第 46 卷 第 1 期 天 文 学 报 Vol.46 No.1
2005 年 1 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Jan., 2005

有摄圆型限制性三体问题平动点稳定的充要条件及应用*

舒斯会 [1,2,3] 陆本魁 [1,2] 陈务深 [1,2,4] 刘福窑 [1,2]

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210008)
(2 中国科学院国家天文台 北京 100012)
(3 江西科技师范学院 南昌 330013)
(4 南京工业大学 南京 210027)

摘要 给出了一个判断有摄圆型限制性三体问题平动点稳定性的充要条件. 该条件只依赖于平动点变分方程的特征方程系数的一个简单关系, 使用很方便. 用所得到的条件, 讨论了任意外力摄动对经典圆型限制性三体问题三角平动点稳定性的影响和惯性阻力摄动对 Robe 圆型限制性三体问题主要平动点的稳定性的影响.

关键词 天体力学: 限制性三体问题, 平动点, 稳定性
中图分类号: P 132; **文献标识码**: A

1 引言

无摄经典 (Robe) 圆型限制性三体问题和摄动力只与位置分量 x, y 有关, 与速度分量 $\dot{x}, \dot{y}$ 无关的有摄经典 (Robe) 圆型限制性三体问题的平动点变分方程的特征方程的形式为 $\lambda^4 + a_2\lambda^2 + a_0 = 0$ [1−5], 则平动点线性稳定域 (不考虑域的边界) 由其变分方程的特征方程系数不等式 $a_2, a_0 > 0, a_2^2 - 4a_0 > 0$ 来决定, 且平动点不渐近稳定. 而摄动力与速度分量 $\dot{x}, \dot{y}$ 有关的有摄经典 (Robe) 圆型限制性三体问题平动点变分方程的特征方程为更一般的形式 $\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$[6−10], 若 $a_1 = a_3 = 0$, 与无摄情况一样, 容易讨论, 若 a_1, a_3 不全为零, 从文 [6-10] 中可以看出, 这种情况下的平动点稳定性的讨论较为复杂, 在文 [11,12] 中作者给出了一些简单、实用的此类问题的平动点稳定性判断条件, 但都是充分条件, 在这里我们进一步给出一个简单、实用的平动点线性 (渐近) 稳定性的充要条件, 主要结果为: 若平动点的变分方程的特征方程为 $\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ (a_1, a_3 不全为零) 且 $a_2 > 0$, $a_0 \neq 0$, 则平动点线性 (渐近) 稳定的充要条件是 $a_3, a_1 > 0, a_0 > 0$ 且 $a_0 \leq a_2\beta - \beta^2$ ($a_0 < a_2\beta - \beta^2$), 其中 $\beta = \frac{a_1}{a_3}$. 为研究有摄圆型限制性三体问题平动点的线性 (渐近) 稳定性提供了一个有效的方法.

2004-03-10 收到原稿, 2004-06-29 收到修改稿
* 国家自然科学基金和江西科技师范学院科研资助项目

2 有摄圆型限制性三体问题平动点变分方程的特征方程

在无量纲会合坐标系下 [8], 受任意外力摄动的经典 (Robe) 圆型限制性三体问题第三体的平面运动方程为:

$$\begin{aligned} \ddot{x}-2\dot{y} &= \frac{\partial V}{\partial x}+F_x \\ \ddot{y}+2\dot{x} &= \frac{\partial V}{\partial y}+F_y \end{aligned}\quad , \tag{1}$$

这里 V 表示系统的势能函数, $F=(F_x,F_y)$ 为摄动力, 其中 F_x,F_y 一般是位置分量 x,y 和速度分量 $\dot{x},\dot{y}$ 的函数且不显含时间 t, $|F|=O(k)$, k 为一小量. 方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}+F_x &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y}+F_y &= 0 \end{aligned}\quad , \tag{2}$$

