第 46 卷 第 1 期 天 文 学 报 Vol.46 No.1
2005 年 1 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Jan., 2005

宇宙微波背景辐射极化的近似解析公式*

张 杨 郝 蘅 赵 文

(中国科学技术大学天体物理中心 合肥 230026)

摘要 在宇宙早期的退耦过程中，光子与电子发生 Thompson 散射. 光子气体空间分布的各向异性通过 Thompson 散射而产生宇宙微波背景辐射的极化，并为最近 WMAP 观测到. 从光子气体的 Boltzmann 方程出发，采用一般的光深函数，分别积分给出原初密度扰动和残余引力波产生的微波背景辐射极化的近似解析解，结果适用于一般的复合过程. 密度扰动 F_S 所产生极化的近似解析解为 $\beta_S \simeq -CF_S(\tau_d)\Delta\tau_d$, 其中 τ_d 和 $\Delta\tau_d$ 分别为退耦时刻和退耦宽度，系数 $C \simeq (0.08 \sim 0.12)$, 明显依赖于复合模型. 残余引力波扰动 F_T 产生极化的积分稍微复杂，在长波近似下我们对原初扰动按波数进行幂级数展开，保留到两项 $F_T \simeq F_T^{(1)} + F_T^{(2)}$, 分别积分，给出近似解析解 $\beta_T \simeq -[CF_T^{(1)}(\tau_d) + DF_T^{(2)}(\tau_d)]\Delta\tau_d$. 第一项的极化与密度扰动类似，结论也相同；但第二项的系数 $D \simeq (0.22 \sim 0.32)$, 远大于系数 C. 我们的近似解析解有助于理解背景辐射的温度 — 极化交叉关联和检测残余引力波对背景辐射各向异性的贡献.

关键词 宇宙微波背景，早期宇宙，宇宙学参数

中图分类号： P 159; **文献标识码**： A

1 引言

宇宙微波背景辐射 (CMB) 的研究对于探讨宇宙演化是必不可少的，对于天文学其他方向和粒子物理也具有重要影响. 近十多年来 CMB 的观测和理论的研究取得了很大进展. 自从 COBE (Cosmic Background Explorer) 首次探测到了微波背景辐射在大尺度上的不均匀性 $\Delta T/T \simeq 2 \times 10^{-5}$ 之后 [1], 观测逐渐推进到较小尺度 [2−4], 最近 WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) 观测不仅探测到 $\Delta T/T$ 的功率谱 C_l 的较为完整的曲线 (前 3 个峰的高度和位置)[5,6], 而且清晰地观测到 CMB 的极化 (polarization) 现象 [7−9], 得到了温度 – 极化的交叉关联，并且表明宇宙早期发生过再电离现象. 这些观测新结果具有重要意义.

CMB 极化所产生的机制是，宇宙早期在红移 $z \sim 1000$ 附近，质子和电子进行由电离状态到中性氢的复合过程 (recombination). 这时仍然存在大量的自由电子，由于气体温度远远小于电子的静止质量，电子是非相对论性的. 这时光子与电子相互作用，发生 Thompson 散射. 假如光子气体在空间是完全均匀、各向同性的，那么经过 Thompson 散

2004-03-25 收到原稿， 2004-06-09 收到修改稿

* 国家自然科学基金 (10173008) 和科技部 973 项目 (NKBRSF G19990754) 资助

射后, 并不能使光子气体产生剩余的极化. 实际上, 在宇宙中光子气体的空间分布具有不均匀性, 尤其含有四极 (quadrupole) 不均匀性成份 $\propto Y_{lm}(\theta,\phi), l=2$, 于是经过 Thompson 散射产生了光子气体的线性极化. 在复合过程之后, 宇宙中的质子与电子结合而变为中性氢, 光子与电子退耦 (decoupling), 光子的极化便保留下来, 成为现在所观测的 CMB 的极化. WMAP 的观测表明, 在退耦之后宇宙中还发生过再电离 (reionization), 进一步地影响了 CMB 的极化. 目前再电离过程的物理机制仍然不清楚, 还在进一步研究之中. 本文不讨论再电离问题.

在 CMB 理论研究中, 主要涉及到膨胀的 Robertson-Walker 时空中光子、重子、中微子、以及可能存在的暗物质的 Boltzmann 方程组. 这一组方程不仅有不同组份之间的耦合, 而且时空本身的小扰动也将直接进入各个组份的方程, 影响着各个组份的扰动. 因而方程组所涉及到的物理量和参数较多, 其求解是比较复杂的. 具体的计算, 有数值方法 (例如 cmbfast 等) 和近似解析的方法 [10]. 后者可以清晰地显示宇宙学模型参量所起的作用, 更好理解 CMB 的诸多物理机制和特征, 因而十分重要. 在 CMB 极化理论中一个重要的物理量, 就是线性极化在动量空间 Fourier 分量的函数表达式 β, 由它可以构造极化的自关联函数, 温度 - 极化的交叉关联等重要观测量. 对于极化的研究, 文 [11,12] 给出一个近似解析表达式, $\beta \simeq -0.17F(\tau_d)\Delta\tau_d$, 其中 $F(\tau_d)$ 为原初扰动在退耦时刻 τ_d 的值, $\Delta\tau_d$ 为退耦宽度. 但是文 [11] 在推导此式时, 对于涉及到的积分的近似处理是, 利用可视函数 (visibility function) 的曲线接近于一个高斯分布, 直接把在此曲线峰值处被积函数的值乘以退耦宽度 (峰的宽度), 作为积分值. 通常复合过程的可视函数曲线峰的形状都是很高很尖, 峰两侧低坡的宽度又较宽, 这样直接相乘所给出的结果显然偏大, 甚至超出实际值的几倍, 也未能反映复合时期具体的光深函数以及重子密度 Ω_b 之影响.

