第 46 卷 第 2 期 天 文 学 报 Vol.46 No.2
2005 年 4 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Apr., 2005

# 月球物理天平动对环月轨道器运动的影响*

张 巍 刘 林

(南京大学天文系 南京 210093)
(南京大学空间环境与航天动力学研究所 南京 210093)

**摘要** 月球物理天平动是月球赤道在空间真实的摆动，会导致月球引力场在空间坐标系中的变化，从而引起环月轨道器 (以下称为月球卫星) 的轨道变化，这与地球的岁差章动现象对地球卫星轨道的影响类似. 采用类似对地球岁差章动的处理方法，讨论月球物理天平动对月球卫星轨道的影响，给出相应的引力位的变化及卫星轨道的摄动解，清楚地表明了月球卫星轨道的变化规律，并和数值解进行了比对，从定性和定量方面作一讨论.

**关键词** 天体力学：月球物理天平动，环月轨道器的运动
**中图分类号**： P 135; **文献标识码**： A

## 1 引言

月球天平动可以分为两类，即视天平动和物理天平动. 视天平动是由于运动的原因而使地球上的观测者看到的不仅是月球对着地球的 “半面”, 而是超过 “半面”, 是视觉效果而没有力学效应；物理天平动是月球在空间真实的摆动，它将导致月球引力场在空间的变化，从而影响月球卫星的轨道运动.

关于月球卫星轨道的摄动解，由于有长周期项降阶问题，早期给出的均为半分析解 [1−3], 文 [4] 做了改进，用拟平均根数法给出了相应的摄动分析解，但由于月球物理天平动效应不大，当时在文 [4] 中未考虑这一影响. 然而，对于高精度要求，这一效应必须考虑，本文在此背景下做了详细讨论，并给出了相应的结果，使摄动分析解更趋于完善. 而分析解可以清楚地反映月球卫星轨道的变化规律，无论对定性问题还是定量问题，都有其实际意义.

物理天平动本身的量级约为 $5\times10^{-4}$, 它通过月球非球形引力位作用于月球卫星轨道的摄动量级约为 $10^{-7}$ (相应的小参数 $\varepsilon=10^{-2}$), 对于月球低轨卫星轨道外推 1 至 2 天的弧段 (相当 $10^2$ 弧段), 其位置精度若要达到米级或 10 米级，月球物理天平动是一个必须考虑的摄动因素.

## 2 关于月球物理天平动与参考系的选取

根据月球自转理论，给出的天平动 3 个参数 $(\sigma,\rho,\tau)$ 的分析表达式 [5−9], 可以建立月

2004-07-15 收到原稿， 2004-11-16 收到修改稿
* 国家自然科学基金 (10173006) 资助项目

心平赤道坐标系 (在月球卫星轨道理论中必然要涉及到的参考系) 与真赤道坐标系 (与月固坐标系有直接联系) 之间的转换关系. 但类似于地球章动理论给出的章动序列, $(\sigma,\rho,\tau)$ 的分析表达式亦包含几百项, 单纯从坐标转换角度来看, 由此计算环月卫星在月固坐标系中的精确位置比较麻烦, 但在某些问题中, 可以采用简化分析表达式. 作为一例, 下面列出 Hayn 结果中 $(\sigma,\rho,\tau)$ 的主要项 (前三项)[6]:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\tau & = & 0^\circ.0163888\sin l_s - 0^\circ.003333\sin l_m + 0^\circ.005\sin 2\omega_m \\ \rho & = & -0^\circ.0297222\cos l_m + 0^\circ.0102777\cos(l_m+2\omega_m) - \\ & & 0^\circ.0030556\cos(2l_m+2\omega_m) \\ \sin I\sigma & \approx & I\sigma = -0^\circ.0302777\sin l_m + 0^\circ.0102777\sin(l_m+2\omega_m) - \\ & & 0^\circ.0030556\sin(2l_m+2\omega_m)\end{array}\right. , \tag{1}$$

