第 44 卷 第 4 期 天 文 学 报 Vol.44 No.4
2003 年 11 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Nov, 2003

二阶后牛顿光线方程*

宫衍香 须重明

(南京师范大学物理科学与技术学院 南京 210097)

摘要 近来相继提出一系列的空间天体测量计划，要求考虑在多参考系中二阶后牛顿部分对光线传播的贡献，也就是说，必须讨论在最近完成的扩展的 DSX 体系下的二阶后牛顿 (2PN) 光线方程. DSX 体系是在 20 世纪 90 年代初建立的，用来讨论对 N 个任意形状和组成、自转可变形物体的一套完整的一阶后牛顿 (1PN) 天体力学理论. 在此建议采用迭代的方法来推导 2PN 光线方程. 从度规和 Christoffel 记号出发推导太阳系中的 2PN 光线方程. 当忽略掉更高阶的项时， 2PN 光线方程将回到在很多教科书中广泛出现的 1PN 光线方程. 利用这套方程就可以计算太阳系的光线传播.

关键词 广义相对论：二阶后牛顿近似方法，光线方程

中图分类号： P 12

1 引言

近来，一系列的空间天体测量计划相继由 LISA[1] 、 GAIA[2] 、 SIM[3] 、 DIVA[4] 、 ASTROD[5] 和 Mini-ASTROD[6] 等提出. 在所有的这些测量计划中，光线的传播需要计算到一个更高的精度. 比如，在 Mini-ASTROD 中，精度要求为 10^{-13}, 这是 2PN 的范围 (对太阳来讲 2PN 的精度为 $10^{-12}(R_\odot/r)^2$, 其中 $R_\odot$ 和 r 分别为太阳的半径和光线轨道到太阳的最近距离)[7]. 因此，我们要考虑 2PN 项对光线传播的影响. 这项工作在上世纪 80 年代早期就有人做过，比如， Epstein 等 [8] 、 Richter 等 [9]. Will 也讨论了含参数的 1PN 光线方程并用它成功的讨论了光线的偏折和时间延迟等问题 [10]. 另一方面，在上世纪 90 年代初建立的 DSX 体系使人们搞清楚了 1PN 下多参考系之间的变换问题 [11−14]. 在 DSX 体系建立以前我们只能讨论在一个参考系下的近似方法. 但对于一个参考系中的标势和矢势如何转换到另一个参考系，多极矩的展开问题 (对多极矩的计算需要在局部参考系中进行) 等必须用 DSX 体系进行讨论. 在太阳系中对光线的测量是在地球或其他局部参考系中，也就是说，多极矩的计算是在局部参考系，但多极矩对光线轨道的影响却要在整体参考系中考虑，因此我们必须讨论在 DSX 体系下的 2PN 光线方程. 在以往的后牛顿理论中人们引入了 8 个量， U(牛顿势) 、 χ (超势) 、 V_i 、 W_i 、 Φ_1 、 Φ_2 、 Φ_3 和 Φ_4, 而在 DSX 体系中代替这些量的只有 w 和 w_i, 在局部坐标系中为 W 和 W_a. 在 DSX 体系下，对光线的 2PN 推广工作最近才完成 [7], 我们在文章中把该体系下的度规张量 g_{ij} (局部参考系中为 G_{ab}) 计算精度算到 $O(4)$, 从爱因斯坦场方程导出了 w, w_i 和 q_{ij}

2003-04-07 收到原稿， 2003-05-26 收到修改稿

* 国家自然科学基金资助项目 (批准号： 10273008)

(在局部参考系中为 W, W_a 和 Q_{ab}) 满足的方程以及局部参考系中的势与整体参考系中的势之间的关系，最后还给出了在太阳系即各向同性近似情况下 q 的解. 上面提到的量 $q_{ij}(Q_{ab}$) 为我们在度规张量 $g_{ij}(G_{ab})$ 中引入的一个新的量，可看成空间各向异性部分对 2PN 近似的贡献. 因为在实验上感兴趣的是太阳系中的光线传播问题，而一般 $q_{ij}(Q_{ab})$ 的解又很复杂 [7], 所以为了得到一套可以实际求解的 2PN 光线方程，在本文中我们只限于讨论太阳系的情况. 我们以整体坐标系为例并采用迭代的方法来求 2PN 光线方程，所得的结果也适用于局部坐标系，只要我们把相应整体坐标系中的量改为局部坐标系中的量. 例如把 w 、 w_i 、 q_{ij} 、 $g_{\mu\nu}$ 换成 W 、 W_a 、 Q_{ab} 、 G_{ab} 等等. 本文采用 $c \neq 1$ 的单位制，相关的符号约定与 DSX 体系相同 [11−14].