本文将采用复合过程中一般的光深函数重新推导极化公式, 改进其中的积分处理, 并采用最新的 WMAP 数据给出共形时间坐标下的退耦时刻 τ_d 和退耦宽度 $\Delta\tau_d$. 结果适用于一般的复合过程, 且明显反映宇宙学参数 — 重子密度 Ω_b 对于极化的影响. 我们将对于标量型 (密度) 和张量型 (引力波) 这两类的原初扰动, 分别积分给出极化的近似解析解.

2 复合过程的光深模型

如前所述, CMB 的产生是在膨胀时空背景中进行的, 而且时空度规的扰动也要影响到光子气体的各向异性. 取时空背景为空间平的 Robertson-Walker 度规,

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\tau)[-\mathrm{d}\tau^2 + (\delta_{ij}+h_{ij})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j]\,, \tag{1}$$

其中 h_{ij} 为时空的扰动, 反映不均匀、各向异性, 一般包含有标量型和张量型, τ 是共形时间 (conformal time), 使用这个共形时间坐标系比较方便. 极化产生所处的复合过程是在物质为主时期, 标度因子 $a(\tau)=(\tau/\tau_0)^2$, 其中 τ_0 是现在时刻. 这相当于取标度因子的归一化 $a(\tau_0)=1$. 而红移 z 的定义为 $a(\tau)=a(\tau_0)/(1+z)$, 由此得到物质为主时期的共形时间与红移的关系: $\tau=\tau_0/\sqrt{1+z}$ 和 $\mathrm{d}\tau=-\dfrac{\tau_0}{2}(1+z)^{-3/2}\mathrm{d}z$.

由电离状态到中性氢的复合过程细节直接影响了极化产生. 其中涉及的主要物理量

是光深函数 (optical depth), 记为 $\kappa(\tau)$, 对此已经有许多研究 [13−15]. 定义从现在 τ_0 时刻 (红移 $z=0$) 到过去某个 τ 时刻 (红移为 z) 的光深函数：

$$\kappa(\tau)\equiv\kappa(\tau_0,\tau)\equiv\int_{\tau}^{\tau_0}q(\tau')\mathrm{d}\tau'\,, \tag{2}$$

其中 $q(\tau)$ 是微分光深函数 (differential optical depth), 正比于电离度、电子数密度和 Thompson 散射截面. q 依赖于物质总量 Ω 等宇宙学参数，通常由宇宙学模型和具体的复合模型来确定. 由定义有关系：

$$\kappa(\tau,\tau')=\kappa(\tau')-\kappa(\tau)\,. \tag{3}$$

往往用 z 来代替 τ 作为光深函数的自变量，仍然记为 $\kappa(0,z)$. 研究表明，宇宙早期一般的复合过程的光深函数可以表示为下列幂律形式

$$\kappa(z)=\kappa(0,z)=b\left(\frac{z}{1000}\right)^{c}\,, \tag{4}$$

其中 b 和 c 是无量纲参数，由具体模型来确定. 微分光深为

$$q=-\frac{\mathrm{d}\kappa(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\kappa(z)\,. \tag{5}$$

讨论复合过程时常常出现的物理量 $e^{-\kappa}\dfrac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}z}$ 称为可视函数 (visibility function), 其物理意义是光子在红移 z 被最后散射的几率. 可视函数的曲线的形状具有一个峰，和高斯分布接近. 但是复合过程的可视函数曲线的峰很高很尖，峰两侧的低坡较宽. 本文在具体讨论中涉及下列两个常用的模型.

(1) Jones 等 [14] 通过复合过程的计算，求解电离度方程，拟合给出光深函数：

$$\kappa(0,z)=0.37\left(\frac{z}{1000}\right)^{14.25},\quad 800<z<1200\,. \tag{6}$$

对应的参数 $b=0.37$, $c=14.25$.

(2) 光深与宇宙中的重子密度 Ω_b 是有关的. 尤其是在暗物质模型中，$\Omega_b\ll\Omega$, 上面的复合过程模型需要修正. Hu 等 [10] 考虑了 $\Omega=1$ 模型中重子成份 Ω_b 产生的修正，给出光深公式：

$$\kappa(0,z)=\Omega_b^{0.43}(\frac{z}{1000})^{16+1.8\ln\Omega_b},\quad 800<z<1200\,, \tag{7}$$

对应于 $b=\Omega_b^{0.43}$, $c=16+1.8\ln\Omega_b$. 这个模型与 Jones-Wyse 模型的差别比较明显. 若取重子密度 $\Omega_b=0.045$, 则两个模型的可视函数的峰值和宽度都有约 60% 的差别. 故可预期，这两种复合模型所产生的 CMB 极化也将有相应之差别.

