第 44 卷 第 4 期 天 文 学 报 Vol.44 No.4
2003 年 11 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Nov., 2003

一种适用于长弧段的初轨计算方法*

陆本魁 马静远 夏 益 张

(中国科学院紫金山天文台 南京 210008)

摘要 根据单位矢量法测轨原理，在人造卫星初轨计算的单位矢量法基础上，给出了一种适用于长弧段的初轨计算方法. 该方法既适用于长弧段，也适用于短弧段；适用于各种不同类型的观测资料和任意偏心率、任意轨道倾角的人造地球卫星；有利于提高初轨测定精度；并改善整个计算收敛性. 特别需要指出的是，该方法与有摄初轨计算的单位矢量法相结合，为单位矢量法从初轨计算推广到轨道改进打下了坚实的基础.

关键词 天体力学：初轨计算，单位矢量法，长弧段

中图分类号： P 135

1 引言

初始轨道计算，是人造地球卫星轨道测定的重要内容之一 [1]. 提高初始轨道测定精度，特别是轨道半长轴的测定精度，不仅有利于提高轨道改进的收敛性和收敛速度，而且对保证卫星下次过境预报精度起着关键性的作用.

无摄初轨计算的单位矢量法 (UVM1) 的使用结果表明 [2]: 该方法具有定轨精度高、适用范围广、稳定性能好、收敛速度快等显著优点. 但是， UVM1 有两个主要缺点：

(1) 在观测弧段比较长、资料精度比较高的情况下，即当摄动量级大于或接近资料误差量级时，使用相同弧段的资料， UVM1 的计算精度比微分轨道改进 (DOI) 的计算精度低；

(2) 在观测弧段比较长，例如资料首末时刻的地心张角 θ 大于 90° 时， UVM1 的计算不收敛.

为了克服第一个缺点，我们建立了有摄初轨计算的单位矢量法 (PUVM1)[3], 有效地解决了计算精度问题. 但是 PUVM1 和 UVM1 一样，都没有解决单圈长弧段 ($\theta > 90^\circ$) 以及多圈资料的迭代计算不收敛的根本问题.

本文为克服 UVM1 的第 2 个缺点，给出了一种既适用于长弧段，也适用于短弧段的改进的无摄初轨的单位矢量法 (UVM2). 计算结果表明，本方法是有效的.

2 原理

在二体问题中，我们有：

2002-11-01 收到

* 国家自然科学基金资助项目

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = f \cdot \boldsymbol{r}_0 + g \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_0 = \rho\boldsymbol{\rho}^* + \boldsymbol{R} \\ \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{f} \cdot \boldsymbol{r}_0 + \dot{g} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_0 = \dot{\rho}\boldsymbol{\rho}^* + \rho\dot{\boldsymbol{\rho}}^* + \dot{\boldsymbol{R}} \end{cases} . \tag{1}$$

已知, 任意时刻的卫星坐标 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 都是给定历元时刻 t_0 的轨道根数 σ_0 或坐标 $\boldsymbol{r}_0$ 和速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 的函数:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\left(\sigma_0, t\right) = \boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0, t\right) \\ \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}\left(\sigma_0, t\right) = \dot{\boldsymbol{r}}\left(\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0, t\right) \end{cases} . \tag{2}$$

我们把 $\boldsymbol{r}$ 对应的根数称为实测根数, 与观测资料相对应; 而把 $\boldsymbol{r}_c$ 对应的根数称为计算根数, 与观测资料的理论值相对应.

简单地, 我们可以把 $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_c$ 仅仅归结为 σ_0 或 $\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0$ 的误差引起的, 且假设 $\Delta\sigma_0$ 或 $\Delta\boldsymbol{r}_0$ 和 $\Delta\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 是小量, 故:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_c + \sum \frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial \sigma_0}\Delta\sigma_0 + \boldsymbol{v}\,, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是泰勒展开的余项. 这种对全部轨道根数进行展开, 截取到线性项的方法, 就是通常意义下的微分轨道改进 (DOI).

