第 44 卷 第 4 期 天 文 学 报 Vol.44 No.4
2003 年 11 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Nov., 2003

MOND 理论和暗物质模型的检验*

张 杨[1] 赵 文[1] 韩金林[2]

(1 中国科学技术大学天体物理中心 合肥 230026)
(2 中国科学院国家天文台 北京 100012)

摘要 从理论上探讨在地球引力系统内，修正动力学的引力理论以及暗物质模型的预言. 着重研究修正动力学（ MOND ）的引力理论中一些常用的模型，对其中一个最简单模型，给出了球对称情况下引力势的一般表达式，计算了地球引力场中这些模型预言的卫星角速度，发现不同模型给出的角速度是不相同的，并且将这些值分别与牛顿理论的角速度值相比较. 虽然这些模型的角速度与牛顿理论角速度的差异都很小，但简单模型的差异更大一些. 对于月球作为卫星的情况，目前的技术有可能对这个角速度差进行实际观测. 最后估算暗物质模型中月球绕地球运动角速度所受到的影响，证明它远远小于 MOND 理论的效应. 由此对这个角速度差的观测，就构成检验 MOND 理论与暗物质模型的一个判据.

关键词 引力理论，暗物质
中图分类号： P 12

1 引言

众所周知，作为广义相对论的弱场近似，经典的牛顿引力理论在解释旋涡星系的旋转曲线时遇到很大困难. 例如，对于旋涡星系而言，观测到的旋转速度 v 对于径向距离 r 的旋转曲线，并没有牛顿动力学理论所预期的开普勒下降区域，而是一条延伸的平直曲线；对于星系团而言，通过在牛顿理论中动力学方法推测到的星系团维里质量，远大于由星系团的光度所估算出的质量 [1−5]，通常的暗物质模型对于这些问题的回答是 [6−9]，牛顿动力学仍然成立，但是需要设想在宇宙中存在某种大量的弥散的暗物质，在星系和星系团周围形成暗物质晕，其空间分布的尺度可以是星系发光区域尺度好几倍的大小，并且假设这种暗物质的粒子只参与引力相互作用，其存在只能通过引力效应来探测. 通过暗物质在空间的适当分布，就可以解释上述平直转动曲线. 另外一种可能性是，在星系附近并不存在所谓看不见的暗物质，而是牛顿理论本身在星系的尺度上就不成立，即引力行为可能是偏离广义相对论的. 有许多研究工作讨论了这后一种可能性，例如，其中讨论得最详细的是 20 世纪 80 年代 Milgrom 等人提出的修正牛顿动力学理论 (Modified Newtonian Dynamics, 简记为 MOND)[10−15]. 该理论通过修正牛顿第二定律或者牛顿引力理论，不需要引入暗物质，也可以很好地解释星系的旋转曲线. 目前就观测而言，这两

2003-01-07 收到原稿， 2003-05-19 收到修改稿
* 国家自然科学基金 (10173008) 和 973 计划资助项目

个理论在星系以及星系团的尺度上尚无法进行区别，即两种理论是简并的．迄今为止，对于 MOND 理论的观测效应的研究都是在很大尺度的天体中进行的，例如星系等．我们想探讨在较小尺度的地球引力系统中能否直接观测该理论的效应，并且与暗物质的效应相比较．如果能够实际测量出这种影响，并且区分两种理论，这对于引力理论以及天文学都具有重要意义．随着测时技术的不断发展，时间测量的精度大大提高，使得测量各种微小的效应变得可能了．目前铯原子时钟的稳定度已经达到 $10^{-15}\,\mathrm{s}$, 而目前正在进行研究的原子干涉的测时方法 [16,17], 预计在未来的几年内可以使测时的精度达到 $4\times10^{-17}/\mathrm{s}$. 这使得我们讨论的效应在不久的将来可能直接测量.