3　CMB 极化的 Boltzmann 方程

研究 CMB 问题，一般用球谐函数展开，得到一系列的多极矩的方程，进而分级地求解方程. 但是对于计算极化的近似解析解，采用 Basko-Polnarev 的方法在数学上更直

接 [16,17]. 极化光子的分布函数 $\boldsymbol{n}$ 满足 Boltzmann 方程 [18]

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+e^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\boldsymbol{n}=-\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\nu}-q(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{J})\,, \tag{8}$$

这里

$$\boldsymbol{J}=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}P(\mu,\phi,\mu',\phi')\boldsymbol{n}\mathrm{d}\mu'\mathrm{d}\phi'\,, \tag{9}$$

其中 e^i 是光子传播方向的单位矢量，其方向在一给定球坐标系中为 (θ,ϕ), 微分光深 $q=\sigma_T N_e a$, σ_T 、 N_e 和 $P(\mu,\phi,\mu',\phi')$ 分别为 Thompson 散射截面、自由电子数密度和方矩阵 [18], 刻划光子受到电子气体组份的影响，即 Thompson 散射对于极化的影响， $\mu=\cos\theta$, 而右边的 $-\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\nu}$ 反映时空度规扰动引起光子频率 ν 的变化，具体地由 Sachs-Wolf 效应来体现：

$$\frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{2}\frac{\partial h_{ij}}{\partial\tau}e^ie^j\,.$$

这里的度规扰动 h_{ij} 可以是密度扰动或者引力波. 最一般的极化光子分布函数 $\boldsymbol{n}$ 是一个列矩阵 $\boldsymbol{n}(\nu,\theta,\phi)=(I_l,I_r,U,V)$, 其中的分量为 4 个 Stokes 参量. 本文研究的是 Thompson 散射，只产生线性极化，其圆偏振参量 $V=0$. 辐射强度为 $I=I_l+I_r$, 而 $Q=I_l-I_r$ 刻划线偏振. 对于密度扰动产生的极化，还可以取参量 $U=0$. 而引力波产生的极化，一般 $U\neq0$. 采用 Basko-Polnarev 方法，设 $\boldsymbol{n}$ 分解为非极化和极化两部分：

$$\boldsymbol{n}=n_0\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\boldsymbol{n}_1\right]\,,$$

其中 $\boldsymbol{n}_0$ 是 Planck 谱，仅与频率 ν 有关，与方向无关，而 $\boldsymbol{n}_1$ 是极化部分，也是我们关心的内容，它在空间部分 Fourier 变换后的分量满足下列方程

$$\frac{\partial\boldsymbol{n}_1(k)}{\partial\tau}+ik\mu\boldsymbol{n}_1(k)=\gamma\mu^2F-q(\boldsymbol{n}_1(k)-\boldsymbol{J}(k))\,, \tag{10}$$

其中在 Rayleigh-Jeans 低频区域 $\gamma\equiv\frac{\mathrm{d}\ln n_0}{\mathrm{d}\ln\nu}\simeq1$, μ^2F 是 Sachs-Wolf 效应项 $(-\frac{1}{2}\dot{h}_{ij}e^ie^j)$ 的 Fourier 分量， F 是原初扰动源. 对于密度扰动，令

$$\boldsymbol{n}_1(k)=\alpha(\mu^2-\frac{1}{3})\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta(1-\mu^2)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\,,$$

对于引力波的扰动，令

$$\boldsymbol{n}_1(k)=\frac{\alpha}{2}(1-\mu^2)\cos2\phi\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}(1+\mu^2)\cos2\phi\\-(1+\mu^2)\cos2\phi\\4\mu\sin2\phi\end{pmatrix}\,,$$

其中 α 和 β 是待定的时间函数, 都与波数 k 有关, 这里 β 是极化. 于是复杂的 Boltzmann 方程都归结为下列相同的耦合的二元一阶微分方程组 [11,16,17,19,20]

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + q\xi = F\,,$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \tau} + \frac{3}{10}q\beta = -\frac{1}{10}q\xi\,.$$

其中 $\xi \equiv \alpha + \beta$. 直接作形式的积分，给出下列公式:

$$\xi(\tau) = \int_0^\tau F(\tau')e^{-\kappa(\tau,\tau')}\mathrm{d}\tau'\,, \tag{11}$$

$$\beta(\tau) = -\frac{1}{10}\int_0^\tau q(\tau')\xi(\tau')e^{-\frac{3}{10}\kappa(\tau,\tau')}\mathrm{d}\tau'\,. \tag{12}$$

由这两个积分表达式可见，反映复合过程的光深函数 κ 和原初扰动 F 都将影响极化的结果. 计算极化的步骤是首先积分出 $\xi(\tau)$, 带入第二个积分，积出 $\beta(\tau)$.

