第 46 卷 第 2 期 天 文 学 报 Vol.46 No.2
2005 年 4 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Apr., 2005

稳健估计在轨道改进中的应用*

吴会英 吴连大

(中国科学院紫金山天文台 南京 210008)

摘要 通过对 20 颗卫星的模拟计算，研究了人造卫星光学观测的轨道改进方法，给出了资料预处理 (观测精度 $\sigma_0 = 5''$) 的剔除门限，使野值的比例在大多数情况下小于 10%; 在轨道改进中，先用 Huber 估计迭代 2 次，再用 Hampel 估计迭代到收敛，保证了轨道改进的精度; 重点研究了 Hampel 估计的权函数参数 (C_0, C_1, C_2) 的取值，得出结论：对于大于或等于 $6\sigma_0$ 的野值， C_0 可取为 2.2, C_1 可取为 3.6, C_2 的取值和野值大小有关.

关键词 天体力学，轨道改进，稳健估计，野值

中图分类号： P 133; **文献标识码**： A

1 引言

对于光学观测 (t, A, H) 来说，观测资料不可避免地存在野值，即使经过资料预处理剔除后，仍难免还会有错误数据，而且也还会有正确的数据被错误地剔除 [1], 因此有必要对稳健估计理论在轨道改进中的应用进行深入研究. 所谓参数的稳健估计，是指在粗差不可避免的情况下，选择适当的估计方法使参数估值尽可能减少粗差的影响，得到正常模式下的最佳估值 [2]. 但是许多稳健估计方法，均是理论研究，没有给出具体应用的参数数值，而且收敛范围较小，限制了稳健估计的应用. 本文给出了一种卫星轨道改进的稳健估计流程：首先研究了数据预处理方法，用稳健估计的 L 估计法，对数据中的野值进行预剔除，使数据中的野值比例降低，满足稳健估计的要求；再利用模拟计算重点研究了稳健估计流程和 Hampel 估计的权函数参数. 在初始根数误差为 10^{-4} 的情况下，通过大量模拟计算，给出了既能剔除野值，又能保证轨道改进精度的 Hampel 估计的权函数参数 (C_0, C_1, C_2) 的值，使得稳健估计能在轨道改进中得到较满意的应用.

2 数据预处理 — 野值预剔除

文 [1] 给出了资料预处理方法，其基本原理为：将观测量 (t, A, H) 转化为可表达为时间线性函数的 $(t, \Delta T, \Delta\theta)$, 这里， ΔT 为时间差， $\Delta\theta$ 为轨道面法向差，它们可用线性模型来表达：

2004-06-02 收到原稿， 2004-08-24 收到修改稿

$$\begin{aligned}\Delta T_i &= a_0 + a_1(t_i - t_0) + \varsigma_i\,,\\ \Delta\theta_i &= b_0 + b_1(t_i - t_0) + \eta_i\,,\\ &(i = 1, 2, \cdots\cdots N)\,.\end{aligned} \tag{1}$$

其中，ς_i, η_i 对应于观测误差，我们假定它们为零均值、相互独立的正态分布的随机量，在这里选择了截断最小二乘 L 估计法对 a_0, a_1, b_0, b_1 估计，其基本思想是使目标函数：

$$U = \sum_{i=1}^{N\beta+1} \nu_{N,i}^2 = \min\,, \tag{2}$$

其中，$N\beta$ 为整数 $(1/2 \le \beta < 1)$, $\{\nu_{N,i}\}$ 表示残差 ν_i 的绝对值从小到大排序后的序列. 可以证明，该估计是一致估计，其崩溃点为 $\varepsilon^* = 1 - \beta$. 若取 $\beta = 1/2$, 则崩溃点即为 50%.

2.1 单个错误资料的剔除

优选出 a_0, a_1, b_0, b_1 后，即可计算残差：

$$\begin{aligned}\nu_{Ti} &= \Delta T_i - [a_0 + a_1(t_i - t_0)],\\ \nu_{\theta i} &= \Delta\theta_i - [b_0 + b_1(t_i - t_0)],\\ &(i = 1, 2, \cdots\cdots N)\,.\end{aligned} \tag{3}$$

在资料精度为 $5''$ 时，剔除门限可选为：

$$|\nu_{Ti}| > 0.004\text{分} \quad \text{或} \quad |\nu_{\theta i}| > 0.002\text{度}\,. \tag{4}$$

2.2 整圈错误资料的剔除

在实际工作中，由于目标观测的错误，还要剔除错误目标 (整圈剔除), 剔除门限可选为：

$$|b_0| > 0.3\text{度} \quad \text{或} \quad |b_1| > 0.05\text{度 / 分} \quad \text{或}|a_1| > 2\text{秒 / 分}\,. \tag{5}$$

经过资料预处理剔除后，野值比例在大多数情况下小于 10%, 可以保证稳健估计的收敛.

