第 46 卷 第 1 期 天 文 学 报 Vol.46 No.1
2005 年 1 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Jan., 2005

分布逼近的卡尔曼滤波及其在星载 GPS 卫星定轨中的应用*

吴江飞 [1,2,3] 黄□ [1]

(1 中国科学院上海天文台 上海 200030)
(2 中国科学院研究生院 北京 100039)
(3 信息工程大学测绘学院 郑州 450052)

摘要 探讨了利用推广卡尔曼滤波估计非线性系统状态时存在的问题, 进而简要介绍了目前自动控制领域广泛使用的分布逼近的卡尔曼滤波 UKF (Unscented Kalman Filter). 考虑到卫星定轨中系统的动态方程和量测方程存在严重非线性的情形, 提出了将 UKF 用于星载 GPS 卫星定轨. 实例计算结果表明, UKF 的性能要优于推广卡尔曼滤波.

关键词 **天体力学: 卡尔曼滤波**, GPS, **定轨**
中图分类号: P 135; **文献标识码**: A

1 引言

推广卡尔曼滤波 (Extended Kalman Filter(EKF)) 是非线性系统最常用的一种递推滤波算法 [1]. 该滤波算法是将非线性系统的动态方程和量测方程应用泰勒级数展开法进行线性化处理, 由于存在对高阶项的截断误差, 使得推广卡尔曼滤波的估计精度降低, 严重时甚至导致滤波发散. 对由系统非线性产生的线性化误差作定性的误差分析 [2], 会发现: 动态方程的非线性所引进的线性化误差及模型误差对滤波初始段的精度影响不大, 主要影响滤波长时间递推的精度; 量测方程的非线性所引进的线性化误差主要影响滤波初始段的精度, 而对滤波长时间递推的精度影响较小.

应用卡尔曼滤波进行星载 GPS 卫星定轨, 较能体现该算法的优越性, 尤其当星载 GPS 在某些时刻无 GPS 信号时, 可以利用卡尔曼预测模型预测这些时刻的位置和速度; 而当有星载 GPS 观测数据时, 可利用卡尔曼滤波进行实时定轨; 或在某一时段内, 利用卡尔曼平滑进行后处理精密定轨. 但这方面的研究仍然是基于 EKF[3,4], 从而不可避免地存在着线性化误差的影响. 尽管选择卫星轨道根数作为状态变量或者建立适当的坐标系能有效地减小动态方程和量测方程的线性化误差, 但这些方法既不能从根本上改变系统的非线性特征, 也不适用于考虑较多摄动项的动态方程.

针对 EKF 的不足, Julier 等提出了一种新的非线性滤波方法: Unscented Kalman Filter(UKF)[5]. 它无需对非线性的动态方程和量测方程进行线性化处理, 从而也就不存

2004-03-08 收到原稿, 2004-04-24 收到修改稿
* 中国科学院知识创新工程重要方向项目 (KJCX2-SW-T1) 和国家 863 计划 (2002AA731171) 资助

在线性化误差的影响. 本文简要介绍了 UKF 算法, 并提出将 UKF 用于星载 GPS 卫星定轨, 实例计算结果表明, UKF 的性能要优于 EKF.

2 UKF 算法

UKF 和 EKF 的基本框架是相同的, 它们的关键区别在于两者采用了不同的方式来确定系统状态的预测均值和协方差阵. EKF 主要是用线性模型逼近系统的非线性模型, 而 UKF 主要是用采样点的分布逼近系统状态的分布. 在 UKF 中, 首先要根据系统先验信息选择一批可表征系统状态的均值和协方差阵的采样点. 假定第 $k-1$ 步的滤波值和滤波误差协方差阵分别为 $\widehat{x}_{k-1}$ 和 P_{k-1}. 由矩阵 $\sqrt{(n+\lambda)P_{k-1}}$ (n 为协方差阵的维数, λ 为尺度参数) 的行或列可以得到 n 个点, 由矩阵 $-\sqrt{(n+\lambda)P_{k-1}}$ 的行或列又可以得到与上述点对称的 n 个点. 这 $2n$ 个点均值为 0, 协方差阵为 P_{k-1}, 每个点都加上均值 $\widehat{x}_{k-1}$, 并把中心点也考虑进来, 于是就得到了 $(2n+1)$ 个点, 它们的均值和协方差阵分别为 $\widehat{x}_{k-1}$ 和 P_{k-1}. 这 $(2n+1)$ 个点直接代入系统的非线性方程进行转换, 再由转换后所得到的 $(2n+1)$ 个点通过某种加权的方式来预测均值 $\widehat{x}_{k|k-1}$ 和协方差阵 $P_{k|k-1}$. 这就是 UKF 不同于 EKF 的关键之处.

