第 46 卷 第 2 期 天 文 学 报 Vol.46 No.2
2005 年 4 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Apr., 2005

CORIOLIS 力和离心力摄动对 Robe 问题平动点位置和线性稳定性的影响*

舒斯会 [1,2] 陆本魁 [1]

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210008)
(2 江西科技师范学院 南昌 330013)

摘要 研究了 Coriolis 力和离心力摄动对 Robe 限制性三体问题主要平动点位置及线性稳定性的影响, 给出了 Robe 限制性三体问题主要平动点的摄动位置和 Coriolis 力和离心力摄动对主要平动点位置和线性稳定的影响量级. 改进了 Shrivastava 的结果.

关键词 天体力学: 限制性三体问题, 平动点, 线性稳定
中图分类号: P 132; **文献标识码:** A

1 引言

Robe[1] 提出了一种考虑浮力的限制性三体问题模型, 设一主物体 m_1^* 有一刚体圆形壳 m_1, 里面充满密度为 ρ_1 的均匀不可压缩流体, 另一主物体 m_2(质点) 在壳的外面且 m_2 绕 m_1^* 作 Keplerian 运动. 第三体 m_3 是一个密度为 ρ_3 的固体小圆球, 它在壳的里面, 并假设 m_3 的尺度和质量为无穷小, m_3 在 m_1^* 中流体重力引力、 m_2 的引力和 m_1^* 中流体对它的浮力作用下运动. 在文 [1] 中给出了运动方程的平动点及稳定性, 得到 m_1^* 的中心是 m_3 的一个平动点, 并在一定的假设条件下给出了平动点的线性稳定域. 该模型可用于研究地球核受月球吸引而产生震荡情况及在地球中心 (Robe 问题的平动点) 的稳定性. 还可用于研究人造卫星在大气中 (考虑大气浮力) 的运动.

此后, 许多作者对 Robe 限制性三体问题模型进行了进一步的研究. 文 [2] 的作者系统讨论了 Robe 问题的平动点及其稳定性, 得到了除 m_1^* 中心外的其他的平动点. 并讨论了其稳定性. 在文 [3] 中作者把主物体 m_1^* 描述为一个 Roche 椭圆 (旋转流体平衡态), 给出了一类新的 Robe 限制性三体问题模型, 称为 Robe-Roche 限制性三体问题模型, 并讨论了其平动点及其稳定性, 得到了椭圆中心为 Robe-Roche 问题的平动点且此平动点是线性稳定的. 文 [4-6] 中作者分别用不同的方法讨论了一致旋转媒介阻力和惯性阻力摄动对 Robe 限制性三体问题平动点和 Robe–Roche 限制性三体问题平动点 (椭圆中心) 稳定性的影响, 得出 Robe 限制性三体问题平动点 (m_1^* 的中心) 在这些阻力的影响下的线性稳定域.

2004-03-05 收到原稿, 2004-06-29 收到修改稿
* 国家自然科学基金和江西科技师范学院科研资助项目

在文 [7] 中作者研究了 Coriolis 力和离心力摄动对经典限制性三体问题三角平动点的位置及稳定性的影响，类似地，文 [8] 中作者在 $e=0\,(m_2$ 绕 m_1 作圆运动) 且 $K=0\,(m_1$ 和 m_3 密度相等) 的情况下，讨论了 Coriolis 力和离心力摄动对 Robe 限制性三体问题主要平动点 (m_1^* 的中心) 位置的影响，给出了平动点的摄动位置. 但文 [8] 中的假设条件 $K=0$ 在实际应用中难以满足. 这里我们继续文 [8] 的工作，讨论在更一般的条件 $e=0$ 且 $K\geq 0\,(\rho_1\leq\rho_3)$ 下 Coriolis 力和离心力摄动对 Robe 限制性三体问题平动点 (m_1^* 的中心) 位置和线性稳定性的影响. 给出了受摄 Robe 问题平动点存在条件和 Robe 限制性三体问题主要平动点 (m_1^* 的中心) 的摄动位置和线性稳定性及其影响量级.