2 MOND 理论中的运动方程

如前所述, 牛顿动力学理论直接应用于旋涡星系时会产生困难. 暗物质模型需要假设某种暗物质的存在以解决这些困难. 到目前为止支持暗物质的证据都是间接的. 而 MOND 理论认为 [10−15], 不需要引入暗物质模型，牛顿动力学理论仅仅在大加速度 $a\gg a_0$ 的极限下成立，而在小加速度 $a\ll a_0$ 的极限下不成立，即在大尺度上牛顿动力学理论需要修正, 这里标志这一转换的常数加速度 $a_0\approx2\times10^{-8}(H_0/50\,\mathrm{km\ s^{-1}Mpc^{-1}})\mathrm{cm\cdot s^{-2}}$, 是由拟合星系旋转曲线观测数据得到的一个参数， H_0 是宇宙学中的哈勃常数．目前研究 MOND 理论的引力效应，都是对很大尺度的星系以及星系团进行的，而且它与暗物质模型都同样好地能够解释星系转动曲线以及其他观测现象．我们之所以来讨论 MOND 理论是因为下列考虑：在目前的文献中，还没有研究将 MOND 理论应用于地球引力系统，并讨论其具体的实际观测；另外，目前的研究尚未对 MOND 理论已有的不同模型进行区别，尚未指出它们观测上可能的差异；更重要的是，正如本文将要证明的，对于地球引力系统，暗物质与 MOND 理论的效应是不同的．具体说来， MOND 理论所预言的效应是不可忽略的，且按未来的测时技术水平，是有可能进行实际观测的，而在地球系统中暗物质的效应是极其微小的．这对于检验 MOND 理论和暗物质模型具有重要的意义．下面简单介绍 MOND 理论的运动方程．按最一般形式的 MOND 理论，或者牛顿引力理论 (引力的反平方律) 需要修改，或者牛顿力学中的第二定律需要修改，或者这两者同时需要修改．实际上，当引力场存在时，前两个方案是等价的．这里我们不去详细研究如何修改引力理论或者修改动力学理论的技术细节，只是讨论能否通过地球引力系统中的分析，来区别通常的暗物质模型与 MOND 理论．按通常的牛顿引力理论，一个检验粒子在引力场中获得的加速度等于引力加速度 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}_N$. 而根据 MOND 理论，一个单位质量的检验粒子在给定引力场中获得的加速度 $\boldsymbol{a}$, 由下列动力学方程给出：

$$\mu(a/a_0)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}_N\,, \tag{1}$$

其中 a_0 即是 MOND 理论的常数加速度， $\boldsymbol{g}_N$ 是通常的牛顿引力理论所给出的引力加速度，对于总质量 M 产生的球对称引力场情况 $\boldsymbol{g}_N=-(GM\boldsymbol{r}/r^3)$. 而函数 $\mu(x)$ 正是 MOND 理论与牛顿理论不同的地方．由于 MOND 理论结构的研究还没有像广义相对论那样成熟，原则上函数 $\mu(x)$ 可以有许多种表达式，例如一类表达式可以表述为：

$$\mu(x) = x(1+x^n)^{-1/n}\,, \tag{2}$$

这里 n 是任意正数. 文献中常用的是 $n=1$ 和 $n=2$ 的形式:

$$\mu(x) = x(1+x)^{-1}\,, \tag{3}$$

$$\mu(x) = x(1+x^2)^{-1/2}\,. \tag{4}$$

在 $x \gg 1$ 的极限下, (2)—(4) 式都有 $\mu(x) \approx 1$, MOND 理论就回到牛顿理论; 而在 $x \ll 1$ 的极限下, (2)—(4) 式都有 $\mu(x) \approx x$, MOND 理论明显偏离牛顿理论. 但是, 除了这两种极限情况之外, 不同 n 值对应的函数 $\mu(x)$ 所给出的方程 (1) 是不同的, 我们下面将展示, 其物理预言的差异. 对于 MOND 理论中最简单的 $n=1$ 情况的 (3) 式, 我们将它带入 (1) 中, 解得加速度 $a/a_0 = (g_N/a_0 + \sqrt{(g_N/a_0)^2 + g_N/a_0})/2$. 这里 $g_N = GM/r^2$. 再利用加速度与等效引力势 φ 之间的关系式: $\boldsymbol{a} = -\nabla\varphi$, 直接在径向积分, 得到球对称情况下等效引力势 j 的一般表达式:

$$\varphi(r) = -GM/2r - GM\sqrt{(1+4a_0/g_N)}/2r + \sqrt{(a_0/GM)}\ln(\sqrt{(a_0/g_N)} + \sqrt{(1+4a_0/g_N)}) + c\,. \tag{5}$$