的解 (x_0,y_0) 称为系统 (1) 的平动点. 则其变分方程的特征方程为:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix} -F^0_{x\dot{x}} & -2-F^0_{x\dot{y}} \\ 2-F^0_{y\dot{x}} & F^0_{y\dot{y}} \end{pmatrix}\lambda-\begin{pmatrix} V^0_{xx}+F^0_{xx} & V^0_{xy}+F^0_{xy} \\ V^0_{yx}+F^0_{yx} & V^0_{yy}+F^0_{yy} \end{pmatrix}\right|=0\,, \tag{3}$$

这里 $F^0_{XY}=\left[\dfrac{\partial F_X}{\partial Y}\right]^0$; $V^0_{XY}=\left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial X\partial Y}\right]^0$; $X,Y=(x,y,\dot{x},\dot{y})$, 上标 0 表示在 $(x,y,\dot{x},\dot{y})=(x_0,y_0,0,0)$ 处的值.

3 有摄圆型限制性三体问题平动点稳定的充要条件

受任意外力摄动的圆型限制性三体问题平动点变分方程的特征方程 (3) 的形式表示为

$$\lambda^4+a_3\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0\,, \tag{4}$$

由文 [11] 知方程 (4) 可表为

$$(\lambda^2+k_1\lambda+k_2)(\lambda^2+k_3\lambda+k_4)=0\,, \tag{5}$$

其中 k_4,k_3,k_2,k_1 是实数, 且

$$k_1+k_3=a_3\,, \tag{6}$$

$$k_2+k_4+k_1k_3=a_2\,, \tag{7}$$

$$k_1k_4 + k_2k_3 = a_1\,, \tag{8}$$

$$k_2k_4 = a_0\,, \tag{9}$$

以下不妨假设 $k_4 \geq k_2$, 由 (7) 式、 (9) 式和韦达定理得

$$k_4 = \frac{a_2 - k_1k_3 + \sqrt{(a_2 - k_1k_3)^2 - 4a_0}}{2}\,,$$

$$k_2 = \frac{a_2 - k_1k_3 - \sqrt{(a_2 - k_1k_3)^2 - 4a_0}}{2},$$

又函数 $f(x) = \frac{a_2+x-\sqrt{(a_2+x)^2-4a_0}}{2}$, 当 $a_2 + x > 0$, $a_0 > 0$ 时有 $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 是严格单调递减. 因此, 当 $a_2 - k_1k_3 > 0$, $a_0 > 0$ 且 $k_1k_3 \geq 0$ 时有

$$k_2 = \frac{a_2 - k_1k_3 - \sqrt{(a_2 - k_1k_3)^2 - 4a_0}}{2} \geq \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}{2}\,, \tag{10}$$

当 $a_2 - k_1k_3 > 0$, $a_0 > 0$ 且 $k_1k_3 < 0$ 时有

$$k_2 = \frac{a_2 - k_1k_3 - \sqrt{(a_2 - k_1k_3)^2 - 4a_0}}{2} < \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}{2}\,, \tag{11}$$

若 $a_3 \neq 0$, 由 (6) 式代入 (8) 式整理得:

$$k_1(k_4 - k_2) = (\beta - k_2)a_3\,, \tag{12}$$

$$k_3(k_4 - k_2) = (k_4 - \beta)a_3\,. \tag{13}$$

这里 $\beta = \dfrac{a_1}{a_3}$.

下面给出几个结论:

(结论 1)[11]: 如果方程 (4) 的系数满足 $a_3, a_2, a_1 > 0, a_0 > 0$, 则 k_2 和 k_4 为正数.

(结论 2): 如果方程 (4) 的系数满足 $a_3, a_2, a_1 > 0, a_0 > 0$, 则 k_1 和 k_3 非负的充要条件是 $\dfrac{a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}{2} \geq \beta \geq \dfrac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}{2}$(或 $a_0 \leq a_2\beta - \beta^2$).

必要性的证明: 若 k_1 和 k_3 非负, 由 (6) 式得 $k_1, k_3 \leq a_3$, 所以由 (12) 、(13) 式得 $k_4 \geq \beta \geq k_2$. 又 $k_1k_3 \geq 0$, 所以有 $k_4 \leq \dfrac{a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}{2}$, 由 (7) 式和 (结论 1) 有 $a_2 - k_1k_3 > 0$, 于是由 (10) 式有 $k_2 \geq \dfrac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}{2}$, 故 $\dfrac{a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}{2} \geq \beta \geq \dfrac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}{2}$.