4　密度扰动产生的 CMB 极化

按照现行宇宙学的观点，在宇宙极早期的暴涨阶段，主导物质的量子场和引力场的量子零点振动通过宇宙膨胀而拉长，使得宇宙大尺度上物质分布和时空度规具有不均匀性和各向异性. 通过线性化的 Einstein 方程，物质分布与度规自身的不均匀性和各向异性是相互联系、相互影响的 [21]. 当这些不均匀性和各向异性对应的波动再次进入宇宙视界时，就成为了微小的原初扰动 [22]. 如前所述，原初扰动 F 作为函数有两类：密度扰动 F_S 和宇宙残余引力波 F_T, 通过 Sachs-Wolf 效应影响光子气体. 本文假设原初扰动是给定的. 下面首先计算密度扰动产生的极化，而残余引力波扰动情况的计算基本类似.

密度扰动源为 [21]

$$F_S(\tau) = \frac{1}{15}\zeta(k)k^2\tau\,. \tag{13}$$

这是时间 τ 的线性函数，其中 $\zeta(k)$ 是波数 k 的函数，与时间 τ 无关，可以由暴涨确定.

计算 $\xi(\tau)$. 把 $F_S(\tau)$ 带入 (11) 式，利用 (3) 式，有

$$\xi_S(\tau) = \frac{1}{15}\zeta(k)k^2e^{\kappa(\tau)}A(\tau)\,. \tag{14}$$

其中积分

$$A(\tau) = \int_0^\tau \tau' e^{-\kappa(\tau')}\mathrm{d}\tau'\,. \tag{15}$$

此积分难以给出严格解析解. 文 [11] 对积分 $\xi_S(\tau)$ 的近似处理是: 首先用退耦时刻的 $F(\tau_d)$ 代替被积函数因子 $F(\tau)$, 这相当于 $A(\tau) \simeq \tau_d\int_0^\tau e^{-\kappa(\tau')}\mathrm{d}\tau'$. 再作近似 $\dfrac{\mathrm{d}\kappa(\tau')}{\mathrm{d}\tau'} \simeq -\dfrac{\kappa(\tau')}{\Delta\tau_d}$. 而实际上在退耦附近，$(-\dfrac{\kappa(\tau')}{\Delta\tau_d})/\dfrac{\mathrm{d}\kappa(\tau')}{\mathrm{d}\tau'} \simeq z_d/\Delta z_d \sim 5 \gg 1$. 这两次近似误差较大，且不

能反映不同复合模型的影响. 下面我们将改进积分的近似处理. 将积分变量换为 z, 再把一般的光深公式 $\kappa(\tau')$ 带入上式

$$A(\tau)=-\frac{\tau_0^2}{2}\int_{\infty}^{z}(1+z)^{-2}\exp\left(-b(\frac{z}{1000}^{c})\right)\mathrm{d}z\,.$$

积分下线 $z=\infty$ 对应于 $\tau=0$. 我们的目的最终要积分出极化 β_S, 其被积函数中含有因子 $q(\tau')e^{-\frac{3}{10}\kappa(\tau,\tau')}$, 类似于可视函数 $q(\tau')e^{-\kappa(\tau,\tau')}$, 主要在退耦时刻附近 $z\approx(800\sim1400)$ 有贡献. 而 $A(\tau)$ 要出现在 β_S 的被积函数中, 与因子 $q(\tau')e^{-\frac{3}{10}\kappa(\tau,\tau')}$ 相乘, 所以 $A(\tau)$ 主要在退耦附近有贡献. 于是对 $A(\tau)$ 作近似处理, $(1+z)^{-2}\sim z^{-2}$. 再引入积分变量 $x\equiv(z/1000)^c$, 则光深函数为 $\kappa(\tau)=\mathrm{b}x$. 于是有:

$$A(\tau)\simeq-\frac{\tau_0^2}{2}10^{-3}c^{-1}\int_{\infty}^{x}x^{-(1+\frac{1}{c})}e^{-bx}\mathrm{d}x\,.$$

上式中的积分是不完全的 Γ 函数 (见文 [23] 的 P.317),

$$A(\tau)\simeq\frac{\tau_0^2}{2}10^{-3}c^{-1}\frac{1}{b^c}\Gamma(-\frac{1}{c},bx)\,.\tag{16}$$

得到 ξ_S

$$\xi_S(\tau)\simeq B(k)e^{bx}\Gamma(-\frac{1}{c},bx)\,,\tag{17}$$

其中

$$B(k)\equiv\frac{1}{15}\zeta(k)k^2\frac{\tau_0^2}{2}10^{-3}\frac{1}{c\,b^{1/c}}\,.\tag{18}$$

由近期 WMAP 的结果 [24], 退耦时刻红移 $z_d=1089\pm1$, 退耦红移宽度 $\Delta z_d=195\pm2$, 这相当于 $\tau_d\simeq3\times10^{-2}\tau_0$, $\Delta\tau_d\simeq2.7\times10^{-3}\tau_0$. 由此把上式中的 τ_0 写为 τ_d 和 $\Delta\tau_d$, 得到

$$B(k)\simeq\frac{50}{8.13c\,b^{1/c}}F_S(\tau_d)\Delta\tau_d\,.\tag{19}$$

下面由已知的 ξ_S 做积分, 来计算极化 $\beta(\tau')$.