2 受摄运动方程

在 Robe 问题中，假设 m_2 绕 m_1^* 作真近点角为 v, 偏心率为 e, 半长径为 a, 相互之间的距离为 l 的 Keplerian 运动. 取 m_1 与 m_2 的轨道面为 XY 平面， m_1^* 和 m_2 的质心为坐标原点， m_1^* 与 m_2 的中心连线为 x 轴，单位取法同经典三体问题，并设 $e=0\,(m_2$ 绕 m_1^* 作圆运动), 则在会合坐标系下， m_3 的运动方程为 [1]

$$\begin{aligned}\ddot{x}-2\dot{y}-x&=\frac{\partial V}{\partial x},\\ \ddot{y}+2\dot{x}-y&=\frac{\partial V}{\partial y},\\ \ddot{z}&=\frac{\partial V}{\partial z},\end{aligned}\tag{1}$$

这里

$$V=\frac{\mu}{\{(1-\mu-x)^2+y^2+z^2\}^{1/2}}-\frac{K}{2}\{(x+\mu)^2+y^2+z^2\},$$

其中 $\mu=\dfrac{m_2}{m_1^*+m_2}$, $0<\mu<1$ 和 $K=\dfrac{4\pi}{3}\rho_1\left(1-\dfrac{\rho_1}{\rho_3}\right)$.

考虑摄动参数分别为 α,β 的 Coriolis 力和离心力摄动则受摄运动方程为 [8]

$$\begin{aligned}\ddot{x}-2\alpha\dot{y}-\beta x&=\frac{\partial V}{\partial x},\\ \ddot{y}+2\alpha\dot{x}-\beta y&=\frac{\partial V}{\partial y},\\ \ddot{z}&=\frac{\partial V}{\partial z},\end{aligned}\tag{2}$$

这里 $\alpha=1+\varepsilon$, $|\varepsilon|<<1$; $\beta=1+\varepsilon'$, $|\varepsilon'|<<1$.

3 摄动对平动点的位置的影响

文 [8] 中作者在 $e=0$, $K=0\,(\rho_1=\rho_3\ )$ 的情况下，得到了受 Coriolis 力和离心力摄动的平动点 $(-\mu,0,0)$ 的摄动位置为 $\left(-\mu+\dfrac{\mu\varepsilon'}{1+2\mu},0,0\right)$. 这里我们继续讨论在 $e=0$,

$K \geq 0$　$(\rho_1 \leq \rho_3)$ 的情况下 Coriolis 力和离心力摄动对 Robe 问题平动点存在性的影响，并给出平动点 $(-\mu, 0, 0)$ 的摄动位置及其影响量级．以下我们都设 $K \geq 0$.

在 (2) 式中，令 $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ 得平动点满足下列方程

$$\beta x - \frac{\mu(x-1+\mu)}{[(1-\mu-x)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - K(x+\mu) = 0\,, \tag{3}$$

$$\beta y - \frac{\mu y}{[(1-\mu-x)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - Ky = 0\,, \tag{4}$$

$$-\frac{\mu z}{[(1-\mu-x)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - Kz = 0\,, \tag{5}$$

由方程 (5) 解得 $z = 0$, 即平动点都在 XY 平面上．又由方程 (4) 解得

$$y = 0\,,$$

或

$$\beta - \frac{\mu}{[(1-\mu-x)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - K = 0\,, \tag{6}$$

先考虑当 (6) 式成立时，将 (6) 式代入方程 (3) 得当 $K = (1-\mu)\beta$, 即由 K 的定义知当 $\dfrac{1}{4} < \rho_1 = \dfrac{l}{2(1+\sqrt{1-l/\rho_3}} < \dfrac{1}{2}$ $(l = (1-\mu)\beta \approx 1)$ 时，存在平动点 $\{(x,y,0) \mid (1-\mu-x)^2+y^2 = \beta^{-2/3}\}$, 它们是文 [2] 中在无摄情况下平动点 $\{(x,y,0) \mid (1-\mu-x)^2+y^2 = 1, K = (1-\mu)\}$ 的摄动解, 这时 Coriolis 力和离心力摄动对平动点位置的影响量级为 $O(\varepsilon')$.