充分性的证明: 由题设 $\beta^2 - a_2\beta + a_0 \leq 0$ 可知 $a_2^2 - 4a_0 \geq 0$, 以下用反证法, 若不然, k_1 和 k_3 有一个为负, 不妨设 $k_1 < 0$, 由 (6) 式得 $k_3 > a_3$, 所以由 (13) 式有 $k_2 > \beta$, 又 $k_1k_3 < 0$, $a_2 - k_1k_3 > 0$, 于是由 (11) 式有 $k_2 < \dfrac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}{2}$, 所以 $\beta < \dfrac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}{2}$ 与题设条件矛盾, 故结论成立.

同理 (结论 2) 可得:

(结论 2′): 如果方程 (4) 的系数满足 $a_3, a_2, a_1 > 0, a_0 > 0$, 则 k_1 和 k_3 为正数的充要条件是 $a_0 < a_2\beta - \beta^2$.

(结论 3)[12]: 如果方程 (4) 的系数满足以下其中之一条件： $a_0 < 0$; $a_1 < 0$; $a_3 < 0$, 则方程 (4) 存在实部为正数的根.

(结论 4): 如果方程 (4) 的系数满足条件 $a_1 > 0$, $a_3 = 0$, $a_0 > 0$, 则方程 (4) 存在实部为正数的根.

证明：由方程 (4) 根与系数的关系 $a_0(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}) = -a_1$ 和 $a_0 > 0$ 知方程 (4) 的根不全为虚根且没有零根，再由根与系数的关系 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = -a_3 = 0$ 知方程 (4) 有实部为正数的根.

同理结论 4 可证.

(结论 5): 如果方程 (4) 的系数满足条件 $a_3 > 0$, $a_1 = 0$, $a_0 > 0$, 则方程 (4) 存在实部为正数的根.

(结论 6)[12]: 方程 (4) 所有根的实部为非正数 (负数) 的充要条件是 k_4, k_3, k_2, k_1 为非负数 (正数).

综合上述结论我们可得以下重要结论：

(结论 7): 若平动点的变分方程的特征方程为 $\lambda^4+a_3\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0 = 0$ (a_1, a_3 不全为零) 且 $a_2 > 0$, $a_0 \neq 0$ 则平动点线性稳定的充要条件是 $a_3, a_1 > 0$; $a_0 > 0$ 且 $a_0 \leq a_2\beta-\beta^2$, 平动点渐近稳定的充要条件是 a_3, $a_1 > 0$; $a_0 > 0$ 且 $a_0 < a_2\beta-\beta^2$.

下面利用上述平动点线性 (渐近) 稳定的充要条件来讨论任意外力摄动对经典圆型限制性三体问题三角平动点稳定性的影响.