2　2PN 度规和克氏记号

在一个整体坐标系中， 2PN 的协变度规 $g_{\mu\nu}$ 有下面的形式 [7]:

$$g_{00} = -1 + \frac{2w}{c^2} - \frac{2w^2}{c^4} + O(6)\,,$$

$$g_{0i} = -\frac{4w_i}{c^3} + O(5)\,,$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}(1 + \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4}) + \frac{q_{ij}}{c^4} + O(6)\,. \tag{1}$$

从度规 (1) 式出发，考虑 2PN 精度要求，我们可以计算出 2PN 克氏记号:

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{w_{,t}}{c^3} + O(5)\,,$$

$$\Gamma^0_{0i} = -\frac{w_{,i}}{c^2} + O(6)\,,$$

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{c^3}(\delta_{ij}w_{,t} + 4w_{(i,j)}) + O(5)\,,$$

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{1}{c^3}(\delta_{ij}w_{,t} - 4w_{[i,j]}) + O(5)\,,$$

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{w_{,i}}{c^2} + \frac{4}{c^4}(ww_{,i} - w_{i,t}) + O(6)\,,$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{c^2}(\delta_{ij}w_{,k} + \delta_{ik}w_{,j} - \delta_{jk}w_{,i}) + \frac{1}{2c^4}(q_{ij,k} + q_{ik,j} - q_{jk,i}) + O(6)\,,$$

其中， $w_{(i,j)} = (w_{i,j} + w_{j,i})/2$, $w_{[i,j]} = (w_{i,j} - w_{j,i})/2$. 这些已在 2PN 的推广工作中完成，也是下面我们推导光线方程的出发点.

3 1PN 光线方程

我们首先推导在 $c \neq 1$ 的单位制中光子运动满足的基本方程. 光子的运动满足 [15]

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0\,, \tag{2}$$

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}=0\,, \tag{3}$$

其中 λ 为仿射参数. (3) 式对 x^0 分量为

$$c\frac{d^2t}{d\lambda^2}+\Gamma^0_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}=0\,, \tag{4}$$

其空间的分量为

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2}+\Gamma^i_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}=0\,, \tag{5}$$

再利用

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda}=\frac{dx^\mu}{dt}(\frac{dt}{d\lambda})\,,$$

得

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}=\frac{d^2x^\mu}{dt^2}(\frac{dt}{d\lambda})^2+(\frac{dx^\mu}{dt})\frac{d^2t}{d\lambda^2}\,. \tag{6}$$

在 (6) 式中取 $\mu=i$, 并把 (4) 式和 (5) 式代入到 (6) 式可得

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}=(\frac{1}{c}\Gamma^0_{\nu\sigma}\frac{dx^i}{dt}-\Gamma^i_{\nu\sigma})\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\sigma}{dt}\,. \tag{7}$$

同样我们把 (2) 式表示成

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}=0\,. \tag{8}$$

方程 (7) 和方程 (8) 就是光子运动满足的基本方程, 利用它们就可以讨论在 1PN 和 2PN 近似情况下光子运动所满足的方程.

我们先来看 DSX 体系下的 1PN 光线方程. 在 1PN 情况下, 问题较为简单. 我们只要把 2PN 度规中的 2PN 部分 (最高量级部分) 去掉, 剩下的就是 1PN 的度规. 比如, 去掉 g_{00} 和 g_{ij} 的 $O(4)$ 部分, g_{0i} 取为零, 我们得到的就是 1PN 的度规张量. 把 1PN 的度规张量的各分量代入到 (8) 式中, 可得

$$0=c^2-2w-(1+\frac{2w}{c^2})\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|^2\,. \tag{9}$$

需要指出的是，在只考虑 1PN 情况时，这里以及下面的 w 只需考虑到牛顿量级，与牛顿势 U 一致. 同样把克氏记号的各分量代入 (7) 式中到 1PN 精度，可得