下面讨论平动点 $\{(x,y,0) \mid (1-\mu-x)^2+y^2 = \beta^{-2/3}\}$ 的稳定性，显然平动点可表示为 $(1-\mu-\beta^{-2/3}\cos\varphi, \beta^{-2/3}\sin\varphi, 0)$, 我们知道平动点的线性稳定性由其变分方程的特征方程来决定，经计算上述平动点的变分方程的特征方程为 (保留 ε', ε 的一阶)

$$\lambda^4 + (4 + 8\varepsilon - 3\mu + 3\mu\varepsilon')\lambda^2 - 3\mu\varepsilon' = 0$$

由于 $|\varepsilon| << 1, |\varepsilon'| << 1$ 故易知当 $\varepsilon' > 0$ 时，平动点线性稳定；当 $\varepsilon' \leq 0$ 时，平动点不稳定．由文 [2] 知平动点 $\{(x,y,0) | (1-\mu-x)^2+y^2 = 1, K = (1-\mu)\}$ 是不稳定的，于是可得结论：当 $\varepsilon' > 0$ 时 Coriolis 力和离心力摄动使不稳定的平动点 $\{(x,y,0) | (1-\mu-x)^2+y^2 = 1, K = (1-\mu)\}$ 变得线性稳定.

再考虑当 $y = 0$ 时，这时系统 (2) 只有共线平动点，且由方程 (3) 式知平动点的 x 坐标满足

$$\beta x + \frac{\mu}{(1-\mu-x)^2} - K(x+\mu) = 0\,, \tag{7}$$

即

$$[(\beta - K)x - \mu K](x-1+\mu)^2 + \mu = 0\,, \tag{8}$$

显然共线平动点的位置完全由方程 (8) 式的实数解决定，又 Robe 问题平动点在圆壳内才有意义，所以我们只讨论 $x < 1-\mu$ (在 m_2 的左边) 的情况.

下面分 3 种情况考虑： 1) 当 $\beta-K=0$ 时，方程 (8) 式在 $(-\infty,1-\mu)$ 内有唯一的实解 x_0, 即系统 (2) 有唯一的共线平动点 $(x_0,0,0)$. 且由方程 (8) 式解得 (保留 ε' 的一阶)$x_0=-\mu+\dfrac{\varepsilon'}{2}$.

2) 当 $\beta-K>0$ 时，令

$$f(x)=[(\beta-K)x-\mu K](x-1+\mu)^2+\mu\,, \tag{9}$$

则

$$f'(x)=3(\beta-K)(x-x_1)(x-x_2)\,, \tag{10}$$

其中 $x_1=(1-\mu)$, $x_2=\dfrac{(\beta-K)(1-\mu)+2\mu K}{3(\beta-K)}$ 且 $x_1-x_2=\dfrac{2[(\beta-K)-\mu\beta]}{3(\beta-K)}$.

分别对 $\beta-K\geq\mu\beta$ 和 $0<\beta-K<\mu\beta$ 两种情况讨论，由 $f(x)$ 在 $(-\infty,1-\mu)$ 的单调性和连续函数的介值定理知 $f(x)$ 在 $(-\infty,1-\mu)$ 内有唯一的实解 x_0, 于是有当 $\beta-K>0$ 时，系统 (2) 在圆壳内有唯一的共线平动点 $(x_0,0,0)$.

又因为 $f(-\mu)=-\varepsilon'\mu, f(-\mu+\varepsilon')=\varepsilon'[(1+\varepsilon'-\varepsilon'^2)\mu+(\beta-K)(1-\varepsilon')^2]$, 所以 $f(-\mu)f(-\mu+\varepsilon')<0$, 故 x_0 在 $-\mu,-\mu+\varepsilon'$ 之间. 现令 $x_0=-\mu+\rho$, 于是有 $|\rho|<|\varepsilon'|<<1$. 将 x_0 代入方程 (8) 解得 (保留 ρ,ε' 的一阶)