4 任意外力摄动对经典圆型限制性三体问题三角平动点稳定性的影响

无摄经典圆型限制性三体问题三角平动点变分方程的特征方程为 $\lambda^4+a_2\lambda^2+a_0 = 0$, 其中 $a_2 = 1$, $a_0 = \frac{27}{4}\mu(1-\mu)$, 这里 $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$, $(0 < \mu < 1)$, m_1, m_2 是两主体的质量且设 $m_1 > m_2$, 这时三角平动点线性稳定的条件为 $a_0 < \frac{a_2^2}{4}$ (不考虑其边界)[1], 由此可得无摄经典圆型限制性三体问题三角平动点线性稳定 μ 域为 $(0, \mu_0)$, 其中 $\mu_0 = 0.03852\ldots$ 为线性稳定临界值. 而受任意外力 F (F 满足 $|F| = O(k)$, $k \ll 1$, 且不显含时间 t) 摄动的有摄经典圆型限制性三体问题三角平动点变分方程的特征方程的形式为 $\lambda^4+a_1'\lambda^3+a_2'\lambda^2+a_3'\lambda+a_0' = 0$, 其中 $a_2' = a_2 \pm O(k)$, $a_0' = a_0 \pm O(k)$. 下面分 2 种情况考虑：1) 当 $a_1' = a_3' = 0$ 时, 三角平动点线性稳定 μ 域由不等式 $a_0' < \frac{{a_2'}^2}{4}$ 决定, 由此不难得出线性稳定 μ 域为 $(0, \mu_0 \pm O(k))$, 与无摄时相比仅差一个摄动小量. 2) 当 a_1', a_3' 不全为零时, 显然 $a_2' = a_2 \pm O(k) > 0$, $a_0' = a_0 \pm O(k) > 0$, 由 (结论 7) 知平动点线性稳定 μ 域由 $a_3', a_1' > 0$ 和 $a_0' \leq a_2'\beta'-\beta'^2$ 来决定, 其中 $\beta' = \frac{a_1'}{a_3'}$. 又因为函数 $g(\beta') = a_2'\beta'-\beta'^2$ 的最大值为 $\frac{{a_2'}^2}{4}$ (当 $\beta' = \frac{a_2'}{2}$ 时取到), 此时三角平动点线性稳定 μ 的最大范围可由 $a_0' \leq \frac{{a_2'}^2}{4}$ (即 $a_0 + O(k) \leq \frac{(a_2+O(k))^2}{2}$) 来决定, 由此可知三角平动点线性稳定的 μ 的最大范围与无摄时相差一个摄动小量. 综上所述可得结论：任意外力摄动一般使经典圆型限制性三体

问题三角平动点线性稳定 μ 的域变小或仅相差一个摄动小量.

又由 (结论 7) 知某些外力摄动会使经典圆型限制性三体问题三角平动点线性稳定变为渐近稳定 ,(渐近稳定 μ 域由 $a_0' < a_2'\beta' - \beta'^2$ 确定). 从这个角度来看，某些外力摄动可加强三角平动点的稳定性.

5　惯性阻力摄动 Robe 圆型限制性三体问题平动点的稳定性

在惯性坐标系 $O(\xi,\eta,\zeta)$ 下，一般来说，媒介阻力与第三体的运动速度成正比，并与位置和速度矢量的模 $r = (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}$, $v = (\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2)^{\frac{1}{2}}$ 有关，即可描述为 $F = (F_\xi, F_\eta, F_\zeta) = kg(r,v)(\dot{\xi},\dot{\eta},\dot{\zeta})$, 其中 $k>0$ 为阻力系数且 $|k| \ll 1$, $g(x,y)$ 是二元函数. 将其转换到会合坐标系 $O(x,y,z)$ 下, 则可表示为 $F = (F_x,F_y,F_z) = kg(r,v)(\dot{x}-y, \dot{y}+x, \dot{z})$, 这里 $r = (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$, $v = (\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2)^{\frac{1}{2}} = ((\dot{x}-y)^2+(\dot{y}+x)^2+(\dot{z})^2)^{\frac{1}{2}}$. 具体的转换过程见文 [7,8]. 当 $g(r,v) = r^i v^j$ 时，文 [8] 中称之为惯性阻力模型. 它包含了许多常用的阻力模型，例如当 $i=0$, $j=1$ 时， $F = kv(\dot{x}-y, \dot{y}+x, \dot{z})$ 是考虑媒介对第三体阻力的常用的阻力模型，当 $i=-2$, $j=0$ 时， $F = k\dfrac{(\dot{x}-y,\dot{y}+x,\dot{z})}{r^2}$ 是著名的 PR-阻力模型的简化模型.