其中 $l_s$ 和 $l_m$ 分别为太阳和月球的平近点角, $\omega_m$ 是月球近地点幅角. 若记

$$\left\{\begin{array}{rcl}\tau & = & \tau_1\sin l_s + \tau_2\sin l_m + \tau_3\sin 2\omega_m \\ \rho & = & \rho_1\cos l_m + \rho_2\cos(l_m+2\omega_m) + \rho_3\cos(2l_m+2\omega_m) \\ \sin I\sigma & = & \sigma_1\sin l_m + \sigma_2\sin(l_m+2\omega_m) + \sigma_3\sin(2l_m+2\omega_m)\end{array}\right. . \tag{2}$$

考虑到 $\rho_1-\sigma_1 = 2''$, $(\rho_1-\sigma_1)/\sigma_1 \approx 10^{-2}$, 在一定精度下为了表达简明, 可做近似处理, 即 $\rho_i = \sigma_i\,(i=1,2,3)$, 如果不做此近似处理亦不影响本文的讨论. 在 (2) 式中 $\tau_1$ 等量的数值如下:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\tau_1 & = & 59''.0 = 2.9\times10^{-4}\,(rad) \\ \tau_2 & = & -12''.0 = -0.58\times10^{-4}\,(rad) \\ \tau_3 & = & 18''.0 = 0.87\times10^{-4}\,(rad)\end{array}\right. , \tag{3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\sigma_1 & = & -109''.0 = -5.18\times10^{-4}\,(rad) \\ \sigma_2 & = & 37''.0 = 1.8\times10^{-4}\,(rad) \\ \sigma_3 & = & -11''.0 = -0.53\times10^{-4}\,(rad)\end{array}\right. , \tag{4}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\sigma_{11} & = & \sigma_1-\sigma_2 = -146''.0 \\ \sigma_{12} & = & \sigma_1+\sigma_2 = -72''.0\end{array}\right. . \tag{5}$$

DE405 数值历表中直接给出了另 3 个欧拉角 $(\Omega',i_s,\Lambda)$ 每天的具体数值, 可用于计算月球卫星在月固坐标系中的精确位置.

述两种物理天平动的表达形式, 可通过图 1 来表明它们之间的关系. 图中 $x_b$ 是月固坐标系的 X 轴指向, 3 个欧拉角 $(\Omega',i_s,\Lambda)$ 在图中已表明清楚, 不必再加注明, $\varepsilon$ 是黄赤交角. 而另一种表达天平动的 3 个参数 $(\sigma,\rho,\tau)$ 与图中有关量的联系如下:

如果是月球平赤道, 根据 Cassini 定律, 月球轨道, 黄道与月球平赤道交与一点 $N$, 见图 2. 有

$$\left\{\begin{array}{l}\psi = \Omega_m \\ I = I_m \\ \varphi = L_m - \Omega_m + \pi\end{array}\right. , \tag{6}$$

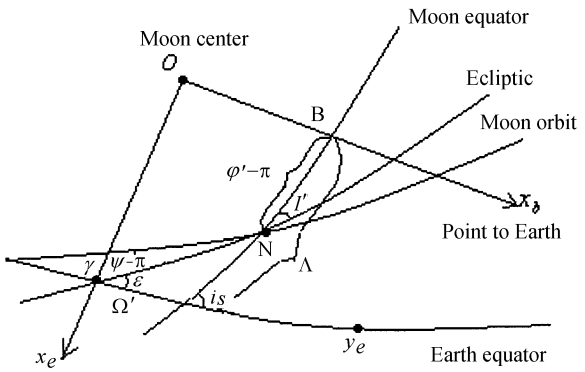


图 1 月心坐标系与物理天平动示意图

Fig. 1 selenocentric coordination and the physical libration

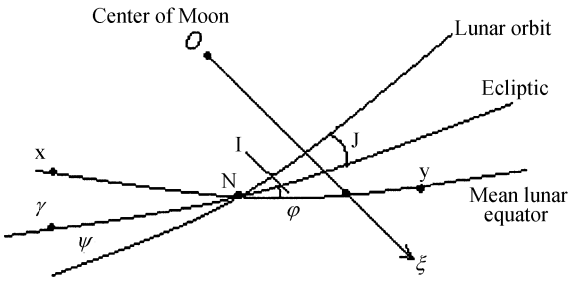


图 2 月球轨道、黄道与月球平赤道之间的几何关系

Fig. 2 The geometry relation between the Moon orbit, ecliptic and the Moon mean equator

其中 $\Omega_m$ 、 $I_m$ 、 $L_m$ 表示月球的平根数, 分别为月球轨道升交点平黄经、平倾角和月球平黄经.