$$\rho=\frac{\mu\varepsilon'}{1+2\mu-K}\,,$$

即

$$x_0=-\mu+\frac{\mu\varepsilon'}{1+2\mu-K}\,,$$

综合上述 1) 和 2) 两种情况，于是有当 $\beta-K\geq 0$, 即 $\rho_1\leq\dfrac{l}{2(1+\sqrt{1-l/\rho_3})}$ 或 $\rho_3\geq\rho_1\geq\dfrac{l}{2(1-\sqrt{1-l/\rho_3})}$ 时，系统 (2) 在圆壳内 $(x<1-\mu)$ 有唯一共线平动点 $(x_0,0,0)=\left(-\mu+\dfrac{\mu\varepsilon'}{1+2\mu-K},0,0\right)$. 它是无摄平动点 $(-\mu,0,0)$ 的摄动解，由此可知：Coriolis 力和离心力摄动对平动点 $(-\mu,0,0)$ 位置的影响量级为 $O(\varepsilon')$. 注：当 $K=0$ 时，即得文 [8] 的主要结果. 这里所用的方法更直接，更简单.

下面讨论 Coriolis 力和离心力摄动对上述平动点 $(x_0,0,0)$ 的线性稳定性经影响，简单计算可得平动点 $(x_0,0,0)$ 的特征方程为 (保留 ε',ε 的一阶)

$$\begin{aligned}&\lambda^4+[(2-\mu+2K)+8\varepsilon-2\varepsilon')]\,\lambda^2+\\&\left[1+2\mu-K+\left(1-\frac{\mu^2}{1+2\mu-K}\right)\varepsilon'\right]\left[1-\mu-K+\left(1-\frac{3\mu^2}{2(1+2\mu-K)}\right)\varepsilon'\right]=0\,,\end{aligned}$$

则平动点 $(x_0,0,0)$ 的线性稳定的条件为

$$1+2\mu-K+\left(1-\frac{\mu^2}{1+2\mu-K}\right)\varepsilon'<0\quad\text{或}\quad 1-\mu-K+\left(1-\frac{3\mu^2}{2(1+2\mu-K)}\right)\varepsilon'>0\,,$$

且

$$16K+(9\mu-8)\mu+16(2-\mu+2K)\varepsilon-\left[4-\frac{(5-8\mu-5K)\mu^2}{2(1+2\mu-K)}\right]\varepsilon'>0\,,$$

与无摄时平动点 $(-\mu,0,0)$ 的线性稳定域相比[1], Coriolis 力和离心力摄动对平动点 $(-\mu,0,0)$ 的线性稳定的影响量级为 $\mathrm{Max}\{O(\varepsilon),O(\varepsilon')\}$.

3) 当 $\beta-K<0$ 时，由 (10) 式知 $x_1>x_2$, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_2)$ 单调递减，在 (x_2,x_1) 单调递增，又由 (9) 式有 $f(-\infty)=+\infty$, $f(x_2)=\dfrac{4}{27}\dfrac{[(\beta-K)-\mu\beta]^3}{(\beta-K)^2}+\mu$, $f(x_1)=\mu$. 所以系统 (2) 的共线平动点存在性由 $f(x_2)$ 的符号决定，有下列结论：

当 $f(x_2)>0$ 时，系统 (2) 在圆壳内没有共线平动点.

当 $f(x_2)<0$ 时，系统 (2) 在圆壳内有两个共线平动点.

当 $f(x_2)=0$ 时，系统 (2) 在圆壳内有唯一共线平动点.

现令

$$g(K)=f(x_2)=\frac{4}{27}\frac{[(\beta-K)-\mu\beta]^3}{(\beta-K)^2}+\mu \tag{11}$$

上式对 K 求导得

$$g'(K)=-\frac{4}{27}\frac{[(\beta-K)-\mu\beta]^2}{(\beta-K)^3}(\beta-K+2\mu\beta)\,. \tag{12}$$

由 (12) 式易知 $f(x_2)=g(K)$ 的最大值为 $g(\beta+2\mu\beta)=(1-\beta)\mu$ 于是有

(a) 当 $\beta=1$ (无摄情况) 时，若 $K\neq\beta+2\mu\beta$ 时， $f(x_2)=g(K)<g(\beta+2\mu\beta)=0$, 系统 (2) 存在两个共线平动点 $(-\mu,0,0)$ 和 $(x_3,0,0)$[2]. 其中

$$x_3=\frac{-2+\mu+2K-2K\mu-\sqrt{\mu(-4+4K+\mu)}}{2(K-1)}\,.$$

若 $K=\beta+2\mu\beta$ 时， $f(x_2)=0$, 这时 $x_3=-\mu$, 系统 (2) 存在唯一的共线平动点 $(-\mu,0,0)$.