由于轨道半长轴 a(等价平均运动角速度 n) 可以从 $\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0$ 中分离出来:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_0 = a\boldsymbol{r}'_0 \\ \dot{\boldsymbol{r}}_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}\dot{\boldsymbol{r}}'_0 \\ \boldsymbol{r}'_0 = \boldsymbol{r}'\left(e, i, \Omega, \omega, M_0\right) \\ \dot{\boldsymbol{r}}'_0 = \dot{\boldsymbol{r}}'\left(e, i, \Omega, \omega, M_0\right) \end{cases} . \tag{4}$$

也由于提高 a 的测定精度是初轨计算的主要目标, 故我们仅对 a(即 n) 进行展开, 在二体运动条件下有:

$$f_1\boldsymbol{r}'_0 + g_1\dot{\boldsymbol{r}}'_0 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial n}\Delta n = \rho\boldsymbol{\rho}^* + \boldsymbol{R}\,. \tag{5}$$

这里

$$\boldsymbol{r}_c = \boldsymbol{r}_c\left(\boldsymbol{r}'_0, \dot{\boldsymbol{r}}'_0, n, t\right)\,, \quad f_1 = af\,, \quad g_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}g\,. \tag{6}$$

同样有

$$\dot{f}_1\boldsymbol{r}'_0 + \dot{g}_1\dot{\boldsymbol{r}}'_0 + \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial n}\Delta n = \dot{\rho}\boldsymbol{\rho}^* + \rho\dot{\boldsymbol{\rho}}^* + \dot{\boldsymbol{R}}\,. \tag{7}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_c = \dot{\boldsymbol{r}}_c\left(\boldsymbol{r}'_0, \dot{\boldsymbol{r}}'_0, n, t\right)\,, \quad \dot{f}_1 = a\dot{f}\,, \quad \dot{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\dot{g}\,. \tag{8}$$

将 (5) 式分别投影到 $\boldsymbol{\rho}^*, \boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{h}^*$ 上, 将 (7) 式投影到 $\boldsymbol{\rho}^*$ 上, 就可以得到改进的无摄单位矢量法 (UVM2) 的条件方程:

$$\begin{cases} f_1\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{r}'_0+g_1\boldsymbol{\rho}^*\cdot\dot{\boldsymbol{r}}'_0+\boldsymbol{\rho}^*\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_c}{\partial n}\Delta n=\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{R}+\rho \\ f_1\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{r}'_0+g_1\boldsymbol{A}^*\cdot\dot{\boldsymbol{r}}'_0+\boldsymbol{A}^*\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_c}{\partial n}\Delta n=\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{R} \\ f_1\boldsymbol{h}^*\cdot\boldsymbol{r}'_0+g_1\boldsymbol{h}^*\cdot\dot{\boldsymbol{r}}'_0+\boldsymbol{h}^*\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_c}{\partial n}\Delta n=\boldsymbol{h}^*\cdot\boldsymbol{R} \end{cases}. \tag{9}$$

$$\dot{f}_1\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{r}'_0+\dot{g}_1\boldsymbol{\rho}^*\cdot\dot{\boldsymbol{r}}'_0+\boldsymbol{\rho}^*\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial n}\Delta n=\boldsymbol{\rho}^*\cdot\dot{\boldsymbol{R}}+\dot{\rho}\,. \tag{10}$$

对测角资料，采用 (9) 式的 (2 、 3) 式；对三元素资料，采用 (9) 式；对四元素资料，采用 (9) 、 (10) 两式.