假定系统的动态方程和量测方程分别为如下离散非线性型的方程:

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k) + \omega_k \,, \tag{1}$$

$$y_k = H(x_k) + \eta_k \,, \tag{2}$$

其中, x_k 、 u_k 、 ω_k 和 Q_k 分别为系统状态向量、输入控制向量、系统动态噪声向量和协方差阵 y_k 、 η_k 和 R_k 分别为观测向量、量测噪声向量和协方差阵.

设系统状态向量 x_k 的维数为 n, UKF 算法如下 [6]:

初始化:

$$\widehat{x}_0 = E[x_0], \qquad P_0 = E[(x_0 - \widehat{x}_0)(x_0 - \widehat{x}_0)^T] \,. \tag{3}$$

计算 $(2n+1)$ 个采样点:

$$\chi_{k-1} = [\ \widehat{x}_{k-1} \quad \widehat{x}_{k-1} + \gamma\sqrt{P_{k-1}} \quad \widehat{x}_{k-1} - \gamma\sqrt{P_{k-1}}\ ] \,. \tag{4}$$

时间更新:

$$\chi^*_{k|k-1} = F[\chi_{k-1}, u_{k-1}] \,, \tag{5}$$

$$\widehat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \chi^*_{i,k|k-1} \,, \tag{6}$$

$$P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\chi^*_{i,k|k-1} - \widehat{x}_{k|k-1}][\chi^*_{i,k|k-1} - \widehat{x}_{k|k-1}]^T + Q_k \,, \tag{7}$$

$$\chi_{k|k-1} = [\ \widehat{x}_{k|k-1} \quad \widehat{x}_{k|k-1} + \gamma\sqrt{P_{k|k-1}} \quad \widehat{x}_{k|k-1} - \gamma\sqrt{P_{k|k-1}}\ ] \,, \tag{8}$$

$$y_{k|k-1} = H[\chi_{k|k-1}] \,, \tag{9}$$

$$\widehat{y}_{k|k-1}=\sum_{i=0}^{2n}W_i^{(m)}y_{i,k|k-1}\,. \tag{10}$$

量测更新：

$$P_{\widetilde{y}_k\widetilde{y}_k}=\sum_{i=0}^{2n}W_i^{(c)}[y_{i,k|k-1}-\widehat{y}_{k|k-1}][y_{i,k|k-1}-\widehat{y}_{k|k-1}]^T+R_k\,, \tag{11}$$

$$P_{x_ky_k}=\sum_{i=0}^{2n}W_i^{(c)}[\chi_{i,k|k-1}-\widehat{x}_{k|k-1}][y_{i,k|k-1}-\widehat{y}_{k|k-1}]^T\,, \tag{12}$$

$$K_k=P_{x_ky_k}P_{\widetilde{y}_k\widetilde{y}_k}^{-1}\,, \tag{13}$$

$$\widehat{x}_k=\widehat{x}_{k|k-1}+K_k(y_k-\widehat{y}_{k|k-1})\,, \tag{14}$$

$$P_k=P_{k|k-1}-K_kP_{\widetilde{y}_k\widetilde{y}_k}K_k^T\,. \tag{15}$$

关于采样点 χ_{k-1} 中的元素及其相应的权值，可分别取为：

$$\begin{aligned}
&\chi_{0,k-1}=\widehat{x}_{k-1}, && W_0=\lambda/(n+\lambda), \quad i=0\\
&\chi_{i,k-1}=\widehat{x}_{k-1}+(\sqrt{(n+\lambda)P_{k-1}})_i, && W_i=1/[2(n+\lambda)], \quad i=1,\cdots,n\\
&\chi_{i,k-1}=\widehat{x}_{k-1}-(\sqrt{(n+\lambda)P_{k-1}})_i, && W_i=1/[2(n+\lambda)], \quad i=n+1,\cdots,2n\,,
\end{aligned} \tag{16}$$

其中，$\gamma=\sqrt{n+\lambda}$, λ 是尺度参数, 若假定动态噪声向量服从正态分布, 则通常取 $\lambda=3-n$; $(\sqrt{(n+\lambda)P_{k-1}})_i$ 表示矩阵 $(n+\lambda)P_{k-1}$ 的平方根的第 i 行或第 i 列；$W_i=\lambda/(n+\lambda)\quad(i=0)$, $W_i^{(m)}=W_i^{(c)}=W_i=1/[2(n+\lambda)],\quad(i\neq0)$ 是相应于第 i 个点的权，上标 m 和 c 分别表示计算均值和协方差阵时所取的权值.

