4' - y_3' & z_4' - z_3' \end{vmatrix}, \tag{1}$$

利用行列式 $detK$ 的定义:

$$detK = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' & -1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & -1 \\ x_3' & y_3' & z_3' & -1 \\ x_4' & y_4' & z_4' & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2' - x_1' & y_2' - y_1' & z_2' - z_1' \\ x_3' - x_2' & y_3' - y_2' & z_3' - z_2' \\ x_4' - x_3' & y_4' - y_3' & z_4' - z_3' \end{vmatrix}, \tag{2}$$

联合式 (1) 和 (2), 则 V 与 $detK$ 之间的关系可以写成:

$$V = \frac{1}{6} detK . \tag{3}$$

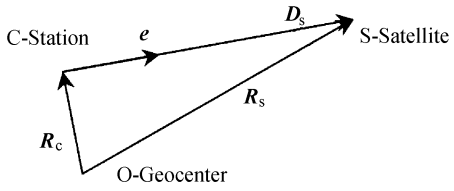

图 2 站星间的关系

Fig. 2 the relationship between station and satellite

3 GDOP 的计算

在 GPS 导航与定位中, 通常采用几何精度因子 GDOP 来估计定位误差与选择星座的关系. 下面我们简单分析一下站星间的关系, 如图所示. 在图 2 中, C 是测站位置, S 是可见卫星, O 是地心位置, $\boldsymbol{e}$ 是测站至卫星的单位矢量, $\boldsymbol{D}_s$ 是测站到卫星的位置矢量, $\boldsymbol{R}_c$ 和 $\boldsymbol{R}_s$ 分别表示测站和卫星的地心矢量. 根据图 2 有如下的矢量关系:

$$\boldsymbol{R}_c = \boldsymbol{R}_s - \boldsymbol{D}_s\,, \tag{4}$$

$\boldsymbol{R}_s$ 可以通过星历预报得到. 则卫星的伪距观测方程为:

$$\rho_s = D_s + c\Delta t_c + c\Delta t_s\,, \tag{5}$$

式中, Δt_c, Δt_s 分别表示接收机钟和卫星钟的延迟. 将方程 (4) 点乘 $\boldsymbol{e}$, 联立 (5) 式得:

$$R_c - c\Delta t_c = R_s - \rho_s + c\Delta t_s\,, \tag{6}$$

下标 $s = 1, 2, \cdots, n$, n 为所观测的卫星个数 $(n \geq 4)$, 得到矩阵形式为:

$$K_c X_c = A_c X_c - \rho\,. \tag{7}$$

其中,

$$K_c = \begin{bmatrix} e_1^T & -1 \\ e_2^T & -1 \\ \vdots & \vdots \\ e_n^T & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & -1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n & -1 \end{bmatrix},$$

$$X_c = \begin{bmatrix} R_c^T & c\cdot\Delta t_c \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} R_{c1} & R_{c2} & R_{c3} & c\cdot\Delta t_c \end{bmatrix}^T,$$

$$A_c = \begin{bmatrix} e_1^T 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2^T 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_n^T 1 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} R_1^T c\Delta t_{c1} & R_2^T c\Delta t_{c2} & \cdots & R_n^T c\Delta t_{cn} \end{bmatrix}^T,$$

$$\rho = \left[\begin{array}{cccc} \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_n \end{array} \right]^T ,$$

这里， x_i 、 y_i 、 $z_i (i = 1, 2 \cdots, n)$ 分别为卫星相对测站的方向余弦. 在同时观测 4 颗卫星星座的条件下， $(K_c^T K_c)$ 对角线上的值是近似测站坐标 3 个方向和时间偏差的方差. 因此， GDOP 可以定义为 [8] ：

$$(\mathrm{GDOP}) = [\mathrm{Trace}(\mathrm{K_c^T K_c})^{-1}]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(\mathrm{PDOP})^2 + (\mathrm{TDOP})^2}\,, \tag{8}$$

其中， PDOP 为三维定位精度因子， TDOP 为时间精度因子. PDOP 可以解释成卫星与用户位置所组成的四面体的体积 V 的倒数 [4].