如果是月球真赤道 (直接与月固坐标系相连), 见图 3, 有

$$\begin{cases} \psi' = \Omega_m + \sigma \\ I' = I_m + \rho \\ \varphi' = L_m - \Omega_m + \pi + (\tau - \sigma) \end{cases} . \tag{7}$$

平赤道和真赤道的 3 个欧拉角之间的差异 $\tau$ 、 $\rho$ 和 $\sigma$ 就是月球物理天平动的经度分量、倾角分量和节点分量.

若采用月心天球坐标系 $O - x_e y_e z_e$, $x_e y_e$ 坐标面为地球赤道面. 在该坐标系中分别采用两种天平动表达形式的坐标转换关系为

$$\boldsymbol{R} = (M_1)\boldsymbol{r}_e = (M_2)\boldsymbol{r}_e \,, \tag{8}$$

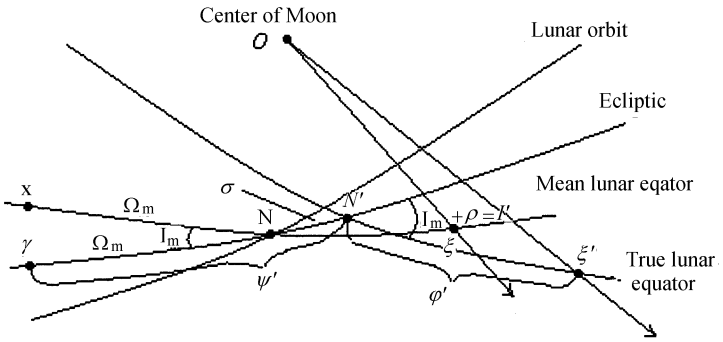


图 3　月球真赤道与月球平赤道之间的关系

Fig. 3　The relation between the Moon true equator and mean equator

其中两个转换关系分别由下式表达：

$$(M_1) = R_z(\Lambda)R_x(i_s)R_z(\Omega')\,, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}(M_2) \;&=\; R_z(\varphi'-\pi)R_x(I')R_z(\psi'-\pi)R_x(\varepsilon) = \\ &\quad R_z(\varphi')R_x(-I')R_z(\psi')R_x(\varepsilon)\,.\end{aligned} \tag{10}$$

(10) 式第一行是按图 1 给出的，而第二行是按图 3 给出的，两者实为同一转换关系．上述两种转换关系之间的差别取决与 $(\sigma,\rho,\tau)$ 的取项多少，我们取其前 3 项，分别计算了 2003 年 11 月 1 日 0 时和 2004 年 6 月 15 日 0 时月球表面 “上空” 一点的空间坐标转换到月固坐标系中的位置，两种转换结果之差为公里级，相应的转换矩阵元素的最大差别达到 $7.6\times10^{-4}$. 如果采用 Eckhardt 等人结果中 $(\sigma,\rho,\tau)$ 的前四项 (量级与 Hayn 结果中的前 3 项相当)[7−9], 亦同样有上述差别.

根据上述比较可知，直接采用简化表达式，在某些问题中是不能满足精度要求的. 但同时告诉我们，仅取主项的表达式 (1) 与 DE405 数值历表的差别小于 $10^{-3}$, 这种差别在考虑物理天平动对月球卫星轨道的影响时，在一定精度要求的前提下，则无妨．定轨或预报中涉及轨道外推弧段为 $10^2$ 时 (对低轨卫星为 1 ~ 2 天的间隔), 那么要保证 10 米级甚至米级精度是可以达到的.