其中 c 为积分常数. 当 $a_0/g_N \ll 1$ 的时候, (5) 式回到通常的牛顿引力势, 即 $\varphi(r) \approx -GM/r$; 当 $a_0/g_N \gg 1$ 时, $\varphi(r) \approx (MGa_0)^{1/2}\ln(r/r_0)$, 其中 r_0 是任意径向距离, 这正好是 Milgrom 给出的极限公式 [10], 假如 MOND 理论可以像广义相对论一样, 用度规表示引力场, 那么就能利用所得到的 $\varphi(r)$ 来计算走时差, 等等. 这里我们不准备详细讨论这个问题.

3　MOND 理论中的卫星运动

我们把 MOND 理论的运动方程 (1) 式, 应用于地球尺度的引力系统, 给出其理论预言, 研究能否观测其效应. 具体地, 按照公式 (1), 首先计算地球卫星的旋转角速度的理论值, 再与按照牛顿理论所计算的结果进行比较. 我们分别对 $n=1$ 和 $n=2$ 的两种模型 (3) 式和 (4) 式进行计算. 将质量为 M 的地球视为球对称的引力源. 首先考虑有一个卫星到地心的距离为 r, 围绕地球作圆周运动. 把 (3) 式和 (4) 式带入 (1) 式中, 分别得到:

$$a = \frac{g_N}{2} + \frac{g_N}{2}\sqrt{1+4a_0/g_N}\,, \tag{6}$$

$$a = \frac{g_N}{2}\sqrt{1+\sqrt{1+4a_0^2/g_N^2}}\,. \tag{7}$$

在上面两式中 a_0 项是 MOND 理论的修正项. 取地球半径 $r = 6.4\times10^3\,\mathrm{km}$, 得 $a_0/g_N \ll 1$, 可见对地球 – 卫星系统, MOND 理论与牛顿理论的差别很小, 把 a_0/g_N 视为小变量,

分别对 (6) 式和 (7) 式做 Taylor 展开，各自保留到其 a_0/g_N 的最低阶：

$$a = g_N(1 + a_0/g_N)\,, \tag{8}$$

$$a = g_N(1 + a_0^2/2g_N^2)\,. \tag{9}$$

(8) 式和 (9) 式给出的加速度表达式所含修正项的是小量 a_0/g_N 的不同幂次. 根据运动学公式，卫星的向心加速度 $a = \omega^2 r$, 其中 ω 是卫星的角速度，代入 (8) 式和 (9) 式，保留到各自的最低阶，分别得到 MOND 理论 $n = 1$ 和 $n = 2$ 两种模型的角速度表达式：

$$\omega = \omega_0(1 + a_0 r^2/2GM)\,, \tag{10}$$

$$\omega = \omega_0(1 + (a_0 r^2/2GM)^2)\,, \tag{11}$$

其中 ω_0 为牛顿引力理论给出的角速度 $\omega_0 = (GM/r^3)^{1/2}$. (10) 和 (11) 式可以写为：

$$(\omega - \omega_0)/\omega_0 = a_0 r^2/2GM\,, \tag{12}$$

$$(\omega - \omega_0)/\omega_0 = (a_0 r^2/2GM)^2\,. \tag{13}$$

由此得到 $n = 1$ 和 $n = 2$ 两种模型与牛顿理论的角速度差明显表达式. 对于 n 取任意值的一般模型 (2) 式，按上面的推导方法可以得到：

$$(\omega - \omega_0)/\omega_0 = (a_0 r^2/2GM)^n/2n\,. \tag{14}$$

可见 n 越大，角速度差越小. 另外，所涉及的卫星轨道半径 r 愈大，角速度差就愈大. 这正是 MOND 理论的特点，即在大尺度上它与牛顿理论差别明显.