3 稳健估计在轨道改进中的应用

3.1 轨道改进的基本原理

在轨道改进中，我们必须已知轨道根数的初值 t_0, ε_0 (这时正确的根数为 ε), 设已有一批资料 y_i, 记观测的量测方程为：

$$y_i = f(\varepsilon, t_i) + e_i\,, \tag{6}$$

式中 e_i 为观测误差，当 y_i 为 “好观测量” 时，e_i 服从均值为零的正态分布. 量测方程在 ε_0 附近展开，得根数改正量 ε 的线性方程 (即条件方程):

$$y_i - y_i^* = A(\varepsilon_0, t_i)\Delta\varepsilon + e_i\,, \tag{7}$$

其中 $y_i^* = f(\varepsilon_0, t_i)$, $A(\varepsilon_0, t_i)$ 为 $f(\varepsilon_0, t_i)$ 对 ε_0 的偏导数矩阵. 给出 $y_i^* = f(\varepsilon_0, t_i)$ 和 $A(\varepsilon_0, t_i)$ 的算法，我们就可列出所有资料的条件方程组. 由于 $f(\varepsilon_0, t_i)$ 和 $A(\varepsilon_0, t_i)$ 的算法已基本成熟，所以现在轨道改进的主要任务是：如何来解这一方程组，使得在整个迭代过程中尽量少受资料野值的干扰，保证迭代的收敛，最终得到一组精密的轨道根数，这就是我们要研究的稳健估计方法.

3.2 稳健估计模型

这里用的定轨方法为稳健估计中的 M- 估计 (maximum likelihood type estimate)[3], 该估计 $\hat{\theta}$ 通过使目标函数：

$$U = \sum_{i=1}^{n} \rho((y_i - x_i^\tau \Delta\varepsilon)/\sigma) = \min\,, \tag{8}$$

其中函数 $\rho((y_i - x_i^\tau\Delta\varepsilon)/\sigma)$ 为 $(y_i - x_i^\tau\Delta\varepsilon)/\sigma$ 的偶函数. 或者说 $\hat{\theta}$ 满足下述方程 [4]:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \psi(\nu_i/\sigma) = 0\,, \tag{9}$$

式中,

$$\psi(\upsilon_i/\sigma) = \rho'(\upsilon_i/\sigma)\nu_i = y_i - x_i^\tau\Delta\varepsilon\,. \tag{10}$$

具有有限舍弃点的 M- 估计是指

$$\psi(\upsilon_i/\sigma) = 0, \quad \text{对}|\nu_i/\sigma| > \lambda\,, \tag{11}$$

式中 λ 为一正常数.

对非线性方程 (9) 用迭代法求解，公式为：

$$\Delta\varepsilon = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i w_i x_i^\tau\right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i w_i y_i\right]\,, \tag{12}$$

式中

$$w_i = \psi(\nu_i/\sigma)/(\nu_i/\sigma)\,. \tag{13}$$

3.3 稳健估计的权函数

剔除野值的最小二乘估计：

$$w_i = \begin{cases} 1 & |\nu_i| \le 3\sigma \\ 0 & |\nu_i| > 3\sigma \end{cases}\,. \tag{14}$$

Huber 估计：

$$w_i = \begin{cases} 1 & |\nu_i| \le c\sigma \\ c\sigma/|\nu_i| & |\nu_i| > c\sigma \end{cases} . \tag{15}$$

Hampel 估计：

$$w_i = \begin{cases} 1 & |\nu_i| \le c_0\sigma \\ c_0\sigma/|\nu_i| & c_0\sigma < |\nu_i| \le c_1\sigma \\ c_0(c_2\sigma - |\nu_i|)/[|\nu_i|(c_2 - c_1)] & c_1\sigma < |\nu_i| \le c_2\sigma \\ 0 & |\nu_i| > c_2\sigma \end{cases} . \tag{16}$$

易见，以上 3 种估计方法均是 M- 估计，剔除野值的最小二乘估计是最简单的 M- 估计，Huber 估计为无舍弃点的 M- 估计， Hampel 估计为具有有限舍弃点的 M- 估计.