计算 $\beta(\tau)$. 由 (3) 式, $\beta_S(\tau)$ 的积分式可化为

$$\beta_S(\tau)=-\frac{1}{10}e^{\frac{3}{10}\kappa(\tau)}\int_0^{\tau}q(\tau')\xi_S(\tau')e^{-\frac{3}{10}\kappa(\tau')}\mathrm{d}\tau'\,.$$

把 $\xi_S(\tau)$ 带入, 利用 $q(\tau')\mathrm{d}\tau'=-\mathrm{d}\kappa=-b\mathrm{d}x$, 得

$$\beta_S(\tau)\quad=\quad\frac{1}{10}e^{\frac{3}{10}\kappa(\tau)}bB(k)\int_{\infty}^{x}\Gamma(-\frac{1}{c},bx)e^{\frac{7}{10}bx}\mathrm{d}x\,.\tag{20}$$

这是任意时刻的结果. 取 $\tau=\tau_0$, $x=0$, 由 $\kappa(\tau_0)=0$, 得到极化:

$$\beta_S\equiv\beta_S(\tau_0)=-\frac{1}{10}bB(k)I(0)\,.\tag{21}$$

这里 (见文 [23] 的 P.663)

$$I(0) \equiv \int_0^\infty \Gamma(-\frac{1}{c}, bx) e^{\frac{7}{10}bx} \mathrm{d}x = b^{-1}\Gamma(1-\frac{1}{c})\, F(1-\frac{1}{c}, 1; 2; \frac{7}{10})\,. \tag{22}$$

把 $I(0)$ 和 $B(k)$ 带入 β_S 中，我们最终得到密度扰动产生极化的近似解析表达式为：

$$\beta_S = -CF_S(\tau_d)\Delta\tau_d\,, \tag{23}$$

其中系数

$$C \equiv \left(\frac{5}{8.13}\frac{1}{c\, b^{1/c}}\right)\Gamma(1-\frac{1}{c})\, F(1-\frac{1}{c}, 1; 2; \frac{7}{10})\,. \tag{24}$$

这个结果适用于一般的复合模型，宇宙学参数对于极化的影响，可以通过 b 和 c 直接反映出来. 对于固定的 b 值，随着 c 的增大，比例系数 C 减小，因而 β_S 的幅值也随之减小. 这是我们预期的物理行为： c 增大导致可视函数 $qe^{-\kappa}$ 曲线峰变得更窄，光子可能被 Thompson 散射时间间隔更短，产生的极化幅值就小. 在 Jones-Wyse 模型中，

$$\beta_S \simeq -0.075F_S(\tau_d)\Delta\tau_d\,. \tag{25}$$

Hu-Sugiyama 模型参数 b 和 c 依赖于重子量 Ω_b. 若取 $\Omega_b = 0.045$, 则 $b = 0.26$, $c = 10.42$,

$$\beta_S \simeq -0.119F_S(\tau_d)\Delta\tau_d\,. \tag{26}$$

Harari-Zaldarriaga[11] 给出的简单近似公式为： $\beta_S \simeq -0.17F_S(\tau_d)\Delta\tau_d$, 其幅值是我们结果的 1.5 倍至 2.3 倍. 在图 1 中，画出 Jones-Wyse 模型的系数 C 作为 c 的函数. 在图 2 中，画出 Hu-Sugiyama 模型的系数 C 作为 Ω_b 的函数. 显然 C 分别随 c 和 Ω_b 的增加而减小.

5　引力波产生的 CMB 极化

残余引力波所对应的原初扰动源为 [25,26]

$$F_T(\tau) = \frac{1}{2}h(k)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{3j_1(k\tau)}{k\tau}\right)\,. \tag{27}$$

这里 $h(k)$ 是残余引力波的波幅函数，依赖于波数 k, $j_1(x) = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\dfrac{\sin x}{x})$ 是球 Bessel 函数. 对于这样的扰动源难以直接积分. 残余引力波对于 CMB 极化的影响在长波阶段相对明显，所以我们计算在长波近似下的情形. 这时 $k\tau \ll 1$, 保留到两项，有

$$F_T(\tau) \simeq -\frac{1}{10}h(k)k^2\tau + \frac{1}{140}h(k)k^4\tau^3\,. \tag{28}$$

第一项扰动源 $F_T^{(1)} = -\frac{1}{10}h(k)k^2\tau$ 为主要贡献，是时间 τ 的线性函数，与密度扰动源相似，可以直接写出所产生的极化 $\beta_T^{(1)}$,

$$\beta_T^{(1)} = -CF_T^{(1)}(\tau_d)\Delta\tau_d = -\frac{3}{2}\frac{h(k)}{\zeta(k)}\beta_S\,, \tag{29}$$