(b) 当 $\beta<1(\varepsilon'<0)$ 且 $K=\beta+2\mu\beta$ 时， $f(x_2)=g(\beta+2\mu\beta)=(1-\beta)\mu>0$, 又由 $g(K)$ 的单调性, 连续性知存在 $\alpha_1,\alpha_2>0$ 使得当 $K\in(\beta+2\mu\beta-\alpha_1,\beta+2\mu\beta+\alpha_2)$ 时 (其中 $\alpha_1,\alpha_2>0$ 满足 $g(\beta+2\mu\beta-\alpha_1)=0$, $g(\beta+2\mu\beta+\alpha_2)=0$), 有 $f(x_2)=g(K)>0$, 于是系统 (2) 没有共线平动点, 这时摄动力使 Robe 问题共线平动点 $(-\mu,0,0)$ 和 $(x_3,0,0)$ 消失. 其中 $\alpha_i=(-1)^i2\sqrt{3}\mu\sqrt{-\varepsilon'}$ (保留 $\alpha_1,\alpha_2,\varepsilon'$ 的二阶). 于是有结论当 $\rho_1\approx\dfrac{l}{2(1+\sqrt{1-l/\rho_3})}$ ($l=(1+2\mu)\beta$) 时， Coriolis 力和离心力摄动使 Robe 问题共线平动点 $(-\mu,0,0)$ 和 $(x_3,0,0)$ 消失.

(c) 当 $\beta>1\,(\varepsilon'>0)$; 或 $\beta<1\,(\varepsilon'<0)$ 且 $K\notin(\beta+2\mu\beta-\alpha_1,\beta+2\mu\beta+\alpha_2)$ 时，$f(x_2)=g(K)<0$, 系统 (2) 存在两个共线平动点. 显然它们分别为无摄情况下两个平动点 $(-\mu,0,0)$ 和 $(x_3,0,0)$ 的摄动解. 下面讨论在 (c) 条件下平动点 $(-\mu,0,0)$ 的摄动解.

(i) 当 $\beta>1(\varepsilon'>0)$, $\beta-K+2\mu\geq0$ 时，由 (9) 式有

$$f(-\mu)=-\varepsilon'\mu<0,\quad f(-\mu+\sqrt{\varepsilon}')>[2\mu+(\beta-K)](\sqrt{\varepsilon}'-2\varepsilon'+\varepsilon'\sqrt{\varepsilon}')\geq0\,,$$

故 $f(x)$ 在 $-\mu,-\mu+\sqrt{\varepsilon'}$ 之间存在一个实解 x_0. 令 $x_0=-\mu+\rho_1$, 显然 $\rho_1>0,\rho_1^2<\varepsilon'$, 将 x_0 代入 (8) 式解得 (保留 ρ_1 的二阶, ε' 的一阶)

$$\rho_1=\frac{(2\mu+(\beta-K))-\sqrt{(2\mu+(\beta-K))^2-4\mu((\mu+2(\beta-K))\varepsilon'}}{2(\mu+2(\beta-K))}\,, \tag{13}$$

这时平动点 $(-\mu,0,0)$ 的摄动解为 $(-\mu+\rho_1,0,0)$.

(ii) 当 $\beta>1(\varepsilon'>0)$, $\beta-K+2\mu<0$, 有

$$f(-\mu)=-\varepsilon'\mu<0,\quad f(-\mu-\sqrt{\varepsilon'})>-[2\mu+(\beta-K)](\sqrt{\varepsilon'}+2\varepsilon'+\varepsilon'\sqrt{\varepsilon'})>0\,,$$

故 $f(x)$ 在 $-\mu,-\mu-\sqrt{\varepsilon'}$ 之间存在一个实解 x_0, 令 $x_0=-\mu+\rho_2$, 显然 $\rho_2<0,\rho_2^2<\varepsilon'$ 将 x_0 代入 (8) 式解得 (保留 ρ_2 的二阶, ε' 的一阶)

$$\rho_2=\frac{(2\mu+(\beta-K))+\sqrt{(2\mu+(\beta-K))^2-4\mu((\mu+2(\beta-K))\varepsilon'}}{2(\mu+2(\beta-K))}\,, \tag{14}$$

这时平动点 $(-\mu,0,0)$ 的摄动解为 $(-\mu+\rho_2,0,0)$.