在解方程时，要注意到 $\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 满足活力公式

$$\frac{2}{r'_0}-\left|\dot{\boldsymbol{r}}'_0\right|^2=1\,. \tag{11}$$

我们将 (11) 式作为约束条件，利用条件最小二乘法求解 $\boldsymbol{r}'_0,\dot{\boldsymbol{r}}'_0$ 和 Δn. (9) 式和 (10) 式中的单位矢量按文 [1] 给出的公式计算：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}^*=\cos A\cosh\boldsymbol{\varphi}^*+\sin A\cosh\boldsymbol{S}^*+\sinh\boldsymbol{R}^* \\ \boldsymbol{A}^*=-\sin A\boldsymbol{\varphi}^*+\cos A\boldsymbol{S}^* \\ \boldsymbol{h}^*=-\cos A\sinh\boldsymbol{\varphi}^*-\sin A\sin h\boldsymbol{S}^*+\cosh\boldsymbol{R}^* \end{cases}. \tag{12}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}^*=\cos S\cos\varphi\cdot\boldsymbol{i}+\sin S\cos\varphi\cdot\boldsymbol{j}+\sin\varphi\cdot\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{S}^*=-\sin S\cdot\boldsymbol{i}+\cos S\cdot\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{\varphi}^*=-\cos S\sin\varphi\cdot\boldsymbol{i}-\sin S\sin\varphi\cdot\boldsymbol{j}+\cos\varphi\cdot\boldsymbol{k} \end{cases}. \tag{13}$$

$$S=S_G+\lambda\,,$$

式中的 λ,φ 为测站的地理经纬度和大地高， S_G 为 Greenwich 恒星时.

3　算例

为了验证本方法的特点，本文作者进行了大量的仿真计算和实测计算.

例 1 ：大偏心率卫星测轨采用中国卫星发射测控系统部实测的同圈内的四段四元素资料 (见表 1), 测距精度为 10 米，测角精度为 $43''.2$, 测速精度为 0.02 米 / 秒，比对标准采用多站多圈的轨道改进结果.

表 1　四段资料分布情况

Table 1　Information of four arcs

No.	Arc length (sec)	Span of real anomaly (deg)
1	80	4.13—11.18
2	280	59.82—73.58
3	893	135.03—140.60
4	229	169.34—169.87

表 2 采用了 UVM1 、 PUVM1 、 UVM2 等 3 种方法对第 1 段和第 2 段的单段进行了计算. 表 3 采用了 DOI 和 UVM2 两种方法 (UVM1 和 PUVM1 计算不收敛) 对前 3 段和前 4 段的多段数据进行了计算.

表 2 第 1 段和第 2 段的单段计算结果

Table 2 Results of orbit determination with single arc

Data	Arc 1			Arc 2		
Algorithm	UVM1	PUVM1	UVM2	UVM1	PUVM1	UVM2
Δa(km)	-16.865	-8.353	-15.653	-7.558	8.657	-5.475
Δe(10^{-3})	-0.241	-0.118	-0.197	0.074	0.235	0.037
Δi(deg.)	0.0095	0.0090	0.0089	-0.0163	-0.0171	-0.0162
$\Delta\Omega$(deg.)	0.1191	0.1190	0.1189	0.0991	0.0951	0.0990
$\Delta\omega$(deg.)	-0.0363	-0.0344	-0.0385	-0.0996	-0.0848	-0.1031
ΔM(deg.)	-0.0140	-0.0148	-0.0138	-0.0105	-0.0132	-0.0098
Span of true anomaly(deg)	4.13—11.18			59.82—73.58		

表 3 前 3 段和前 4 段的多段计算结果

Table 3 Solutions of orbit determination with multi-arcs

Data	Arc 1 to Arc 3		Arc 1 to Arc 4	
Algorithm	DOI	UVM2	DOI	UVM2
Δa(km)	22.083	-5.300	3.257	-1.665
Δe(10^{-3})	0.183	0.019	-0.049	0.167
Δi(deg.)	-0.0263	-0.0122	-0.0170	-0.0114
$\Delta\Omega$(deg.)	0.0501	0.1398	0.0258	0.1004
$\Delta\omega$(deg.)	-0.0179	-0.1213	-0.0102	0.1191
ΔM(deg.)	-0.0129	-0.0123	-0.0083	-0.0111
Span of true anomaly(deg)	4.13—140.60		4.13—169.87	

例 2: 利用一小偏心率卫星:

$$a = 6600.000\,km \quad i = 48^\circ.223 \quad \Omega = 351^\circ.649$$

$$\xi = -0.000126 \quad \eta = -0.000872 \quad \lambda = 113^\circ.207$$

的三元素模拟观测资料: 测距精度 10 米, 测角精度 42 角秒. 表 4 给出了分别采用 UVM1 、PUVM1 和 UVM2 等 3 种方法用 50 组模拟资料计算的外符合误差的均方根值.