把人造卫星的轨道半径 r 和地球质量 M 的值, 代入 (12) 式右边, 得到 $(\omega-\omega_0)/\omega_0 \approx 10^{-11}$, 代入 (13) 式得 $(\omega-\omega_0)/\omega_0 \approx 10^{-21}$; 代入 $n > 2$ 模型 (14) 式，得到 $(\omega-\omega_0)/\omega_0 \approx 10^{-11n}/n$, 只有 $n = 1$ 模型的角速度差值最大, 其他模型的值分别依次减小一个因子 10^{-11}. 由 (12) 式可见，为了提高角速度差，需要增大 r 的值，可以考虑月亮作为地球的卫星，绕地球近似地作圆周运动. 月亮到地球的距离值为 $r = 3.8 \times 10^5$ km, 分别代入 (12) 式和 (13) 式，可得 MOND 理论与牛顿理论的月球角速度差，我们将其转化为等价的周期差，

$$(T_0 - T)/T_0 = 3.5 \times 10^{-8}\,, \tag{15}$$

$$(T_0 - T)/T_0 = 1.2 \times 10^{-15}\,. \tag{16}$$

这两个数值都是很小的，分别相当于月球公转一个周期有 10^{-3}s 或者 10^{-10}s 的差异. 目前对月球角速度实际测量的精度达到 10^{-9}s 的水平 [18]. (15) 式的周期差是最大的，已在测量技术的能力范围之内，有可能直接测量. (16) 式的周期差远远小于测量精度范围.

对 $n>2$ 模型，周期差将变得更小. 因此，只要 MOND 理论取 n 足够大的模型，即使观测不到这种周期差，也不能否定 MOND 理论. 但是，我们在得到 (12) 和 (13) 式时，已经假定 M 和 r 是精确值，而实际上它们本身就有误差. 至于在实际测量中存在的大量环境影响问题和技术问题不是本文所要讨论的. 我们设想随着空间原子钟测时技术的提高 [16,17], 在可见的未来，有可能进行实际观测. 假如在观测精度内没有观测到这个频率差，那么仍然不能否定 MOND 理论中 $n>1$ 的模型，同时暗物质也仍然是有生命力的模型. 假如实际观测到了频率差，那么暗物质模型就有困难了，而 MOND 理论就非常值得研究的.

4　暗物质模型对地球 – 月亮系统的影响

众所周知，暗物质的存在至今仍然是一个理论上的假设，人们尚未直接观测到暗物质的粒子. 所以暗物质模型与前面讨论的 MOND 理论目前的地位一样，都还是理论模型，有待进一步的观测来检验. 支持宇宙暗物质存在的证据主要是旋涡星系转动曲线的观测结果、星系团的质光比 [20,21] 、椭圆星系中心核的质光比 [22] 、在银河盘面中太阳系邻近区域的质光比 [23] 以及宇宙大尺度结构形成理论的需要 [24]. 由此可见，如果宇宙暗物质确实是存在的，那么它将广泛地存在于各类宇宙天体附近，尤其是银河系附近也将存在, 因而在地球附近也应当存在暗物质. 但是可以预计, 地球附近分布的暗物质是非常稀薄的. 我们仅从理论上来分析，能否在地球上直接地观测出地球附近存在的暗物质. 按照现行的暗物质模型，暗物质能量密度的空间分布是尚未确定的，这是目前研究的热点问题. 我们采用其中一个较简单的模型，设银河系暗物质晕的能量密度 ρ 有如下分布 [25]:

$$\rho(r)=\rho_0\frac{r_2^2+b^2}{r^2+b^2}\,, \tag{17}$$

其中 r 是到银心的半径，参数 $r_2\approx 8.5\,\mathrm{Kpc}$ 是地球到银心的距离， $b\approx 50\,\mathrm{Kpc}$ 是银晕的半径， ρ_0 是太阳系附近暗物质的能量密度，由已有的天文观测数据可推得 $\rho_0=7.1\times10^{-25}\,\mathrm{g\,cm^3}$. 这里我们在牛顿引力理论的框架内，具体地讨论地球 — 月球引力系统，估算暗物质对月球绕地球的运动轨道的影响. 虽然作为一个模型 (17) 式可以大致地表示银河内部暗物质整体的分布，但是我们并不知道地球附近局部的暗物质的空间分布情况. 根据物理上的猜测，由于暗物质受到了地球引力的吸引作用，在地球附近分布的暗物质的密度要大于离地球较远的空间中暗物质的密度，而且可能是球对称的. 为简化起见，我们把分布于地球附近的暗物质的能量密度取为常数 ρ_d. 按照牛顿力学理论，月球所受到的暗物质的引力等价于将轨道所在球面内的全部暗物质置于地心所产生的引力. 于是月球的运动方程

$$m_m\omega_1^2 r_1=Gm_m(M+4\pi_1^3\rho_d/3)/r_1^2\,, \tag{18}$$

其中 m_m 、 M 和 r_1 分别是月球的质量、地球的质量和月球至地心的距离； ω_1 为月球绕地球转动的角速度，由 (18) 式可见，暗物质的引力效应是叠加在地球的引力效应上的，

等价于地球质量的一个小增量 $4\pi r_1^3\rho_d/3$. 这个增量的大小取决于地球附近暗物质的密度 ρ_d. 若取其值为 (17) 式下面所给出的 $\rho_d=\rho_0$, 则小增量 $4\pi r_1^3\rho_d/3\approx 10^{-21}M$, 是极其微小的. 即使假设 ρ_d 比 ρ_0 大几个量级, 也不可能有观测效应. 总之在球对称分布的情况下, 暗物质的引力效应与地球的引力效应是难以区别的. 如果地球附近暗物质的分布不是球对称, 那么暗物质对于月球运动轨道上不同点的引力作用是不同的, 月球在轨道上的运动有变化. 例如考虑 (17) 式的暗物质密度分布, 对于地球来说是不对称的, 如在月球的轨道上, 靠向银心的一侧密度高, 而在向外一侧密度低. 然而相对于银河系尺度 (10 kpc) 来说, 月球绕地球的轨道尺度太小, 两侧密度的差异 $\triangle\rho/\rho$ 仅为 10^{-17}, 再由于地球附近暗物质密度 ρ 实在太小, 因此 $\triangle\rho$ 对于月球运动的影响微乎其微, 目前仍然无法探测到. 重要的是, 这个效应远远地小于 MOND 模型 (10) 式和 (11) 式对月球轨道角动量的修正. 即使在可见的将来, 这个暗物质的效应在地球上也不能直接观测到. 除非我们假设地球附近暗物质的密度大于银河系的平均暗物质密度的许多量级, 而且其分布非常不对称, 否则地球附近的暗物质是没有观测效应的. 当然, 这种讨论是非常理想化的, 尚未考虑到其他实际因素的影响, 如地球 - 月球之间的其他气体的存在, 地面和月球表面的随机震动, 等等. 总之, 我们认为, 对于地球引力系统, 暗物质的效应是完全可以忽略, 而 MOND 理论的 $n=1$ 模型的效应是不可忽略的. 这就提供了一个新的观测判据, 以区别暗物质模型与 MOND 理论. 这对天文学的研究和发展新的引力理论, 都具有十分重要的意义.