3　星载 GPS 卫星定轨实例分析

由 GPS 提供的定位能力目前正向空间飞行器的定轨方向拓展 [7,8]. 现在，许多低轨卫星装载有用于定轨的 GPS 接收机，可以提供 P 码伪距和连续的载波相位观测，从而提供用户卫星的精确位置. 即使采用最简单的接收设备，低高度轨道空间飞行器的瞬时定位精度也能达到数十米的量级，这足以满足大多数任务的要求.

3.1　基于 GPS 导航解的卫星定轨

除了高精度应用需要直接处理原始的码观测值和载波相位观测值外, 星载 GPS 卫星定轨可以基于 GPS 接收机提供的导航解. 由于导航解实际上由原始的伪距观测值导出，所以它并非是严格意义上的观测值. 然而，导航解在实用中可以作为卫星定轨的伪观测值. 采用卡尔曼滤波和适当的动力学模型，原有的观测噪声可以得到明显地削减，可以获得更精确的状态向量.

基于导航解和动力学模型的星载 GPS 卫星定轨，它综合考虑了卫星运动的几何信息和动力学信息，给星载 GPS 卫星导航提供了各种便利. 这主要与卫星的运动轨道受到动力学运动定律的制约有关. 首先，平差的轨道信息与导航解本身相比，前者更不易受到

故意恶化的 GPS 观测值的影响 (例如 Selective Availability 影响等). 此外, 动力学模型允许轨道的平滑内插、数据盲区的链接和误差较大的观测值的探测. 最后, 由扩展的数据弧段所累积的位置信息, 可由卡尔曼滤波提供精确的速度信息 (作为被估计的状态向量的一部分).

3.2 实例分析

为了分析 UKF 用于星载 GPS 卫星定轨的性能, 这里选用了文 [4] 中 "实时定轨" (Real-Time Orbit Determination) 一节的算例. 在文 [4] 中, 为了处理定轨中系统的非线性问题, 文中采用了 EKF.

算例中采用的数据源为 GPS/MET 实验 (MicroLab-1 卫星), 于 1996 年 10 月 1 日由星载 GPS 接收机所采集的 24 小时数据弧段. 采样率为每 5 分钟一点. MicroLab-1 卫星是 1995 年发射的, 轨道高度大约 740 公里. 因为是实时定轨, 与文 [4] 一致, 在力模型方面这里也仅考虑引力场模型. 采用两种估计方案并分 3 种情形进行了计算. 两种估计方案为: EKF 和 UKF; 3 种情形见表 1:

表 1 3 种情形的滤波参数

Table 1 Filter parameters for selected case studies

参数 Parameter	情形 A Case A	情形 B Case B	情形 C Case C
Gravity model order	10	10	4
Integration step size [s]	30	60	30
Measurement standard deviation [m]	100	100	100
A priori std. dev. Position [m]	1000	1000	1000
A priori std. dev. Velocity [m/s]	10	10	10
State noise position [m]	0.5	0.0	10.0
State noise velocity [m/s]	0.0005	0.0000	0.0100
Edit level	3.0	3.0	3.0

计算结果如图 1—6:

图 1 和图 2 分别表示的是 EKF 和 UKF 在情形 A 下估计的有关位置的结果. 从两图可以看出, 在初始阶段, 由于受比较大的观测误差的影响, 位置估计误差和位置估计误差标准差也相应较大. 大约 3 小时后, 滤波进入稳态. 统计发现, EKF 估计的位置误差标准差的平均值为 46.47 米 (图 1); UKF 估计的位置误差标准差的平均值为 31.46 米 (图 2). 对比图 1 和图 2, 可以发现, 在观测误差相同的情况下, UKF 的位置误差和位置误差标准差均比 EKF 的相应量要明显的小一些.