例 3: 利用二元素数据, 其中小偏心率卫星观测采用的是中国科学院人卫目视观测网的实测资料, 测角精度为 3 角分; 中偏心率卫星采用芬兰赫尔辛基气象台测量 1963—30 D($e = 0.3$) 的实测数据, 测角精度为 6 角分. 表 5 给出了 5 个计算实例. 由于对初轨计算, 轨道半长轴是最难测准的, 也是最重要的, 因此表中仅列出了轨道半长轴的外符合误差 (单位: 千米).

表 4　小偏心率卫星三元素模拟计算结果

Table 4　Results of simulation with range and angle data of near-circular orbit

Data	Arc 1 to Arc 3		Arc 1 to Arc 4			
Algorithm	DOI	UVM2	DOI	UVM2		
Arc length		2 min			7 min	
Algorithm	UVM1	PUVM1	UVM2	UVM1	PUVM1	UVM2
σa(km)	0.459	0.311	0.434	0.243	0.079	0.235
$\sigma i(10^{-3}$deg.)	1.538	1.483	1.537	0.945	0.470	0.944
$\sigma\Omega(10^{-3}$deg.)	2.922	2.770	2.917	1.234	1.244	1.235
$\sigma\xi(10^{-5})$	8.514	6.985	8.240	4.764	1.767	4.720
$\sigma\eta(10^{-5})$	2.978	2.412	3.006	1.472	1.228	1.357
$\sigma\lambda(10^{-3}$deg.)	8.272	7.585	8.093	5.552	2.521	5.528
Data rate		2 sec			7 sec	

表 5　二元素资料实测计算结果

Table 5　Results of orbit determination with angles-only data

Eccentricity	Arc Length	No. of obs.	UVM1	PUVM1	UVM2
< 0.1	9 m	47	49.927	39.574	29.726
< 0.1	4 m	15	98.144	86.089	70.732
< 0.1	6 m 28 s	20	18.805	−8.957	6.558
< 0.1	6 m 11 s	32	−58.915	−46.488	−16.645
~ 0.3	9 m 45 s	17	Failure	Failure	14.173

4　分析

由上述计算结果可见， UVM2 是一种有效的初轨计算方法. 它的最大优点是不仅适用于短弧段，而且也适用于长弧段，克服了 UVM1 和 PUVM1 以及各种经典的初轨计算方法对长弧段计算不收敛的缺点.

在用 UVM1 、 PUVM1 和 UVM2 方法进行初轨计算都收敛的情况下， UVM2 的计算精度一般总是优于 UVM1 ；与 PUVM1 相比，则视摄动影响大小和资料精度而异.

UVM2 对于相邻两圈资料，甚至相邻两天的多圈资料也可以进行计算，但是由于没有考虑摄动，故尽管计算收敛，但弧段越长，计算精度越低. 这一现象给作者有益的启示，即结合 UVM2 和 PUVM1 两者的优点，建立一种改进的有摄单位矢量法 (PUVM2)，既适用于单圈的初轨计算，也适用于多圈轨道改进. 这是作者下一步计划开展的研究工作.

参 考 文 献

1　易照华. 天体力学引论. 上海：科学出版社， 1978

2　陆本魁，戎鹏志，吴建民，等. 宇航学报， 1997, 18(2): 1-7

3　陆本魁，李剑峰，马静远，等. 宇航学报， 1999, 20(1): 14-20

A Method of Initial Orbit Determination for Long Arc

LU Ben-Kui MA Jing-Yuan XIA Yi ZHANG Yang
(*Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing* 210008)

Abstract A method of initial orbit determination is presented for long arc, according to the principle of Unit-Vector-Method(UVM). This method is applicable to not only long arc, but also short. It's suitable to the orbit of any eccentricity and any inclination. In addition, it is beneficial to improve accuracy of orbit determination and convergency of algorithm. Especially, this method makes it possible that UVM is applicable to orbit improvement.

Key words celestial mechanics: initial orbit determination, Unit Vector Method, long arc