3.4 稳健估计的流程

在实际工作中，如何选择不同的估计方法及相应的权函数参数，将对轨道改进结果产生重要影响. 剔除野值的最小二乘估计的权函数十分简单，资料的权不是 1 就是 0, 显然不合理. 因此，我们首先利用 Huber 估计 (这里选 C=3) 改进 2 次，得到较高精度的轨道根数的初值；再利用 Hampel 估计，得到高精度的轨道根数. 选择以上过程的理由为：

(1) Huber 估计是一种具有凸目标函数的M - 估计，它的权在 “好资料” 上为 1, 并随残差的增大而趋于 0. 其解算精度受到野值的影响不太高，但有一致收敛的优点，基本不受初轨好坏的影响，因此可用来计算其他高精度 M- 估计的迭代初值. 由于 Huber 估计的崩溃点较低，因此，数据预处理剔除是必需的.

(2) Hampel 估计则要求有较高精度的初轨，因此我们必须在迭代开始使用 Huber 估计，提供高精度的初轨，然后用 Hampel 估计精密定轨.

4 中误差的迭代算法

在稳健估计中，中误差 σ 是最基本的参数，下面给出一种中误差的算法：

(1) 计算 S_N:

$$S_N = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N} \nu_i^2\right)/(N-P)}\,, \tag{17}$$

其中， N 为条件方程的个数， P 为未知量个数. 在求和时，数据中均不包括已被剔除的资料 (即权为 0 的资料).

(2) 作判别：

$$|\nu_i| < 3S_N\,. \tag{18}$$

在前两次的 Huber 估计中，将权不为 0 的资料的残差求和代入 (17) 式求 S_N. 以后的 Hampel 估计中，将权不为 0 且满足 (18) 式的资料的残差求和代入 (17) 式求 S_N. 如此

迭代 3 次，则第 3 次计算的 S_N 可作为 “好观测量” 的中误差. 在轨道改进中，我们将 $|\nu_i| < 3\sigma_0$ 且在预处理中剔除的资料收回. 模拟计算证明，上面的中误差计算方法是可行的.

5　Hampel 估计权函数参数 (C_0, C_1, C_2) 的选择

为了合理选择 Hampel 估计的权函数参数 (C_0, C_1, C_2), 我们采用模拟计算的方法来进行研究，根据剔除野值效果和轨道改进精度来确定权函数参数 (C_0, C_1, C_2) 的选择. 下面逐步讨论具体选择的步骤及方法：

5.1　模拟计算的样本和误差分布

为了使模拟尽量地接近于实际的卫星观测情况，我们选择了 20 颗星作为研究对象，每颗星产生 10 个站的 3 天数据，这些星的轨道根数信息见表 1.

表 1　根数信息表

Table 1　Orbit elements

ID	a	i(deg)	e	kp	n	ID	a	i(deg)	e	kp	n
03576	1.187376	74.049	0.00281	32	15476	19468	1.138013	98.7982	0.00642	15	6064
05554	1.239731	63.4333	0.04452	19	9881	20547	1.082324	94.1073	0.01171	21	3198
05679	1.148114	69.994	0.00194	15	5584	20642	1.173477	63.413	0.03374	30	14230
06124	1.238012	74.0237	0.00232	17	10173	21147	1.101089	67.985	0.00049	21	5294
08818	1.167888	63.322	0.08286	13	6543	22519	1.56352	56.912	0.32589	33	15024
13172	1.098042	95.995	0.00116	33	6208	25017	1.103208	57.0102	0.00127	45	10842
14401	1.123094	74.0428	0.00078	31	9521	25615	1.116795	84.976	0.00163	37	9038
17586	1.219228	82.5584	0.00207	18	7853	26234	1.115643	98.6006	0.00044	39	9290
18944	1.223757	74.0017	0.00372	29	12072	26906	1.171649	63.4706	0.00908	32	13076
19460	1.122339	84.983	0.00064	35	10639	27433	1.134439	98.7689	0.00201	36	12532

注：a 的单位为地球半径，kp 为站圈总数，n 为本圈资料总数.