图 3 和图 4 分别表示的是 EKF 和 UKF 在情形 A 下估计的有关速度的结果. 经统计, EKF 估计的速度误差标准差的平均值为 0.0692 米 / 秒 (图 3); UKF 估计的速度误差标准差的平均值为 0.0461 米 / 秒 (图 4).

图 5 和图 6 分别表示的是 EKF 和 UKF 在情形 B 下估计的有关位置的结果. 在情形 B 中, 积分步长比情形 A 放大了一倍, 另外, 在系统中也没有用过程噪声来补偿模型误差. 这些因素导致两种估计方案在情形 B 下都滤波发散. 从两图的对比可以发现, 图 5 滤波发散从第 7 小时开始, 而图 6 滤波发散是从第 10 小时开始的. 这是因为 EKF 除

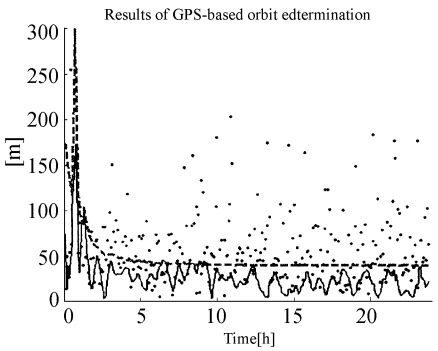

图 1　情形 A 下 EKF 估计结果 (位置): 点表示 GPS 观测误差, 实线表示估计误差, 虚线表示估计误差标准差

Fig. 1　EKF results on case A (position): GPS measurement errors (dots), error of the estimated position (real line) and standard deviation of the estimate (broken line)

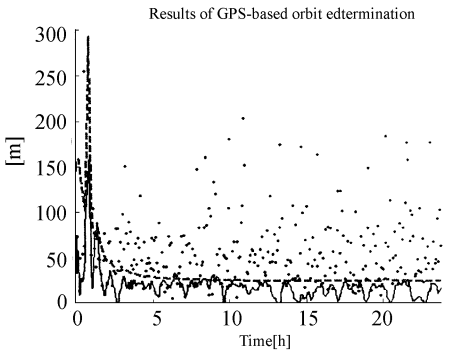

图 2　情形 A 下 UKF 估计结果 (位置): 点表示 GPS 观测误差, 实线表示估计误差, 虚线表示估计误差标准差

Fig. 2　UKF results on case A (position): GPS measurement errors (dots), error of the estimated position (real line) and standard deviation of the estimate (broken line)

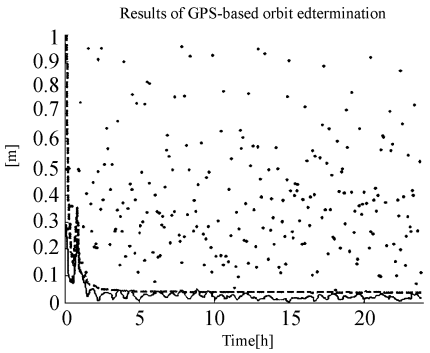

图 3　情形 A 下 EKF 估计结果 (速度): 点表示 GPS 观测误差, 实线表示估计误差, 虚线表示估计误差标准差

Fig. 3　EKF results on case A (velocity): GPS measurement errors (dots), error of the estimated velocity (real line) and standard deviation of the estimate (broken line)

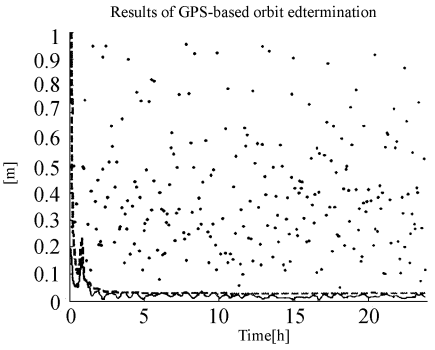

图 4　情形 A 下 UKF 估计结果 (速度): 点表示 GPS 观测误差, 实线表示估计误差, 虚线表示估计误差标准差

Fig. 4　UKF results on case A (velocity): GPS measurement errors (dots), error of the estimated velocity (real line) and standard deviation of the estimate (broken line)