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = w_{,i}\,(1+\frac{1}{c^2}\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|^2) - \frac{4}{c^2}\frac{dx^i}{dt}(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\nabla w)\,. \tag{10}$$

方程 (9) 和方程 (10) 的 Newton 解 (即零级近似解) 为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + c\boldsymbol{n}(t-t_0), \qquad |\boldsymbol{n}| = 1\,, \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $t=t_0$ 时的初始条件. 此解表示光线以常速率 $|d\boldsymbol{x}_N/dt| = c$ 沿直线传播，到 1PN 精度的解为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{x}_{1P}$, $\boldsymbol{x}_{1P}$ 为 1PN 修正，所以有

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + c\boldsymbol{n}(t-t_0) + \boldsymbol{x}_{1P}\,. \tag{12}$$

由 (12) 式，我们可以得到下面的一系列关系：

$$x^i = x^i_0 + cn^i(t-t_0) + x^i_{1P}\,, \tag{13}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = c\boldsymbol{n} + \frac{d\boldsymbol{x}_{1P}}{dt}\,, \tag{14}$$

$$\frac{dx^i}{dt} = cn^i + \frac{dx^i_{1P}}{dt}\,, \tag{15}$$

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{d^2x^i_{1P}}{dt^2}\,. \tag{16}$$

当考虑到 1PN 精度时我们有

$$\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|^2 = c^2 + 2c\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}_{1P}}{dt}\,. \tag{17}$$

把 (17) 式代入方程 (9) 中，得

$$0 = c^2 - 2w - (1+\frac{2w}{c^2})\left(c^2 + 2c\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}_{1P}}{dt}\right) \tag{18}$$

忽略掉 (18) 式中 1PN 以上的高阶项，我们可以解出

$$c\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}_{1P}}{dt} = -2w\,. \tag{19}$$

同样把 (14) 式、 (15) 式、 (16) 式和 (17) 式代入到方程 (10) 中，忽略 1PN 以后的高阶项可得

$$\frac{d^2x^i_{1p}}{dt^2} = 2w_{,i} - 4n^i(\boldsymbol{n}\cdot\nabla w) \tag{20}$$

也可以把 (20) 式写成矢量形式

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}_{1p}}{dt^2} = 2\left[\nabla w - 2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla w)\right]. \tag{21}$$

当然在 (19) 式和 (21) 式中的 w 只需要牛顿量级和牛顿势 U 一致. 到此我们就得到了 DSX 体系中的 1PN 光线方程 (19) 式和 (21) 式. 这与 Will 导出的含参数的 1PN 光线方程是一致的 [10], 当把那里的参数 γ 取为 1 并把 U 换成在 DSX 体系里与之对应的 w, 得到的就是上面的两个方程. 下面在讨论 2PN 的修正 $\boldsymbol{x}_{2P}$ 时, $\boldsymbol{x}_{1P}$ 部分可作为已知由上面的两个方程求出, 通过迭代的方法再求 $\boldsymbol{x}_{2P}$.

4 2PN 光线方程

按上面同样的思路, 用迭代的方法我们再来推导 DSX 体系下的 2PN 光线方程. 把 2PN 协变度规 $g_{\mu\nu}$ 的各分量代入到 (8) 式中, 可得

$$0 = c^2 - 2w + \frac{2w^2}{c^2} + \frac{8w_i}{c^2}\frac{dx^i}{dt} - \left[1 + \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4}\right]\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|^2 - \frac{q_{ij}}{c^4}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}. \tag{22}$$

把 2PN 克氏记号的各分量代入到方程 (7) 中, 可得

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^i}{dt^2} &= w_{,i}(1 - \frac{4w}{c^2} + \frac{1}{c^2}\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|^2) - \\ &\quad 2\frac{dx^i}{dt}(\frac{3w_{,t}}{2c^2} + \frac{2w_{,j}}{c^2}\frac{dx^j}{dt} - \frac{2w_{(j,k)}}{c^4}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} - \frac{w_{,t}}{2c^4}\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|^2) + \\ &\quad \frac{4w_{i,t}}{c^2} + \frac{8w_{[i,j]}}{c^2}\frac{dx^j}{dt} - \frac{q_{ij,k}}{c^4}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} + \frac{q_{jk,i}}{2c^4}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}.\end{aligned} \tag{23}$$