我们对这 20 颗星的 (t, A, H) 资料加了中误差 σ_0 为 $5''$ 的随机差和 20% 的随机分布的野值，分 $6\sigma_0$ 、 $8\sigma_0$ 、 $10\sigma_0$ 、 $12\sigma_0$ 、 $14\sigma_0$ 、 $16\sigma_0$ 等多种野值情况，使 80% 的资料满足：

$$\begin{aligned} A_j &= A_{0j} + 5'' \times x_i / \cos(H_{0j})\,, \\ H_j &= H_{0j} + 5'' \times x_{i+1}\,. \end{aligned} \tag{19}$$

20% 的资料满足：

$$\begin{aligned} A_m &= A_{0m} + 5'' \times k \times \mathrm{sign}(x_i) / \cos(H_{0m})\,, \\ H_m &= H_{0m} + 5'' \times k \times \mathrm{sign}(x_{i+1})\,, \\ k &= 6, 8, 10, 12, 14, 16\,. \end{aligned} \tag{20}$$

上面两式中 A_{0j} 、 H_{0j} 、 A_{0m} 、 H_{0m} 为由表 1 的轨道根数计算的无误差数据，x_i 为零均值相互独立的正态分布的随机量，方差为 1. 这样我们就得到了观测误差为 $5''$, 并含有

20% 野值的模拟观测数据.

5.2 数据预处理剔除

通过采用截断最小二乘 L 估计法对资料进行预处理后，卫星的野值剔除和错误剔除的平均值情况如表 2 所示. 可以看出：经数据预处理剔除后，野值比例在大多数情况下小于 10%.

表 2 资料处理结果

Table 2 Result of data preprocess

野值大小 Value of outliers	误剔 false alarm	漏剔 missing
$6\sigma_0$	2.7%	10.4%
$8\sigma_0$	2.6%	7.8%
$10\sigma_0$	2.6%	6.1%
$12\sigma_0$	2.6%	5.1%
$14\sigma_0$	2.6%	4.3%
$16\sigma_0$	2.6%	3.6%

表 3 C_2 的取值

Table 3 The value of C_2

野值大小 Value of outliers	C_2 取值 Value of C_2
$6\sigma_0$	5.8
$8\sigma_0$	7.8
$10\sigma_0$	9.7
$12\sigma_0$	11.7
$14\sigma_0$	14
$16\sigma_0$	16

5.3 C_2 的选取

在轨道改进中，我们根据最终能剔除所有野值，并且使错误剔除的好资料个数最少的原则选取 C_2 的，也就是选取能够完全剔除野值的最大 C_2 值. 经过大量计算，我们发现对于不同大小的野值，全部剔除野值的 C_2 值不同，具体结果见表 3.

5.4 C_0 的选取

C_0 的取值是根据轨道改进结果的精度来选取的. 我们定义每个卫星的轨道改进误差 $\Delta\Sigma_l$ 为：

$$\Delta\Sigma_l = \sqrt{\frac{\sum\limits_{j=1}^{7}\left(\Delta\varepsilon_j \times \frac{\sigma_{ii}}{\sigma_j}\right)^2}{7}}\,. \tag{21}$$

其中 σ_{ii} 为倾角 i 的中误差， $\sigma_j(j=1,2,\cdots\cdots 7)$ 为各个根数的中误差.

20 颗星的统计轨道误差 $\Delta\Sigma$ 为：

$$\Delta\Sigma = \sqrt{\frac{\sum\limits_{l=1}^{20}(\Delta\Sigma_l)^2}{20}}\,. \tag{22}$$

对于不同大小的野值，我们固定 C_1 、 C_2, 计算了不同 C_0 的 $\Delta\Sigma$, 结果如图 1. 由图 1 可见，对于不同大小的野值，当 C_2 按表 3 取值， $C_0 \geq$2.2 时，轨道改进精度均已趋于稳定，因此， C_0 可选为 2.2.

5.5 C_1 的选取

对于不同大小的野值，我们固定 C_0 、 C_2, 计算了不同 C_1 的 $\Delta\Sigma$, 结果如图 2. 由图

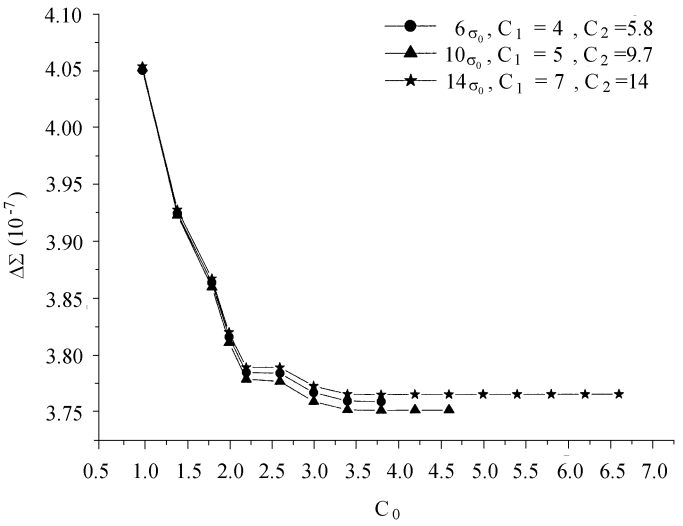

图 1　C_0 的取值和定轨精度的关系图

Fig. 1　The relation between c_0 and the accuracy of orbit determination

2 可见，对于不同大小的野值，当 C_2 按表 3 取值时，轨道改进精度对于 C_1 不敏感，但当 $C_1 \geq 3.6$ 时，轨道改进精度趋于稳定，因此，C_1 可选为 3.6.