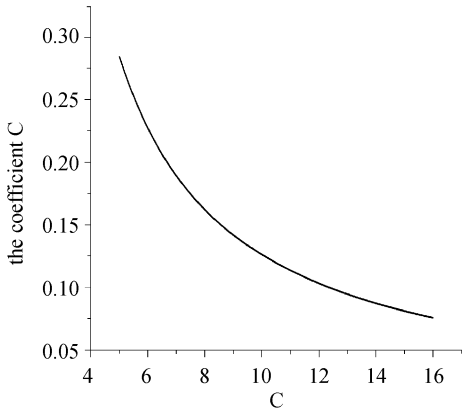

图 1 在 Jone-Wyse 模型中，公式 (24) 给出的极化系数 C 作为幂指数 c 的函数曲线

Fig. 1 The curve of the polarization coefficient C as a function of the power exponent c as given in the formula (24) in Jones-Wyse model

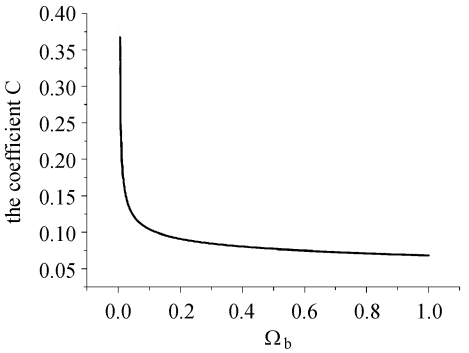

图 2 在 Hu-Sugiyama 模型中 $c = 16 + 1.8 \ln \Omega_b$, 公式 (24) 给出的极化系数 C 作为重子密度 Ω_b 的函数曲线

Fig. 2 The curve of the polarization coefficient C as a function of the baryon density Ω_b as given in the formula (24) in Hu-Sugiyama model with $c = 16 + 1.8 \ln \Omega_b$

其中 β_S 是密度扰动的结果. 需要说明的是, 这里的计算并不能直接确定密度扰动与引力波的相对大小 $\frac{h(k)}{\zeta(k)}$. 不同的暴涨模型对于这个比值有不同的理论预言. 而 CMB 极化研究的一个重要意义是，通过理论与观测的比较，可能区别出密度扰动与残余引力波的贡献 [27−30].

第二项扰动源 $F_T^{(2)} = \frac{1}{140} h(k) k^4 \tau^3$ 为较小的贡献，其函数形式是 $\propto \tau^3$, 不同于前面的第一项. 首先将 $F_T^{(2)}$ 代入 (11) 式中得

$$\xi_T^{(2)}(\tau) = \frac{1}{140} h(k) k^4 e^{\kappa(\tau)} \int_0^\tau \tau'^3 e^{-\kappa(\tau')} \mathrm{d}\tau' \,. \tag{30}$$

上式左边的积分类似于密度扰动计算中的积分 $A(\tau)$, 只是做替换, 把 $A(\tau)$ 的 $b^{-1/c} \to b^{-2/c}$ 和 $\Gamma(-\frac{1}{c}, bx) \to \Gamma(-\frac{2}{c}, bx)$. 再把时间 τ_0 分别用 τ_d 和 $\Delta\tau_d$ 表示，得

$$\xi_T^{(2)}(\tau) \simeq B_T^{(2)}(k) e^{bx} \Gamma(-\frac{2}{c}, bx) \,, \tag{31}$$

其中

$$B_T^{(2)}(k) \equiv F_T^{(2)}(\tau_d) \Delta\tau_d (\frac{10^3}{145.8} \frac{1}{c b^{2/c}}). \tag{32}$$

将 $\xi_T^{(2)}(\tau)$ 代入到 (12) 式，把积分变量换为 x, 并由 $q(\tau')\mathrm{d}\tau' = -b\mathrm{d}x$,

$$\beta_T^{(2)}(\tau) = \frac{1}{10} b B_T^{(2)}(k) \int_\infty^x \Gamma(-\frac{2}{c}, bx) e^{\frac{7}{10}bx} \mathrm{d}x \,. \tag{33}$$

利用 (22) 式，得引力波扰动第二项产生的极化：

$$\beta_T^{(2)} \equiv \beta_T^{(2)}(\tau_0) = -D F_T^{(2)}(\tau_d) \Delta\tau_d \,. \tag{34}$$

其中系数

$$D \equiv \left(\frac{10^2}{145.8}\frac{1}{c\,b^{2/c}}\right)\Gamma(1-\frac{2}{c})\,F(1-\frac{2}{c},1;2;\frac{7}{10}) \tag{35}$$

与 C 类似，也随参数 c 的增大而减小，因而 $\beta_T^{(2)}$ 的幅值也随之减小. 对 Jones-Wyse 模型， $D=0.22$. 对 Hu-Sugiyama 模型，若取 $\Omega_b=0.045$, 给出 $D=0.32$. 总之，残余引力波扰动产生的极化在长波近似下为

$$\beta_T \simeq -[CF_T^{(1)}(\tau_d)+DF_T^{(2)}(\tau_d)]\Delta\tau_d\,. \tag{36}$$

6　电场型与磁场型极化以及近期观测结果

在一般情况下，可以利用自旋权重球谐函数，由给定极化的 Stokes 参量构造出电场型极化 Δ_E 和磁场型极化 Δ_B. 其优点是可以区别标量扰动和张量扰动. 密度扰动仅产生电场型极化 Δ_E, 而不产生磁场型极化 Δ_B; 张量扰动既产生 Δ_E 也产生 Δ_B [31].