方程 (22) 和方程 (23) 为 2PN 精度下光线满足的基本方程. 设它们的解为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_N + \xi\boldsymbol{x}_{1P} + \alpha\boldsymbol{x}_{2P}$, 其中的两个参数 ξ 和 α 是为了在计算中明确量级而引入的, 在最后的结果中令它们等于 1 即可. 同时, 我们也可以看出它们标志的量级分别为 $\xi \sim O(1)$ 和 $\alpha \sim O(3)$, 这样就可得到下面的一系列关系:

$$x^i = x_0^i + cn^i(t - t_0) + \xi x_{1P}^i + \alpha x_{2P}^i. \tag{24}$$

$$\frac{dx^i}{dt} = cn^i + \xi\frac{dx_{1P}^i}{dt} + \alpha\frac{dx_{2P}^i}{dt}. \tag{25}$$

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \xi\frac{d^2x_{1P}^i}{dt^2} + \alpha\frac{d^2x_{2P}^i}{dt^2}. \tag{26}$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|^2 = c^2 + 2c\xi\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}_{1P}}{dt} + 2c\alpha\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}_{2P}}{dt} + \xi^2\left|\frac{d\boldsymbol{x}_{1P}}{dt}\right|^2. \tag{27}$$

$$\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = c^2n^in^j + c\xi n^i\frac{dx^j_{1P}}{dt} + c\xi n^j\frac{dx^i_{1P}}{dt} + c\alpha n^i\frac{dx^j_{2P}}{dt} + c\alpha n^j\frac{dx^i_{2P}}{dt} + \xi^2\frac{dx^i_{1P}}{dt}\frac{dx^j_{1P}}{dt}\,. \tag{28}$$

在 (27) 式和 (28) 式中，我们均略掉 2PN 以后的高阶项. 把 (25) 、 (27) 和 (28) 式代入方程 (22) 中并考虑到 2PN 精度得

$$0 = -4w - 2\xi c\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}_{1P}}{dt} + \frac{8}{c}w_in^i - 2c\alpha\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}_{2P}}{dt} - \xi^2\left|\frac{d\boldsymbol{x}_{1P}}{dt}\right|^2 - \frac{4}{c^2}\xi wc\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}_{1P}}{dt} - \frac{q_{ij}}{c^2}(n^in^j)\,, \tag{29}$$

令 $\xi=\alpha=1$, 并把 (19) 式代入，我们可以解出

$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}_{2P}}{dt} = \frac{4w_in^i}{c^2} - \frac{1}{2c}\left|\frac{d\boldsymbol{x}_{1P}}{dt}\right|^2 + \frac{4w^2}{c^3} - \frac{q_{ij}}{2c^3}n^in^j\,. \tag{30}$$

根据对称无迹化的理论 $q_{ij}=q_{\langle ij\rangle}+\frac{1}{3}\delta_{ij}q$, $q_{\langle ij\rangle}$ 为张量 q_{ij} 的对称无迹部分，在太阳系的整体坐标系中 $q_{\langle ij\rangle}=0$. (29) 式中含 $\boldsymbol{x}_{1P}$ 的部分可由 (19) 式和 (21) 式求出. 在仅考虑太阳系的情况下，我们取 $q_{ij}=\frac{1}{3}\delta_{ij}q$, 将它代入 (29) 式即得

$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}_{2P}}{dt} = \frac{4w_in^i}{c^2} - \frac{1}{2c}\left|\frac{d\boldsymbol{x}_{1P}}{dt}\right|^2 + \frac{4w^2}{c^3} - \frac{q}{6c^3}\,. \tag{31}$$

把 (25)—(28) 式代入到 (23) 式中并把每部分考虑到 2PN 精度得

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = w_{,i}\left[2 - \frac{4w}{c^2} + \frac{2\xi}{c^2}c\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}_{1P}}{dt}\right] - 2\left(cn^i + \xi\frac{dx^i_{1P}}{dt}\right)\times\left(\frac{2w_{,j}n^j}{c} + \frac{w_{,t}}{c^2} - \frac{2w_{(j,k)}}{c^2}n^jn^k + \frac{2\xi w_{,j}}{c^2}\frac{dx^j_{1P}}{dt}\right) + \frac{8w_{[i,j]}n^j}{c} - \frac{q_{ij,k}}{c^2}n^jn^k + \frac{q_{jk,i}}{2c^2}n^jn^k\,.$$