Robe[13] 提出了一种考虑浮力的限制性三体问题模型，设主物体 m_1^* 有一刚体圆形壳 m_1, 里面充满密度为 ρ_1 的均匀不可压缩流体，另一主物体 m_2 (质点) 在壳的外面且 m_2 绕 m_1^* 作 Keplerian 运动. 第三体 m_3 是一个密度为 ρ_3 的固体小圆球， m_3 在 m_1^* 中的流体重力引力、 m_2 的引力和 m_1^* 中流体对它的浮力作用下运动. 在文 [13] 中给出了运动方程的平动点及稳定性，得到 m_1^* 的中心 $(-\mu,0,0)$ 是 m_3 的一个平动点，并在一定的假设条件下给出了平动点的线性稳定域. 该模型可用于研究地球内核受月球吸引而产生震荡情况及在地球中心 (Robe 问题的平动点) 的稳定性. 还可用于研究人造卫星在大气中 (考虑大气浮力) 的运动.

由于 Robe 限制性三体问题的第三体 m_3 在流体中运动， m_3 必然受到流体阻力的影响. 所以在 Robe 限制性三体问题模型中考虑媒介 (流体) 阻力有一定的实际意义. 文 [10,12] 中作者在 Robe 限制性三体问题中考虑了一种较为理想化的阻力模型 —— 一致旋转媒介阻力, 讨论了一致旋转媒介阻力摄动对 Robe 限制性三体问题主要平动点 $(-\mu,0,0)$ 稳定性的影响. 在这里我们讨论惯性阻力摄动对 Robe 圆型限制性三体问题主要平动点 $(-\mu,0,0)$ 稳定性的影响.

Robe 圆型限制性三体问题 ($e=0$) 第三体受惯性阻力摄动的运动方程为

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial V}{\partial x} - F_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial V}{\partial y} - F_y \\ \ddot{z} + z &= \frac{\partial V}{\partial z} - F_z \end{aligned} \quad , \tag{14}$$

这里 $V = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + \dfrac{\mu}{\{(1-\mu-x)^2+y^2+z^2\}^{1/2}} - \dfrac{K}{2}\{(-\mu-x)^2+y^2+z^2\}$, $\mu =$

$\frac{m_2}{m_1^*+m_2}$, $0<\mu<1$ 和 $K=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\rho_1 a^3}{m_1^*+m_2}\right)(1-\frac{\rho_1}{\rho_3})$, 以下我们都设 $K\geq 0(\rho_1\leq\rho_3)$. 在 (14) 式中令： $\ddot{x}=\ddot{y}=\ddot{z}=\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$ 得平动点满足下列方程

$$x-\frac{\mu(x-1+\mu)}{[(1-\mu-x)^2+y^2+z^2]^{3/2}}-K(x+\mu)+kr^{i+j}y=0\,, \tag{15}$$

$$y-\frac{\mu y}{[(1-\mu-x)^2+y^2+z^2]^{3/2}}-Ky-kr^{i+j}x=0\,, \tag{16}$$

$$-\frac{\mu z}{[(1-\mu-x)^2+y^2+z^2]^{3/2}}-Kz-kr^{i+j}z=0\,. \tag{17}$$

当 $K\geq 0$ 时，由 (17) 式解得 $z=0$, 这表明平动点在 XY 平面上. 以下讨论受惯性阻力摄动平动点在 XY 平面上的稳定性.

(1) 先讨论惯性阻力摄动对平动点 $(-\mu,0,0)$ 平面位置的影响

设受摄后平动点平面位置为 $(x_0,y_0)=(-\mu+\alpha,\beta)$ 且 $|\alpha|,|\beta|\ll 1$, 代入方程 (15) 、(16) 式得

$$-\mu+\alpha-\frac{\mu(\alpha-1)}{[(1-\alpha)^2+\beta^2]^{3/2}}-K\alpha+kr_0^{i+j}\beta=0\,, \tag{18}$$

$$\beta-\frac{\mu\beta}{[(1-\alpha)^2+\beta^2]^{3/2}}-K\beta-kr_0^{i+j}(-\mu+\alpha)=0\,. \tag{19}$$