4　优化几何法的计算

由于 GDOP 是一个与坐标系选取无关的指标, 所以可以将其中一个卫星的方向与直角坐标系统的 x 方向一致, 并使另一个卫星的 Z 坐标为零, 如图 3 所示, 即： $x_1 = 1, y_1 = z_1 = z_2 = 0$, 则矩阵 K_c 为：

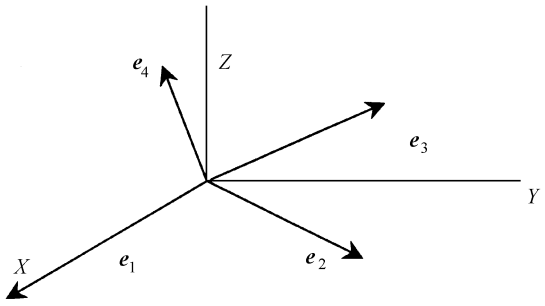

图 3　卫星几何关系图

Fig. 3　the geometry of satellites

$$K_c = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ x_2 & y_2 & 0 & -1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & -1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & -1 \end{array} \right] . \tag{9}$$

从数学的角度， K_c^{-1} 可以通过它的伴随阵与行列式的商得到. 则 (8) 式的 $(K_c^T K_c)^{-1}$ 可表示成：

$$(K_c^T K_c)^{-1} = K_c^{-1} (K_c^T)^{-1} = \frac{(adj K_c)}{\det K_c} \frac{(adj K_c^T)}{\det K_c^T} = \frac{(adj K_c)(adj K_c^T)}{(\det K_c)^2} . \tag{10}$$

由 (9) 式得：

$$\det K_c = (y_4 z_3 - y_3 z_4)(1 - x_2) + y_2 z_4 (1 - x_3) - x_2 z_3 (1 - x_4) . \tag{11}$$

为了求得最优化 GDOP, 可以引进参数 λ_2, λ_3 和 λ_4 构成 Lagrange 函数 [9] ：

$$Q = \{A/(\det K_c)^2\} + \lambda_2(x_2^2 + y_2^2 - 1) + \lambda_3(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - 1) + \lambda_4(x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 - 1)\,, \quad (12)$$

A 为 (9) 式的行列式，方程 (12) 对 i 求偏导并令其为 0, 可以得到：

$$Q_i = \frac{A_i(\det K_c) - 2A(\det K_c)_i}{(\det K_c)^3} + 2\lambda_j i = 0\,, \quad (13)$$

其中， $i = x_2, x_3, x_4, y_2, y_3, y_4, z_3, z_4$, A_i 为相对于 i 的行列式;

$$j = 2\text{时}, \quad i = x_2, y_2\,;$$

$$j = 3\text{时}, \quad i = x_3, y_3, z_3\,;$$

$$j = 4\text{时}, \quad i = x_4, y_4, z_4\,;$$

从通式 (13) 中消除参数 λ_2, λ_3 和 λ_4, 可产生新的方程如下：

$$(y_i A_{x_i} - x_i A_{y_i}) \det K_c - 2A\left[y_i(\det K_c)_{x_i} - x_i(\det K_c)_{y_i}\right] = 0, \quad i = 2, 3, 4\,, \quad (14)$$

$$(z_j A_{x_j} - x_j A_{z_j}) \det K_c - 2A\left[z_j(\det K_c)_{x_j} - x_j(\det K_c)_{z_j}\right] = 0, \quad j = 3, 4\,. \quad (15)$$

根据条件： $x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = 1$, 就可以得到矩阵 K_c 为

$$K_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

这样， $x_2 = x_3 = x_4 = -\frac{1}{3}$, 也即，它们的夹角为 $109^0.47$. 相应的最优 GDOP 值为：

$$(\mathrm{GDOP}) = \left[\mathrm{trace}(\mathrm{K_c^T K_c})^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} = 1.5811\,. \quad (17)$$

相应地， 4 颗可见卫星组成的最大的体积为 0.5132.

5 可见卫星的优化几何法

从前面部分推导出的最优化几何形状的 4 颗卫星不一定均能实现，现在来考虑从可见卫星中选择 4 颗卫星得到最优化 GDOP, 实现最大的四面体. 首先，我们假设：

(1) $x_1 = 1, y_1 = z_1 = z_2 = 0$;

(2)x_2, y_2, x_3, y_3 和 z_3 为已知;

(3)$x_4 = x_3$.