5 结论

对于地球引力系统, MOND 理论预言的卫星绕地球的角速度, 与牛顿理论所预言的角速度有微小的差异, 而且 MOND 理论中不同模型所给出的角速度也不相等. 其中最简单的 $n=1$ 模型所预言的角速度差异最大, 其量级为 $(\omega-\omega_0)/\omega_0\approx a_0r^2/2\,\mathrm{GM}$. 对于月球绕地球转动, 这个差异值 10^{-11}, 落在目前测时水平的范围内, 有可能进行实际观测. 其他模型所给出的角速度差异都是 $a_0r^2/2GM$ 的高阶幂次, 不可能进行实际测量. 这就构成了区别 MOND 理论中不同模型的一个观测判据. 另外, 本文对于可能存在于地球引力系统中的暗物质进行了估算, 证明暗物质对于卫星角速度的影响非常微小, 远低于 MOND 的理论的效应, 是目前测量技术无法观测到的. 这就给出了在地球引力系统内区别 MOND 理论与暗物质模型的一个新观测判据. 如果将来能够实际地观测这种效应, 这对天文学和引力理论研究的意义是不言而喻的.

参 考 文 献

1 Oort J H. ApJ, 1940, 91: 273
2 Faber S M, Gallagher J S. Ann Rev Astron Astrophys, 1979, 17: 135
3 Binney J. Ann Rev Astron Astrophys, 1982, 20: 399
4 Rubin V C, Burstein D, Ford W K, et al. ApJ., 1985, 289: 81
5 Sofue Y, Robin V. Ann Rev Astron Astrophys, 2001, 39: 137
6 Zwicky F, Helvetica Physica Acta, 1933, 6: 110

7 Ostriker J P, Peebles P J E, Yahil A. ApJ, 1971, 193: L1
8 Einasto J, Kaasik A, Saar E. Nat, 1974, 250: 309
9 Trimble V. Ann Rev Astron Astrophys, 1987, 25: 425
10 Milgrom M. ApJ, 1983, 270: 365, 371, 384; ApJ, 1984, 287:571; ApJ, 1986, 302: 617
11 Bekenstein J, Milgrom M. ApJ, 1984, 286: 7
12 Sanders R H. ApJ, 1996, 473: 117; ApJ, 1997, 480: 492; A&AR, 1990, 2: 1
13 Begeman K G, Broeil A H, Sanders R H. MNRAS, 1991, 249: 523
14 Sanders R H, Verheijen M A W. ApJ, 1998, 503: 97
15 de Blok W J G, Mcgaugh S S. ApJ, 1998, 508: 132
16 Wilpers G, et al. ArXiv:physics/0205049
17 Borde C J. Comptes Rendus IV Physique Astrophysique, 2001, 2: 509
18 Cox A N. Allen' Astrophysical Quantities (AIP Press, Springer, 4th Edition), 2000
19 Freeman K C. ApJ, 1970, 160: 881
20 Zwicky F. Helvetica Phyisica Acta, 1933, 6: 110
21 Smith S. ApJ, 1936, 83: 23
22 Lauer T R. ApJ, 1985, 292: 104
23 Bahcall J N. ApJ, 1984, 276: 169; ApJ, 1984, 287: 926
24 Blumenthal G R, Faber S M, Primack J R, et al. Nat, 1984,311:517
25 Kamionkowski M. Dark Matter, Second Int Conf in Astro and Particle Physics(Heidelberg), 1998

A Test of MOND Theory and the Model of Daek Matter

ZHANG Yang[1] ZHAO Wen[1] HAN Jin-Lin[2]
(1 *Centre for Astrophysics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026)
(2 *National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100012)

Abstract It is to search for possible detections of the gravitational effects of two different theories of gravity and the effects of the dark matter model within the Earth system. First, as the main subject, it studies the MOND theory and apply to the Earth system. On calculating the angular velocity of a satellite circling around the Earth, it finds that the angular velocity predicted by the MOND differs from that predicted by the conventional Newtonian theory, and the fractional difference is of order of $10-8$or$10-15$, which is still within the range of modern technology of time-measurement. Finally the possible influences on the angular velocity of the Moon within the dark matter model are studied and found that effects are negligibly tiny. Thus it comes to a new criterion to distinguish the conventional dark matter model and the MOND theory. If the observation can be really carried out, it would be of great significance to the study of gravity.

Key words Gravitational Theories, Dark Matter