鉴于上述比较的结果，加上要建立月球卫星轨道理论，了解轨道变化的规律，或直接反映月球卫星相对月心坐标系的几何状况，又必须采用月心赤道坐标系，而不是月心地球赤道坐标系，那么就要由 $(\sigma,\rho,\tau)$ 来建立历元月心平赤道坐标系 $O-xyz$ 与月固坐标系 (对应真赤道)$O-\xi'\eta'\zeta'$ 之间的关系. 而若要通过历元月心平赤道坐标系 $O-xyz$ 与月心天球坐标系 $O-x_ey_ez_e$ 之间的转换关系 (即利用高精度的 $\Omega', i_s, \Lambda$ 值) 来计算月球卫星在月固坐标系中的精确位置 $\boldsymbol{R}$ 也很简单，有

$$\begin{cases} \boldsymbol{R} = (M_1)\,\boldsymbol{r}_e, \quad \boldsymbol{r}_e = (N)^T\,\boldsymbol{r} \\ (N) = R_z\,(-\Omega_m)\,R_x\,(-I_m)\,R_z\,(\Omega_m)\,R_x\,(\varepsilon) \end{cases}, \tag{11}$$

$\boldsymbol{r}$ 是通过定轨或预报给出的月心平赤道坐标系中的月球卫星位置矢量. 这里变换矩阵 $(N)$ 并不涉及到物理天平动的表达形式, 转换的精度只取决于月球卫星定轨或预报的精度.

## 3 历元月心赤道坐标系与月固坐标系之间的转换关系

分别记历元月心平赤道坐标系 (以下简称月心赤道坐标系)$O-xyz$ 和月固坐标系 (对应真赤道)$O-\xi'\eta'\zeta'$ 中月球卫星的坐标矢量为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}$, 两者之间的转换关系为

$$\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{r}=R_z\left(-\Omega_m\right)R_x\left(-I\right)R_z\left(-\sigma\right)R_x\left(I+\rho\right)R_z\left(-\left(\varphi+\tau-\sigma\right)\right)\boldsymbol{R}=\left(A\right)\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{R}=R_z\left(\varphi+\tau-\sigma\right)R_x\left(-\left(I+\rho\right)\right)R_z\left(\sigma\right)R_x\left(I\right)R_z\left(\Omega_m\right)\boldsymbol{r}=\left(A\right)^T\boldsymbol{r}\end{array}\right. , \tag{12}$$

其中

$$R_z\left(-\Omega_m\right)=\left(\begin{array}{ccc}\cos\Omega_m & -\sin\Omega_m & 0\\ \sin\Omega_m & \cos\Omega_m & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right), \tag{13}$$

$$R_x\left(-I\right)=\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos I & -\sin I\\ 0 & \sin I & \cos I\end{array}\right), \tag{14}$$

$$R_z\left(-\sigma\right)=\left(\begin{array}{ccc}\cos\sigma & -\sin\sigma & 0\\ \sin\sigma & \cos\sigma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right), \tag{15}$$

$$R_x\left(I+\rho\right)=\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\left(I+\rho\right) & \sin\left(I+\rho\right)\\ 0 & -\sin\left(I+\rho\right) & \cos\left(I+\rho\right)\end{array}\right), \tag{16}$$

$$R_z\left(-\left(\varphi+\tau-\sigma\right)\right)=\left(\begin{array}{ccc}\cos\left(\varphi+\tau-\sigma\right) & -\sin\left(\varphi+\tau-\sigma\right) & 0\\ \sin\left(\varphi+\tau-\sigma\right) & \cos\left(\varphi+\tau-\sigma\right) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right). \tag{17}$$