由数值计算有当 $\varepsilon'=(0.001)^2$, $\mu=0.03$, $K=\beta+1.999\mu$, 方程 (8) 在 $x_0=-\mu$ 附近的解为 $x_1=-0.0295658=-\mu+0.0004342$, 影响量 $\Delta x=0.0004342$ 的量级近似为 $O(\sqrt{\varepsilon'})$.

综上所述我们有当 $\beta>1$ 时, Coriolis 力和离心力摄动对平动点 $(-\mu,0,0)$ 位置的影响量级为 $O(\sqrt{\varepsilon'})$.

(iii) 当 $\beta<1(\varepsilon'<0)$,$\beta-K+2\mu>5\mu\sqrt{-\varepsilon'}$, $(K\notin(\beta+2\mu\beta-\alpha_1,\beta+2\mu\beta+\alpha_2))$ 时, 由 (9) 式有

$$f(-\mu)=-\varepsilon'\mu>0,\quad f(-\mu-\sqrt{-\varepsilon'})<\mu\varepsilon'+6\mu\varepsilon'\sqrt{-\varepsilon'}-5\mu\varepsilon'^2<0$$

故 $f(x)$ 在 $-\mu,-\mu-\sqrt{-\varepsilon'}$ 之间存在一个实解 x_0, 同理 (13) 式可得平动点 $(-\mu,0,0)$ 的摄动解为 $(-\mu+\rho_1,0,0)$, 其中 ρ_1 由 (13) 式表示且 $\rho_1<0,\rho_1^2<-\varepsilon'$.

(iv) 当 $\beta<1(\varepsilon'<0)$, $\beta-K+2\mu<-5\mu\sqrt{-\varepsilon'}$, $(K\notin(\beta+2\mu\beta-\alpha_1,\beta+2\mu\beta+\alpha_2))$ 时, 有

$$f(-\mu)=-\varepsilon'\mu>0,\quad f(-\mu+\sqrt{-\varepsilon'})<\mu\varepsilon'(1-6\mu\sqrt{-\varepsilon'}-5\mu\varepsilon')<0\,,$$

故 $f(x)$ 在 $-\mu,-\mu+\sqrt{-\varepsilon'}$ 之间存在一个实解 x_0, 同理 (14) 式得平动点 $(-\mu,0,0)$ 的摄动解为 $(-\mu+\rho_2,0,0)$, 其中 ρ_2 由 (14) 式表示且 $\rho_2>0,\rho_2^2<-\varepsilon'$.

(v) 当 $\beta<1(\varepsilon'<0)$, $|\beta-K+2\mu|\le5\mu\sqrt{-\varepsilon'}$, $(K\notin(\beta+2\mu\beta-\alpha_1,\beta+2\mu\beta+\alpha_2))$ 时, 由 $f(x_2)<0$ 知 $f(x)$ 在 $-\mu$, x_2 之间存在一个实解 x_0, 又

$$x_2+\mu=\frac{(\beta-K)(1-\mu)+2\mu K}{3(\beta-K)}+\mu=\frac{(\beta-K)+2\mu\beta}{3(\beta-K)}\,, \tag{15}$$

由 (15) 式和 $|\varepsilon'|<<1$ 得

$$|x_2+\mu|<\frac{5\sqrt{-\varepsilon'}\mu+2\mu\,|\varepsilon'|}{3(2\mu-5\mu\sqrt{-\varepsilon'})}=\sqrt{-\varepsilon'}\frac{5+2\sqrt{-\varepsilon'}}{6-10\sqrt{-\varepsilon'}}<\sqrt{-\varepsilon'}\,,$$

所以 x_0 与 $-\mu$ 之差小于 $\sqrt{-\varepsilon'}$.