这样，从 (9) 式可以得到四面体的体积：

$$V = \frac{1}{6}\det K_c = \frac{1}{6}\{(y_4z_3 - y_3z_4)(1 - x_2) + y_2(1 - x_3)(z_4 - z_3)\}\,. \tag{18}$$

为了在 $x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = 1$ 条件下，对于 y_4 和 z_4 取四面体的体积最大值，我们可以构造函数 [9] ：

$$Q = (y_4z_3 - y_3z_4)(1 - x_2) + y_2(1 - x_3)(z_4 - z_3) + \lambda(x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 - 1)\,. \tag{19}$$

分别对 y_4 和 z_4 求偏导并令方程为 0, 可得

$$\frac{\partial Q}{\partial y_4} = z_3(1 - x_2) + 2\lambda y_4 = 0\,, \tag{20}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z_4} = -y_3(1 - x_2) + y_2(1 - x_3) + 2\lambda z_4 = 0\,, \tag{21}$$

从上面两个方程消除参数 λ, 可得方程：

$$(z_3z_4 + y_3y_4)(1 - x_2) - y_2y_4(1 - x_3) = 0\,. \tag{22}$$

联合条件 $x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = 1$, 求解得 y_4 和 z_4 分别为：

$$y_4 = \pm z_3(1 - x_2)\sqrt{\frac{1 - x_4^2}{\{z_3^2(1 - x_2)^2 + [y_3(1 - x_2) - y_2(1 - x_3)]^2\}}}\,, \tag{23}$$

$$z_4 = \pm\,[y_3(1 - x_2) - y_2(1 - x_3)]\sqrt{\frac{1 - x_4^2}{\{z_3^2(1 - x_2)^2 + [y_3(1 - x_2) - y_2(1 - x_3)]^2\}}}\,, \tag{24}$$

令 $\sqrt{\dfrac{1 - x_4^2}{\{z_3^2(1 - x_2)^2 + [y_3(1 - x_2) - y_2(1 - x_3)]^2\}}} = \Delta$, 则四面体体积：

$$V = \frac{1}{6}\left\{\left[[z_3(1 - x_2)]^2 - [y_3(1 - x_2) - y_2(1 - x_3)]^2\right]\cdot\Delta - y_2z_3(1 - x_3)\right\}\,. \tag{25}$$

为了验证 (23)—(25) 式与 Kihara 等 [7] 的 (37)—(39) 式的区别，我们做个算例，取一组可见卫星数据对公式改进前后的体积进行计算，卫星的分布高度角如表 1 所示.

表 1 采样卫星的分布 (此组数据来自文 [7] 的例子)

Table 1 The construction of sample satellites (data from example of literature [7])

No.(i)	Cutoff angle(°)	x_i	y_i	z_i	$\theta = \tan^{-1} x_i$(°)
1	83.34	1	0	0	0
2	40.85	0.6353	-0.6235	-0.4555	50.55
3	34.82	0.5485	0.8322	0.0810	56.74
4	31.55	0.5551	-0.8294	-0.0623	56.28
5	23.64	0.4815	-0.7722	0.4147	61.22
6	17.48	0.1987	-0.0617	-0.9781	78.54
7	11.87	0.1653	0.9862	0	80.49
8	10.03	0.2295	0.6292	0.7426	76.73

测站位置在北纬 7.95°, 西经 86.5°, 首先选取最大高度角的 1 号卫星为图 3 的 e_1 方向; 然后选 7 号卫星, 因为它与 e_1 的夹角接近 109.5°; 再选夹角最大的 6 号卫星; 最后与其他 5 颗卫星分别组成四面体. 用文 [7] 和本文的体积计算公式分别计算, 结果见表 2.