由 (18) 式 $\times\beta$ 减 (19) 式 $\times(\alpha-1)$ 式得：

$$(1-\mu-K)\beta+kr_0^{i+j}(\beta^2+(-\mu+\alpha)(\alpha-1))=0\,. \tag{20}$$

当 $\beta=0$ 时，由 (19) 式得 $\alpha=\mu$, 方程 (20) 式没有 $|\alpha|,|\beta|\ll 1$ 的解，当 $\beta\neq 0$ 时，由方程 (20) 式知当 $1-\mu-K\to 0$ 时， $\beta^2+(-\mu+\alpha)(\alpha-1)\to 0$, 方程 (20) 式没有 $|\alpha|,|\beta|\ll 1$ 的解，所以我们只考虑 $\beta\neq 0$, $|1-\mu-K|$ 不是很小时的情况，这时由 (20) 式解得 (保留 k 的一阶)

$$\beta=-k\mu r_0^{i+j}\Big/1-\mu-K=O(k)\,. \tag{21}$$

再由 (18) 式得 (保留 k 的一阶和 β,α 的二阶)

$$\alpha(1+2\mu-K)-\frac{9}{2}\mu\alpha^2-\frac{3}{2}\mu\beta^2+k\mu r_0^{i+j}\beta=0\,, \tag{22}$$

又在无摄情况下，由文 [13] 知当 $1+2\mu-K\geq 0$ 平动点 $(-\mu,0,0)$ 不稳定，由上节讨论知在有摄情况下一般也不稳定. 所以我们只讨论当 $1+2\mu-K<0$ 时的情况，这时由 (22) 式解得

$$\alpha=\left(1+2\mu-K+\sqrt{(1+2\mu-K)^2+18\mu(k\mu r_0^{i+j}\beta-\frac{3}{2}\mu\beta^2)}\right)\Big/9\mu\,. \tag{23}$$

由 (23) 式易知 $|\alpha| \ll 1$ 且当 $1+2\mu-K \to 0$ 时， α 与 $O(\beta)$ 同量级，当 $|1+2\mu-K|$ 不是很小时，这时由 (15) 式得 (保留 α, β 的一阶)

$$\alpha = -k\mu r_0^{i+j}\beta \Big/ (1+2\mu-K) = O(k^2)\,,$$

这时 α 与 $O(\beta^2)$ 同量级.

(2) 下面讨论平动点在 XY 平面的稳定性

当 $\beta \neq 0$, $|1-\mu-K|$ 和 $|1+2\mu-K|$ 不是很小时，这时 $\beta = O(k)$, α 与 $O(k^2)$ 同量级，由 (3) 式知平面平动点 (x_0, y_0) 变分方程的特征方程的系数为 (保留 k 的一阶)

$$\begin{aligned}
&a_3 = F^0_{x\dot{x}} + F^0_{y\dot{y}} = k(2+i)r_0^{i+j}\,,\\
&a_2 = 4 - V^0_{xx} - V^0_{yy} - (F^0_{xx} + F^0_{yy}) + 2(F^0_{x\dot{y}} - F^0_{y\dot{x}}) =\\
&4 - (V^0_{xx} + V^0_{yy}) = 2 - \mu + 2K\,,\\
&a_1 = 2(F^0_{yx} - F^0_{xy}) - (F^0_{x\dot{x}}V^0_{yy} + F^0_{y\dot{y}}V^0_{xx}) + V^0_{xy}(F^0_{x\dot{y}} + F^0_{y\dot{x}}) =\\
&k(2(2+i+j) - (V^0_{xx} + V^0_{yy}) - iV^0_{xx})r_0^{i+j} =\\
&k(2-\mu+2K+2(i+j) - i(1+2\mu-K))r_0^{i+j}\,,\\
&a_0 = V^0_{xx}V^0_{yy} - (V^0_{xy})^2 - (F^0_{xx}V^0_{yy} + F^0_{yy}V^0_{xx} - V^0_{xy}(F^0_{xy} + F^0_{yx})) =\\
&V^0_{xx}V^0_{yy} = (1+2\mu-K)(1-\mu-K)\,.
\end{aligned} \tag{24}$$