(vi) 当 $\alpha_1 \le (\beta-K)+2\mu < 5\mu\sqrt{-\varepsilon'}$ 时, 平动点 $(-\mu,0,0)$ 的摄动位置为 $(-\mu+\rho_1,0,0)$, 其中 ρ_1 由 (13) 式表示且 $\rho_1<0, \rho_1^2<-\varepsilon'$.

(vii) 当 $-\alpha_2 \ge (\beta-K)+2\mu > -5\mu\sqrt{-\varepsilon'}$ 时, 平动点 $(-\mu,0,0)$ 的摄动位置为 $(-\mu+\rho_2,0,0)$, 其中 ρ_2 由 (14) 式表示且 $\rho_2>0, \rho_2^2<-\varepsilon'$.

由数值计算有当 $\varepsilon'=-(0.001)^2$, $\mu=0.03$, $K=\beta+2.00347\mu$, 方程 (8) 在 $x_0=-\mu$ 附近的解为 $x_1=-0.0294519=-\mu+0.0005481$, 影响量 $\Delta x=0.0005481$ 的量级近似为 $O(\sqrt{-\varepsilon'})$.

故综上 (i)—(vii) 所述, 当 $\beta<1$, $K\notin(\beta+2\mu\beta-\alpha_1, \beta+2\mu\beta+\alpha_2)$ 时, Coriolis 力和离心力摄动对平动点 $(-\mu,0,0)$ 位置的影响量级为 $O(\sqrt{-\varepsilon'})$. 且同理上述情况 2) 的稳定性讨论不难得 Coriolis 力和离心力摄动对平动点 $(-\mu,0,0)$ 的线性稳定影响量级为 $\mathrm{Max}\{O(\sqrt{|\varepsilon|}, O(\sqrt{|\varepsilon'|})\}$.

4　小结

在文 [8] 中作者在 $e=0$, $K=0$ 的情况下讨论了 Coriolis 力和离心力摄动下 Robe 限制性三体问题平动点 $(-\mu,0,0)$ 的摄动位置. 这里我们在更一般地 $e=0$, $K\ge 0$ 情况下, 继续讨论了 Coriolis 力和离心力摄动对 Robe 限制性三体问题平动点的存在性及其平动点 $(-\mu,0,0)$ 位置的影响及对平动点 $(-\mu,0,0)$ 线性稳定影响. 得到了 Robe 问题平动点存在的条件, 给出了平动点 $(-\mu,0,0)$ 的摄动位置和摄动力对平动点 $(-\mu,0,0)$ 位置的影响量级和对平动点 $(-\mu,0,0)$ 线性稳定影响量级, 改进了文 [8] 中的结果. 主要结论有:

(1) 当 $K=(1-\mu)\beta$, 即 $\dfrac{1}{4}<\rho_1=\dfrac{l}{2(1+\sqrt{1-l/\rho_3})}<\dfrac{1}{2}$ (其中 $l=(1-\mu)\beta\approx 1$) 时, XY 平面上满足方程 $(1-\mu-x)^2+y^2=(1-1/3\varepsilon')^2$ 的所有点为系统 (2) 的平动点. 它们是无摄情况时平动点 $\{(x,y,0)|(1-\mu-x)^2+y^2=1, K=(1-\mu)\}$ 的摄动解 [2]. 这时 Coriolis 力和离心力摄动对平动点位置的影响量级为 $O(\varepsilon')$, 且当 $\varepsilon'>0$ 时 Coriolis 力和离心力摄动使不稳定的平动点 $\{(x,y,0)|(1-\mu-x)^2+y^2=1, K=(1-\mu)\}$ 变得稳定.

(2) 当 $\beta-K\ge 0$, 即 $\rho_1\le\dfrac{\beta}{2(1+\sqrt{1-\beta/\rho_3})}$ 或 $\rho_3\ge\rho_1\ge\dfrac{\beta}{2(1-\sqrt{1-\beta/\rho_3})}$ 时, 系统 (2) 在圆壳内存在唯一的平动点 $(-\mu+\dfrac{\mu\varepsilon'}{1+2\mu-K},0,0)$, 它是无摄时的平动点 $(-\mu,0,0)$ 的摄动位置. 这时 Coriolis 力和离心力摄动对平动点 $(-\mu,0,0)$ 位置的影响量级为 $O(\varepsilon')$, 且对平动点 $(-\mu,0,0)$ 线性稳定影响量级为 $\mathrm{Max}\{O(\varepsilon), O(\varepsilon')\}$. 若 $K=0$, 即为文 [8] 的主要结果.