把 (19) 式和 (26) 式代入，忽略掉高阶小量，令 $\xi=\alpha=1$ 并且取 $q_{ij}=\frac{1}{3}\delta_{ij}q$ 我们可以得到,

$$\frac{d^2x^i_{2P}}{dt^2} = -\frac{2}{c}w_{,t}n^i + \frac{4}{c}w_{(j,k)}n^in^jn^k + \frac{8}{c}w_{[i,j]}n^j - \frac{8}{c^2}ww_i - \frac{4}{c}(\frac{d\boldsymbol{x}_{1p}}{dt}\cdot\nabla w)n^i - \frac{4}{c}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla w)\frac{dx^i_{1p}}{dt} - \frac{1}{3c^2}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla q)n^i + \frac{1}{6c^2}q_{,i}\,.$$

方程 (30) 和方程 (31) 就是我们要求的 2PN 光线方程. 方程 (30) 和 (31) 联合方程 (19) 和 (21) 就可以讨论太阳系中 2PN 范围内的光线传播问题.

5 讨论

以上我们采用一套迭代的方法求出了 DSX 体系下太阳系中的 2PN 光线方程 (30) 和 (31). 方程中的标势 w 和矢势 w_i 的定义在 DSX 体系中是明确的 [11], 在此不再赘述, q 的解如前所述也已经知道, 方程所含的 1PN 部分作为 1PN 方程的结果也已知. 所以, 这套方程是可解的. 因此, 我们就可用它们来讨论 Mini-ASTROD 等天体测量计划中引力对光线传播的影响. 方程的具体求解可以采用数值积分的方法. 此外, 这种迭代的方法对于参数化二阶后牛顿光线方程的讨论也同样适用, 这样就可以讨论在一般引力理论中的 2PN 光线方程.

致谢 衷心感谢吴雪君教授和陶金河教授的有益讨论.

参 考 文 献

1 LISA study team. LISA: a Cornerstone Mission for the Observation of Gravitational Wave ESA System and Technology Study Report ESA-SCI. 2000
2 Perrman M A C, et al. A&A, 2001, 369: 339
3 Boden A, Unwin S, Shao M. Proc. ESA Symposium, 1997, 402: 789
4 Röser S, Bastian U, de Boer K S. Proc ESA Symposium, 1997, 402: 777
5 Ni W-T, et al. Int J Mod Phys D, 2002, 11: 947
6 Ni W-T, et al. Int J Mod Phys D, 2002, 11: 1035
7 XU Chong-Ming, WU Xue-Jun. Chin Phys Lett, 2003, 20: 195-198
8 Epstein R, Shapior I. Phys Rev D, 1980, 22: 2947
9 Richter G W, Matzner R A. Phys Rev D, 1982, 26: 1219
10 Will C. Theory and Experiment in Gravitational Physics. Cambridge University Press, 1981. 88-90. 143-144
11 Damour T, Soffel M, Xu C. Phys Rev D, 1991, 43: 3273
12 Damour T, Soffel M, Xu C. Phys Rev D, 1992, 45: 1017
13 Damour T, Soffel M, Xu C. Phys Rev D, 1993, 47: 3124
14 Damour T, Soffel M, Xu C. Phys Rev D, 1994, 49: 618
15 须重明, 吴雪君. 广义相对论与现代宇宙学. 南京: 南京师范大学出版社, 1999, 387-389

The Second-order Post-Newtonian Equations of Light Ray

GONG Yan-Xiang XU Chong-Ming
(*Department of Physics, Nanjing Normal University, Nanjing* 210097)

Abstract A series of space astrometric missions are proposed recently, in some of these projects the second-order contribution to light propagation in multiple systems should be considered, i.e., the second-order post-Newtonian(2PN) equations of light ray have to be discussed under the recent extension of the DSX scheme which was founded in early 1990's to discuss a complete first-order post-Newtonian(1PN) celestial mechanics for N arbitrarily composed and shaped, rotating deformable bodies. In this paper, the iterative method is taken to establish and calculate the 2PN equations of light ray. The 2PN equations of light ray in the solar system have been deduced from the metric tensor and Christoffel symbols. When the higher-order terms are neglected, the 2PN equations of light ray reduce to the 1PN equations which widely appeared in many textbooks. Using these equations light propagation in the solar system can be calculated.

Key words general relativity: second-order post-Newtonian approximation;equations of light ray