显然有 $a_2 > 0$, 所以由 (结论 7) 得平动点 (x_0, y_0) 的渐近稳定的条件为

$$\begin{aligned}
&2+i>0\,;\\
&2-\mu+2K+2(i+j)-i(1+2\mu-K)>0\,;\\
&K<1-\mu \quad 或 \quad K>1+2\mu\,;\\
&(1+2\mu-K)(1-\mu-K) < \frac{2-\mu+2K+2(i+j)-i(1+2\mu-K)}{2+i}\\
&\left[2-\mu+2K\frac{2-\mu+2K+2(i+j)-i(1+2\mu-K)}{2+i}\right]\,.
\end{aligned} \tag{25}$$

当 $\beta \neq 0$, $1+2\mu-K \to 0$ 时， α 与 $O(\beta)$ 同量级，即 α 与 $O(k)$ 同量级，保留 k 的一阶时，需要考虑的 α 一阶. 这时有

$$\begin{aligned}
&a_3 = k(2+i)r_0^{i+j};\\
&a_2 = 2-\mu+2K-3\mu\alpha;\\
&a_1 = k(2-\mu+2K-3\mu\alpha+2(i+j)-i(1+2\mu+6\mu\alpha-K))r_0^{i+j};\\
&a_0 = (1+2\mu+6\mu\alpha-K)(1-\mu-3\mu\alpha-K)\,.
\end{aligned} \tag{26}$$

类似 (25) 式可得平动点 (x_0, y_0) 的渐近稳定的条件.

当 $\beta = 0$ 或 $1-\mu-K \to 0$ 时, 由前面不动点的位置讨论知方程 (20) 式无 $|\alpha|, |\beta| \ll 1$ 的解.

(3) 以下考虑几种具体的惯性阻力模型

先考虑当 $i=j=0$ 时，即惯性阻力为 $F=k(\dot{x}-y,\dot{y}+x,\dot{z})$. 由 (25) 式得当 $\beta\neq 0$,$|1-\mu-K|$ 和 $|1+2\mu-K|$ 不是很小时平动点 (x_0,y_0) 的渐近稳定的条件为

$$K<1-\mu \qquad 或 \qquad K>1+2\mu\,,$$

$$(1+2\mu-K)(1-\mu-K)<\frac{2-\mu+2K}{2}\left[2-\mu+2K-\frac{2-\mu+2K}{2}\right].$$

即平动点 (x_0,y_0) 的渐近稳定域为 $\{(K,\mu)|K<1-\mu,K>\frac{1}{16}(8\mu-9\mu^2)\}\cup\{(K,\mu)|K>1+2\mu\}$, 与无摄时的线性稳定域相同 [13]. 于是可得结论：该惯性阻力加强了平动点的稳定性.

当 $\beta\neq 0$, $1+2\mu-K\to 0$ 时，由 (26) 式得 $a_0=-18\mu\alpha(\alpha<0)$, $a_1=a_2=2-\mu+2K-3\mu\alpha>0$, $a_3=2$. 显然有 $a_0<a_2\beta-\beta^2$, 故由 (结论 7) 得平动点 (x_0,y_0) 的渐近稳定.

下面考虑当 $i=0$, $j=1$ 时，即惯性阻力为 $F=kv(\dot{x}-y,\dot{y}+x,\dot{z})$, 由 (25) 式得当 $\beta\neq 0$, $|1-\mu-K|$ 和 $|1+2\mu-K|$ 不是很小时，平动点 (x_0,y_0) 的渐近稳定的条件为：

$$K<1-\mu \qquad 或 \qquad K>1+2\mu\,,$$

$$(1+2\mu-K)(1-\mu-K)<\frac{4-\mu+2K}{2}\left[2-\mu+2K-\frac{4-\mu+2K}{2}\right].$$

即平动点 (x_0,y_0) 的渐近稳定域为 $\{(K,\mu)|K<1-\mu,K>\frac{1}{16}(4+8\mu-9\mu^2)\}\cup\{(K,\mu)|K>1+2\mu\}$. 与无摄时的线性稳定域相比 [13], 稳定域有所减少，但减少的不多. 于是可得结论：该惯性阻力对平动点的稳定性影响不大.