仅保留 $\rho, \sigma, \tau$ 的一阶量, 可得

$$\boldsymbol{r}=\left(A\right)\boldsymbol{R}. \tag{18}$$

$$\left(A\right)=\left(\begin{array}{ccc}\cos\left(q_2\right)-\left(q_1\right)\sin\left(q_2\right) & -\sin\left(q_2\right)-\left(q_1\right)\cos\left(q_2\right) & -\sigma\sin I\cos\Omega_m-\rho\sin\Omega_m\\ \sin\left(q_2\right)+\left(q_1\right)\cos\left(q_2\right) & \cos\left(q_2\right)-\left(q_1\right)\sin\left(q_2\right) & -\sigma\sin I\sin\Omega_m+\rho\cos\Omega_m\\ \sigma\sin I\cos\varphi-\rho\sin\varphi & -\sigma\sin I\sin\varphi-\rho\cos\varphi & 1\end{array}\right), \tag{19}$$

其中 $q_1=\tau-\sigma+\sigma\cos I$, $q_2=\varphi+\Omega_m$, 天平动参数 $\sigma, \rho, \tau$ 由 (2) 式表达.

由于

$$\left\{\begin{array}{lcl}I & = & 1^\circ\,32'32''=1^\circ.542222=0.026917\\ \sin I & = & 0.0269, \cos I=0.99963776\\ 1-\cos I & = & 0.00036224\end{array}\right. , \tag{20}$$

还可以作如下简化：

$$\tau - \sigma\left(1-\cos I\right) = \tau + O\left(6\times 10^{-6}\right)\ , \tag{21}$$

$$\sigma\sin I\cos\varphi - \rho\sin\varphi = \left(\sigma_1-\sigma_2\right)\sin\omega_m - \sigma_3\sin\left(l_m+\omega_m\right)\ , \tag{22}$$

$$-\sigma\sin I\sin\varphi - \rho\cos\varphi = \left(\sigma_1+\sigma_2\right)\cos\omega_m + \sigma_3\cos\left(l_m+\omega_m\right)\ . \tag{23}$$

采用以上简化，转换矩阵 $(A)$ 有如下形式：

$$(A) = \begin{pmatrix} -\cos\lambda_m + \tau\sin\lambda_m & \sin\lambda_m + \tau\cos\lambda_m & s_1 \\ -\sin\lambda_m - \tau\cos\lambda_m & -\cos\lambda_m + \tau\cos\lambda_m & s_2 \\ \sigma_{11}\sin\omega_m - \sigma_3\sin\left(s_3\right) & \sigma_{12}\cos\omega_m + \sigma_3\cos\left(s_3\right) & 1 \end{pmatrix}\ , \tag{24}$$

其中 $s_1 = -\sigma_1\sin\left(\lambda_m-\omega_m\right) - \sigma_2\sin\left(\lambda_m+\omega_m\right) - \sigma_3\sin\left(2\lambda_m-\Omega_m\right)$, $s_2 = \sigma_1\cos\left(\lambda_m-\omega_m\right) + \sigma_2\cos\left(\lambda_m+\omega_m\right) + \sigma_3\cos\left(2\lambda_m-\Omega_m\right)$, $s_3 = l_m+\omega_m$. 这里的 $\lambda_m$ 就是前面 (6) 式中的 $L_m$, 即月球的平黄经.

## 4　天平动引起的月球引力位的附加部分 $\Delta V\left(C_{2,0}\right)$ 和 $\Delta V\left(C_{2,2}\right)$

只考虑月球非球形引力位中的两个主要部分 $C_{2,0}\left(-J_2\right)$ 和 $C_{2,2}$ 项引起的变化，因该两项谐系数为

$$C_{2,0} = 2\times 10^{-4}\quad ,\quad C_{2,2} = 0.25\times 10^{-4}$$

对于外推月球低轨卫星 $10^2$ 弧段的位置精度要求达到米级时，$C_{2,0}$ 的附加位必须考虑天平动中 $\tau_1$ 、 $\tau_2$ 、 $\tau_3$ 和 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 的全部；而 $C_{2,2}$ 的附加位，只需考虑 $\tau_1$ 和 $\sigma_{11}, \sigma_{12}$ 部分.

下面利用两个坐标系之间的转换关系，给出天平动引起的月球引力位的变化.