标量扰动情况：在复合时期长波极限下，由 β_S 直接得到与角度 $\mu=\cos\theta$ 有关的极化 $\Delta_P(k,\mu)$:

$$\Delta_P(k,\mu)=(1-\mu^2)e^{ik\mu(\tau_d-\tau_0)}\beta_S. \tag{37}$$

由此，利用自旋升算子连续两次作用在 $\Delta_P(k,\mu)$ 上，便得到所谓电场型极化，具体地有：

$$\Delta_E=\partial_\mu^2\left[-(1-\mu^2)\Delta_P(k,\mu)\right]=\partial_\mu^2\left[-(1-\mu^2)^2e^{ik\mu(\tau_d-\tau_0)}\beta_S\right]\,.$$

直接计算得到在长波极限下 β_S 与 Δ_E 之间简单的线性关系式

$$\Delta_E\simeq 4(1-3\mu^2)e^{ik\mu(\tau_D-\tau_0)}\beta_S\,.$$

Hu-Sujiyama 模型和 Harari-Zaldarriaga 模型与我们模型的差异仅是 β_S 的系数，因而，前两个模型的 Δ_E 的幅值是我们结果的 1.5 倍到 2.3 倍.

按照通常的定义，电场型极化的关联函数 $\langle\Delta_E\Delta_E\rangle$ 正比于 Δ_E 的幅值的平方. 然而 WMAP 观测未能提供这个电场型极化关联，目前尚无法与模型计算比较. WMAP 观测给出的是温度 - 电场型极化的交叉关联 $\langle\Delta_T\Delta_E\rangle$ 对应的功率谱：

$$C_{TE,l}=(4\pi)^2\int k^2\mathrm{d}k\,P(k)\Delta_{Tl}\Delta_{El}\,,$$

其中

$$\Delta_{El}=\frac{1}{\sqrt{4\pi(2l+1)}}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\sum_{m=-l}^{l}\int\mathrm{d}\Omega Y_{lm}^*\Delta_E\,,$$

相当于 Δ_E 在球谐函数为基的函数空间的投影， Δ_{Tl} 是类似的温度各向异性 ΔT 的投影，这里 $P(k)$ 是密度场的原初扰动谱，通常由暴涨模型提供. 需要说明的是，虽然不同暴涨模型给出的 $P(k)$ 有一定的差异，但其函数形式都接近于尺度不变谱. 最大的不确定性是，至今所有的暴涨模型理论计算出 $P(k)$ 的幅值高出实际观测限制几个量级. 在实际

计算时，通常采取的办法是任意调整其幅值. $C_{TE,l}$ 同时含有 $P(k)$ 和 β_S, 于是 β_S 系数有 $1\sim2$ 倍的差异难以显示. 另外，在观测得到 $l<20$ 的大尺度上 $C_{TE,l}$ 是很弥散的，表明宇宙曾经在红移 $z\sim17\pm3$ 时发生过再电离过程 [7]. 需要考虑再电离过程才能给出精确的分析. 这方面物理模型的研究刚刚开始，有许多未知的因素.

张量扰动可以产生磁场型极化，情况要更复杂一些. WMAP 尚未观测到磁场型极化. 由于 ΔT 和 Δ_E 具有正的宇称，而 Δ_B 具有负的宇称，所以涉及到磁场型极化的交叉关联 $\langle\Delta_T\Delta_B\rangle=0$, $\langle\Delta_E\Delta_B\rangle=0$. 只有磁场型极化的关联 $\langle\Delta_B\Delta_B\rangle\neq0$, 才有正比于 β_T 的平方，具体公式参见文 [31]. 在宇宙中残余引力波的直接探测比较困难 [32]. 目前期待未来的 CMB 探测能够直接观测磁场型极化，但是首先将要得到宇宙中残余引力波的信号. 这是 CMB 和残余引力波研究中一个重要问题.

7 讨论

本文研究了在宇宙早期复合阶段光子受到 Thompson 散射而产生 CMB 极化的问题. 从 Boltzmann 方程出发，对于一般的复合过程，分别计算了由原初的密度扰动和残余引力波引起的极化. 对于密度扰动, 通过对于积分式进行较仔细的处理, 得到了极化的近似解析式, 适用于一般的复合模型. 对于 Jones-Wyse 模型，我们的极化幅值比 Harari-Zaldarriaga 的简单近似解析公式要小 2.3 倍. 对于 Hu-Sugiyama 模型，当取重子密度为 $\Omega_b=0.045$ 时，我们的极化幅值比 Harari-Zaldarriaga 的简单近似解析公式要小 1.5 倍. 对于残余引力波扰动，我们讨论了长波近似情况，把原初扰动对波数做幂级数展开，保留到两项，分别积分得到了极化的近似解析式，也依赖于复合模型. 其中第一项的结果与密度扰动的结果类似，第二项的系数 D 不同于第一项的系数 C. 我们的近似解析解清楚地表明，无论密度扰动还是引力波扰动，当光深函数的参数 c 减小时，复合过程的可视函数曲线峰变得更窄，退耦时间间隔缩短，因而 Thompson 散射所产生的极化幅值减小. 本文最后还简短指出了电场型极化和磁场型极化的观测现状，以及与 β 的关系.