当 $\beta\neq 0$, $1+2\mu-K\to 0$ 时, 由 (26) 式得 $a_0=-18\mu\alpha\,(\alpha<0)$, $a_2=2-\mu+2K-3\mu\alpha>0$, $a_1=4-\mu+2K-3\mu\alpha>0$, $a_3=3$. 显然有 $a_0<a_2\beta-\beta^2$, 故由 (结论 7) 得平动点 (x_0,y_0) 的渐近稳定.

最后考虑当 $i=-2$, $j=0$ 时，即惯性阻力为 $F=k\dfrac{(\dot{x}-y,\dot{y}+x,\dot{z})}{r^2}$, 这时 $a_3=0$, $a_1=3\mu$. 由 (结论 4) 得平动点 (x_0,y_0) 不稳定.

6 小结

本文给出了由平动点变分方程的特征方程系数的一个简单关系来确定其平动点的稳定性的充要条件，用所得到的充要条件，讨论了任意外力摄动对经典圆型限制性三体问题三角平动点稳定性的影响，研究了惯性阻力摄动对 Robe 圆型限制性三体问题平动点 $(-\mu,0,0)$ 的稳定性. 给出了一些阻力摄动 Robe 圆型限制性三体问题主要平动点的稳定条件和稳定域. 事实表明本文给出的充要条件是判断受摄限制性三体问题平动点稳定性的一有效方法.

致谢 感谢南京大学易照华教授给以的指导和帮助.

参 考 文 献

1 Szebehely V. Thoery of Orbit. New York: Academic press, 1967
2 Papadakis K E. Celest Mech, 1999, 72: 235
3 Hallan P P, Jain S, Bhatnagar K B. Celest Mech, 2000, 77: 157
4 Khanna M, Bhatnagar K B. Indian J pure appl math, 1999, 30: 721
5 Sharma R K, Taqvi Z A, Bhatnagar K B. Celest Mech, 1998, 69: 119
6 Bhatnagar K B, Hallan P P. Celest. Mech, 1998, 69: 271
7 Murray C D. Icarus, 1994, 112: 465
8 Murray C D, Dermott S F. Solay System Dynamics, Cambridge: Cambridge university Press, 1999, 121
9 Schuerman. ApJ, 1980, 238: 337
10 Giordano C M, Plastino A R, Plastino A. Celest Mech, 1997, 66: 229
11 Shu Si-hui, Lu Ben-kui, Chen Wu-shen, et al. AcASn, 2004, 45(2):195(舒斯会，陆本魁，陈务深等. 天文学报， 2004, 45(2): 195) (= Shu Si-hui Lu Ben-kui, Chen Wu-shen, et al. ChA&A, 2004, 28(3))
12 Shu Si-hui, Lu Ben-kui, Liu Fu-yao, et al. AcASn, 2004, 45(3): 301 (舒斯会，陆本魁，刘福窑等. 天文学报， 2004, 45(3) :301) (= Shu Si-hui, Lu Ben-kui, Chen Wu-shen, et al. ChA&A, 2004, 28(4))
13 Robe H A G. Celest Mech, 1977, 16: 343

Sufficient and Necessary Conditions for the Stability of Equilibrium Points in the Perturbed Circular Restricted Three-Body Problem and Applications

SHU Si-hui[1,2,3] LU Ben-kui[1,2] CHEN Wu-shen 1,2,4 LIU Fu-yao[1,2]

(1 *Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing* 210008)

(2 *National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100012)

(3 *Jianxi science &Technology Teachers' college, Nanchang* 330013)

(4 *Nanjing university of Technology, Nanjing* 210027)

Abstract The sufficient and necessary judging conditions for the stability of equilibrium points in the perturbed circular restricted three-body problem are given. The condition only depends on a simple relation of the coefficients of the characteristic equations of their variational equations and is applied very expediently. The effect of an arbitrary external force perturbation upon the stability of equilibrium points in the circular classic restricted three-body problem and the effect of an inertial drag perturbation upon the stabilities of the main equilibrium points in the Robe circular restricted three-body problem are studied by these conditions.

Key words Celestial Mechanics: restricted three-body problem, equilibrium points, the stability