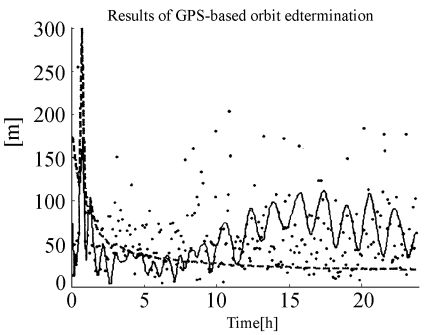

图 5 情形 B 下 EKF 估计结果 (位置): 点表示 GPS 观测误差, 实线表示估计误差, 虚线表示估计误差标准差

Fig. 5 EKF results on case B (position): GPS measurement errors (dots), error of the estimated position (real line) and standard deviation of the estimate (broken line)

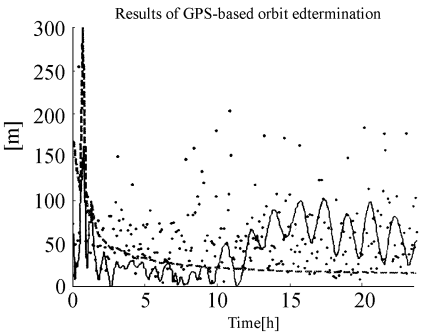

图 6 情形 B 下 UKF 估计结果 (位置): 点表示 GPS 观测误差, 实线表示估计误差, 虚线表示估计误差标准差

Fig. 6 UKF results on case B (position): GPS measurement errors (dots), error of the estimated position (real line) and standard deviation of the estimate (broken line)

受积分步长、固有的模型误差的影响外, 还受线性化模型误差的影响, 而 UKF 不受后一项影响, 所以 UKF 比 EKF 发生发散的时刻要晚.

情形 C 是模型误差补偿的一个极端例子. 在这一情形下, 滤波估值及其方差极易受到误差较大的观测值的影响. 与情形 A 、 B 类似, UKF 的结果比 EKF 的结果要稍好一些. 由于篇幅的原因, 这里略去其图示结果.

4 结语

UKF 是直接对非线性系统进行滤波, 不必计算动态方程和量测方程的雅可比矩阵, 因此不存在线性化模型误差的影响, 在滤波性能上要优于 EKF.

动力学信息是星载 GPS 定轨非常有用的信息, 利用动力学模型对星载 GPS 接收机提供的导航解进行 UKF 平滑处理能有效地提高其精度.

参 考 文 献

1 Anderson B D, Moore J B. Optimal Filtering, Prentice-Hall, New Jersey, 1979
2 贾沛璋, 朱征桃. 最优估计及其应用. 北京: 科学出版社, 1984, 88
3 胡国荣. 星载 GPS 低轨卫星定轨理论研究. 博士论文, 中国科学院测量与地球物理研究所, 1999
4 Oliver Montenbruck, Eberhard Gill. Satellite Orbits. Berlin: Springer-Verlag, Germany, 2000, 303
5 Simon Julier, Jeffrey Uhlmann, F Durrant-whyte. IEEE Transactions on Automatic Control, March 2000,45(3): 477
6 Rudolph van der Merwe, Eric A Wan. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing-Proceedings, IEEE: 2001, 3461
7 ZHANG Qiang, LIAO Xin-hao, HUANG Cheng. AcASn, 2000, 41(3): 278 (张强, 廖新浩, 黄成. 天文学报, 2000, 41(3): 278)

8 HU Guo-rong, OU JI-kun, CUI Wei-hong. AcASn, 2000, 41(3): 278 (胡国荣，欧吉坤，崔伟宏. 天文学报， 2000, 41(3): 278)

Unscented Kalman Filter and Its Application In GPS-Based Satellite Orbit Determination

WU Jiang-fei[1,2,3] HUANG Cheng[1]

(1 *Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 200030)

(2 *Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039)

(3 *Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, Zhengzhou* 450052)

Abstract It discusses the existing problem in using the Extended Kalman filter to estimate the state of one nonlinear system. And the Unscented Kalman filter is briefly introduced, which is widely used today in the field of automatic control. In the situation that the system dynamical equations and the measurement equations are highly nonlinear, the Unscented Kalman filter is brought forward to process the orbit of GPS-based satellite. A real example was performed, and the results show that the performance of the Unscented Kalman filter is superior to that of the Extended Kalman filter.

Key words celestial mechanics: Kalman filter, GPS, orbit determination