(3) 当 $\beta-K<0$, 即 $\dfrac{\beta}{2(1-\sqrt{1-\beta/\rho_3})}>\rho_1>\dfrac{\beta}{2(1+\sqrt{1-\beta/\rho_3})}$ 时有

(a) 若 $\beta<1$, $K\in(\beta+2\mu\beta-\alpha_1, \beta+2\mu\beta+\alpha_2)$, 即 $\rho_1\approx\dfrac{l}{2(1+\sqrt{1-l/\rho_3})}$ $(l=(1+2\mu)\beta)$ 时, 系统 (2) 没有平动点. 这时 Coriolis 力和离心力摄动使 Robe 问题无摄时的平动点 $(-\mu,0,0)$ 和 $(x_3,0,0)$ 消失.

(b) 若 $\beta > 1$ 或 $\beta < 1$, $K \notin (\beta + 2\mu\beta - \alpha_1, \beta + 2\mu\beta + \alpha_2)$, 系统 (2) 存在两个的平动点. 它们是无摄时的平动点 $(-\mu, 0, 0)$ 和 $(x_3, 0, 0)$ 的摄动解. 这时 Coriolis 力和离心力摄动对平动点 $(-\mu, 0, 0)$ 位置的影响量级为 $O(\sqrt{|\varepsilon'|})$, 且对平动点 $(-\mu, 0, 0)$ 线性稳定影响量级为 $\mathrm{Max}\{O(\sqrt{|\varepsilon|}, O(\sqrt{|\varepsilon'|})\}$

同时我们也可以看到平动点摄动位置只受离心力摄动的影响, 不受 Coriolis 力摄动的影响.

致谢 感谢南京大学易照华教授给以作者的指导和帮助.

参 考 文 献

1 Robe H A G. Celest Mech, 1977, 16: 343
2 Hallan P P , Rana M. Celest Mech, 2001, 79: 145
3 Plastino A R, Plastino A. Celest Mech, 1995, 61: 197
4 Giordano C M, Plastino A R, Plastino A. Celest Mech, 1997, 66: 229
5 Shu Si-hui, Lu Ben-kui, Chen Wu-shen et al. AcASn, 2004, 45(2): 195 (舒斯会, 陆本魁, 陈务深, 等. 天文学报, 2004, 45(2): 195) (=Shu Si-hui, Lu Ben-kui, Chen Wu-shen et al. ChA&A, 2004, 28(3): 338)
6 Shu Si-hui, Lu Ben-kui, Chen Wu-shen et al. AcASn, 2005, 46(1): 37 (舒斯会, 陆本魁, 陈务深, 等. 天文学报, 2005, 46(1): 37) (Shu Si-hui, Lu Ben-kui, Chen Wu-shen et al. ChA&A, 2005, 29(2))
7 Bhatnagar K B, Hallan P P. Celest Mech, 1978, 18: 105
8 Shrivastava A K, Garain D. Celest Mech, 1991, 51: 67

Effect of Coriolis and Centrifugal Perturbation upon the Locations and Linear Stabilities of Equilibrium Points in the Robe Problem

SHU Si-Hui[1,2] LU Ben-Kui[1]
(1 *Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing* 210008)
(2 *Jianxi science &Technology Teachers' college, Nanchang* 330013)

Abstract Effect of Coriolis and centrifugal perturbation upon the locations and linear stabilities of the main equilibrium points in the Robe′s restricted three-body problem is studied. The perturbed locations of the main equilibrium points in the Robe′s restricted three-body problem of are given. The effect ranges of the locations and linear stabilities of the main equilibrium points pertured by of the Coriolis and centrifugal forces are obtained .The Shrivastava's result is improved.

Key words Celestial Mechanics: restricted three-body problem, equilibrium points, linear stabilities