表 2 文 [7] 和本文公式计算结果的对比

Table 2 The contrast result of literature[7] and formula in this paper

No.	Combination	Result of literature[7]	Result of this paper
1	(1.7.6.2)	0.0796	0.1497
2	(1.7.6.3)	0.0293	0.0269
3	(1.7.6.4)	0.1757	0.2329
4	(1.7.6.5)	0.2466	0.2921
5	(1.7.6.8)	0.1425	0.1747

表 3 其他组合的对比计算

Table 3 The contrast result of others combinations

No.	Combination	Result of literature[7]	Result of this paper
1	(1.5.6.8)	0.2609	0.2267
2	(1.5.6.7)	0.2466	0.2921
3	(1.4.6.8)	0.2230	0.2328
4	(1.2.5.7)	0.1486	0.0472
5	(1.3.5.6)	0.1831	0.1589
6	(1.4.6.7)	0.1757	0.2329
7	(1.4.7.8)	0.1424	0.1400
8	(1.3.6.8)	0.1368	0.1484
9	(1.2.7.8)	0.1267	0.1089
10	(1.2.6.8)	0.1329	0.1779

从表 2 可以看出, 两种计算公式都得到了第 4 种组合体积最大, 相应的 GDOP 值最小的结论. 因此, 组合 4 是最优几何构形, 表 3 给出其他组合的对比计算结果. 按照本文的论述, 在表 3 的所有组合中不应该存在比相应最佳组合体积还大的情况, 但在文 [7] 的计算结果中, 表 3 的第 1 种组合明显大于表 2 中的第 4 种组合体积, 这是不合理的, 是文 [7] 中公式不准确造成的. 而本文的计算公式得到最佳组合 (表 2 的第 4 种组合)

的 GDOP 大于所有的其他组合，这是合理的. 通过算例分析验证得本文的计算公式更合理、更精确.

6 结论

考虑到从可观测卫星中选择至少 4 颗卫星进行观测，对其几何构形与 GDOP 值关系的讨论在目前还有一定的现实意义，本文在 Kihara 等工作的基础上对四面体的性质进行了深入讨论，对 Kihara 等的体积计算公式中不合理的部分进行了改进，并用实例进行体积的比较，结果表明：本文的体积计算公式，比文 [7] 的公式合理.

参 考 文 献

1 Soober.G.[德] 著. 赖锡安译. 卫星大地测量学 [M]. 北京：地震出版社， 1998

2 日本测地学会编著. GPS 人造卫星精密定位系统. 北京：地震出版社， 1989

3 周忠谟等. GPS 卫星测量原理与应用 [M]. 北京：测绘出版社， 1992

4 Milliken R J, Zoller C J. Principle of Operation of NAVSTAR and System Characteristics. Navigation: Journal of The Institute of Navigation, summer, 1978, 25: 95-106

5 Bogen H A. Geometric Performance of the Global Positioning System. SAMSOTR-74-169, AD-783210, 1974, 1-116

6 Noe P S, Mayer K A, Wu T K. A Navigation Algorithm for the Low-Cost GPS Receiver. Navigation: Journal of The Institute of Navigation, summer, 1978, 25: 258-264

7 Kihara M, Okada T. A Satellite Selection Method and Accuracy for the Global Positioning System. Navigation: Journal of The Institute of Navigation, spring, 1984, 31(1): 8-20

8 董绪荣. 张守信等. GPS/INS 组合导航定位及其应用 [M]. 长沙：国防科技大学出版社， 1998

9 沈永欢，梁在中等. 实用数学手册 [M]. 北京：科学出版社， 2002

The Amendment of the Optimum Geometry Based on Four Satellites

ZHENG Zuo-ya HUANG Cheng FENG Chu-Gang ZHANG Fei-Peng

(*Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 200030)

Abstract In some special GPS navigation and positioning applications, it can be synchronously obtained sites' positions and clock biases from four visible satellites. The selections of these four satellites have influence on the accuracy of navigation and positioning. The minimum GDOP can be realized for four symmetric distributed satellites with respect to the sites. The GDOP is inversely proportional to the volume of the tetrahedron formed by unit vectors from sites toward the satellites. In this paper, based on the work of Kihara, the amendment of the optimum geometry on tetrahedron is discussed deeply and induced the formula of tetrahedron, it is demonstrated that it is more reasonable and precisely in example.

Key words celestial mechanics, GPS, GDOP