参 考 文 献

1 Smoot G F. ApJ, 1992, 396: L1
2 Halverson N W, et al. ApJ, 2002, 568: 38
3 Mauskopf P D, et al. ApJ, 2000, 536: L59
4 Lee A T, et al. ApJ, 2001, 561: L1
5 Hinshaw G, et al. astro-ph/0302222
6 Verde L, et al. astro-ph/0302218
7 Kugot A, et al. astro-ph/0302213
8 Page L, et al. astro-ph/0302220
9 Peiris H V. et al. astro-ph/0302225
10 Hu W, Sugiyama N. ApJ, 1995, 444: 489
11 Harari D, Zaldarriaga M. Phys Lett B, 1993, 319: 96
12 Zaldarriaga M, Harari D. Phys Rev D, 1995, 52: 3276
13 Peebles P J E. ApJ, 1968, 153: 1
14 Jones B, Wyse R. A&A, 1985, 149: 144

15 Sunyaev R, Zeldovich Y. Astrophys Space Sci, 1970, 7: 3
16 Polnarev A G. Sov Astron, 1985, 29: 607
17 Basko M M, Polnarev A G. MNRAS, 1980, 191: 207
18 Chandrasekhar S. Radiative Transfer. New York: Dover, 1960, 1
19 Frewin R A, Polnarev A G. Coles P. MNRAS, 1994, 266: L21
20 Keating B, Timbie P, Polnarev A, et al. ApJ, 1998, 495: 580
21 Bardeen J. Phys Rev D, 1980, 22: 1182
22 Parker L, Zhang Y. Phys Rev. 1991, D44: 2421; Phys Rev, 1993, D47: 416
23 Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series, and Products. Academic Press 1980
24 Spergel D N, et al. astro-ph/0302209
25 Starobinsky A A. JEPT Lett, 1979, 30: 682
26 Abbott L F, Wise M B. Nucl Phys, 1984, B224: 541; Phys Lett, 1984, 135B: 279
27 Lidsey J E, Coles P. Mon Not Astron Soc, 1992, 258: 57
28 Crittenden R G, Coulson D, Turok N G. Phys Rev, 1995, D52: 5402
29 Crittenden R G, Bond R, Davis R, et al. Phys Rev Lett, 1993, 71: 324
30 Ng K L, Ng K W. ApJ, 1996, 456: 413
31 Zaldariiage M, Seljak U. Phys Rev, 1997, D55: 1830
32 Zao Wen, Zhang Yang. AcASn Suppl, 2003, 44: 273 (赵文，张杨. 天文学报增刊， 2003, 44: 273)

An Approximate Analytic Formula for Polarization of Cosmic Microwave Background Radiation

ZHANG Yang HAO Heng ZHAO Wen
(*Centre for Astrophysics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026)

Abstract During the decoupling process in the early Universe, photons were interacting with electrons by Thompson scattering. The anisotropies in the spatial distribution of photon gas will give rise to a net polarization of photon gas after this scattering. This is the origin of the polarization of the Cosmic Microwave Backgroud (CMB) radiation that has just been observed recently. There has been a simple approximate analytic solution of polarization consisting of the primordial perturbation at the peak of the decoupling, multiplying the decoupling duration. In this paper, starting from the Boltzmann equation for the photons, we calculate analytically the CMB polarizations caused by the scalar and tensor types of the primordial perturbations for a general expression for the optical depth function, and the results are valid for a generic recombination process. For the scalar type of perturbations F_S, the resulting approximate analytical polarization is $\beta_S \simeq -CF_S(\tau_d)\Delta\tau_d$, where τ_d and $\Delta\tau_d$ are the decoupling time and the decoupling duration, respectively, and $C \simeq (0.08 \sim 0.12)$ depending on recombination models. For the tensorial type of perturbations, the calculation is a bit more complicated, and we do it in the long wave-length limit. By expanding the perturbation function in terms of the wave number and keeping the first two terms $F_T \simeq F_T^{(1)} + F_T^{(2)}$, we integrate and obtain the analytic expressions for the polarizations, $\beta_T \simeq -[CF_T^{(1)}(\tau_d) + DF_T^{(2)}(\tau_d)]\Delta\tau_d$, where $D \simeq (0.22 \sim 0.32)$, also depending on recombination models. Our results may help to interpret the observed temperature-polarization cross correlation, and to disentangle the contribution by relic gravitational waves from that by density perturbations to the polarization and temperature anisotropies of CMB.

Key words cosmic microwave background, early Universe, cosmological parameters