6　结论与讨论

本文通过模拟计算，用光学模拟资料 (观测精度为 5″) 对卫星进行轨道改进，得到如下结论：

(1) 利用本文给出的门限，进行资料预处理剔除，可以将野值在大多数情况下从 20% 降低到 10% 以下；

(2) 在轨道改进时，先用 Huber 估计，迭代 2 次，再用 Hampel 估计，迭代到收敛，这样的改进方法是有效的，可以保证轨道改进的精度；

(3) Hampel 估计的权函数参数 C_2 的取值，与野值大小有关，参见表 3;

(4) Hampel 估计的权函数参数 C_0 可选为 2.2, C_1 可选为 3.6;

(5) 在轨道改进中，对于以前判为野值的数据，当该数据的残差，随着改进过程中轨道精度的提高，满足小于 $3\sigma_0$ 的条件时，可收回，不再判为野值；

(6) 利用以上轨道改进过程和所选择的参数，在野值大于或等于 $6\sigma_0$ 时，可以做到将所有野值剔除，并几乎保留所有的非野值资料，使轨道改进达到很高的精度.

以上结果是通过模拟计算得到的，可供实际轨道改进参考，但在应用时，有些参数和门限可能还需要根据实际数据的情况进行调整. 对于 Huber 估计中的权函数参数 C, 我们这里固定的取为 3, C 和定轨精度的关系，我们并未深入研究. 当野值较小时 (小于 $6\sigma_0$), 要剔除所有野值是困难的，剔除小野值的方法，还有待进一步研究.

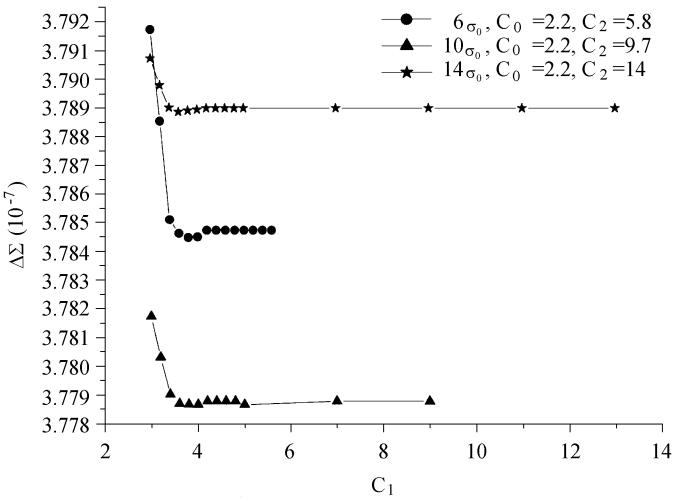

图 2 C_1 的取值和定轨精度的关系

Fig. 2 The relation between c_1 and the accuracy of orbit determination

参 考 文 献

1 Wu Lian-da, Jia Pei-zhang. AcASn, 1994, 35(2): 113 (吴连大, 贾沛璋. 天文学报, 1994, 35(2): 113)
2 文援兰, 杨元喜, 王威. 空间科学学报, 2001, 21(4): 341
3 Peter J Huber. Rubust statistics. New York: John wiley & sons, 1981. 43
4 Jia Pei-zhang. AcASn, 1992, 33(1): 48 (贾沛璋. 天文学报, 1992, 33(1): 48)

A Robust Estimation Method for Orbit Determination

WU Hui-ying WU Lian-da
(*Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing* 210008)

Abstract The method of orbit improvement is studied through processing the simulated optical data of 20 satellites. The criterion of deletion makes the ratio of outliers to be less than 10% in most cases. After using Huber estimation twice, Hampel estimation is used to get the result when it converges. This method ensures the accuracy of orbit. The parameter C_0, C_1 and C_2 of Hampel estimation are deeply studied, and the result is: C_0=2.2, C_1=3.6, C_2 changes with the value of single outliers.

Key words celestial mechanics, orbit improvement, robust-estimation, outliers