### 4.1　$\Delta C_{2,0}$ 项

略去推导过程，直接给出结果如下：

$$\begin{aligned} V_2\left(C_{2,0}\right) \;=\; & V_2\left(J_2\right) = \left(-J_2/a^3\right)\left(a/r\right)^3\left[\left(3/2\right)\left(z/r\right)^2 - \left(1/2\right)\right] = \\ & \left(-J_2/a^3\right)\left(a/r\right)^3\left\{\left[\left(3/2\right)\left(z/r\right)^2 - \left(1/2\right)\right] - \right. \\ & 3\sigma_1\left(z/r\right)\left[\left(x/r\right)\sin\left(\lambda_m-\omega_m\right) - \left(y/r\right)\cos\left(\lambda_m-\omega_m\right)\right] - \\ & 3\sigma_2\left(z/r\right)\left[\left(x/r\right)\sin\left(\lambda_m+\omega_m\right) - \left(y/r\right)\cos\left(\lambda_m+\omega_m\right)\right] - \\ & \left.3\sigma_3\left(z/r\right)\left[x/r\right)\sin\left(2\lambda_m-\Omega_m\right) - \left(y/r\right)\cos\left(2\lambda_m-\Omega_m\right)]\right\}\ , \end{aligned} \tag{25}$$

由此可得天平动引起的 $C_{2,0}$ 项的附加摄动位 $\Delta V_2$ 如下：

$$\begin{aligned} \Delta V_2 \;=\; & \left(3J_2/4a^3\right)\left(a/r\right)^3\left\{-\sin 2i\left(1-\cos 2u\right)\times\right. \\ & \left[\sigma_1\cos\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right) + \sigma_2\cos\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right) + \sigma_3\cos\left(2\lambda_m-\Omega_m-\Omega\right)\right] + \\ & 2\sin i\left(\sin 2u\right)\left[\sigma_1\sin\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right) + \right. \\ & \left.\left.\sigma_2\sin\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right) + \sigma_3\sin\left(2\lambda_m-\Omega_m-\Omega\right)\right]\right., \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\Delta V_{2l} &= \overline{\Delta V_2} = \\ &-\left(3J_2/4a^3\right)\sin 2i\left(1-e^2\right)^{-3/2}\times \\ &[\sigma_1\cos\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)+\sigma_2\cos\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)+ \\ &\sigma_3\cos\left(2\lambda_m-\Omega_m-\Omega\right)]\ , \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\Delta V_{2s} &= \Delta V_2-\overline{\Delta V_2}=\left(3J_2/4a^3\right)\{-\sin 2i[(a/r)^3-\left(1-e^2\right)^{-3/2}-(a/r)^3\cos 2u]\times \\ &[\sigma_1\cos\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)+\sigma_2\cos\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)+\sigma_3\cos\left(2\lambda_m-\Omega_m-\Omega\right)]+ \\ &2\sin i\,(a/r)^3\sin 2u\,[\sigma_1\sin\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)+ \\ &\sigma_2\sin\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)+\sigma_3\sin\left(2\lambda_m-\Omega_m-\Omega\right)]\}\ . \end{aligned} \tag{28}$$

### 4.2 $\Delta C_{2,2}$ 项

同样直接写出如下结果：

$$\begin{aligned}V\left(C_{2,2}\right) &= \left(3C_{2,2}/a^3\right)(a/r)^3\left(\left(X^2-Y^2\right)/r^2\right)= \\ &\left(3C_{2,2}/a^3\right)(a/r)^3\left\{\left(1/r^2\right)\left[\left(x^2-y^2\right)\cos 2\lambda_m+(2xy)\sin 2\lambda_m\right]-\right. \\ &2\tau\left[\left(1/r^2\right)\left(x^2-y^2\right)\sin 2\lambda_m-2\left(xy/r^2\right)\cos 2\lambda_m\right]- \\ &2\sigma_1\left(z/r\right)[(x/r)\sin\left(\lambda_m+\omega_m\right)-(y/r)\cos\left(\lambda_m+\omega_m\right)]- \\ &\left.2\sigma_2\left(z/r\right)[(x/r\ )\sin\left(\lambda_m-\omega_m\right)-(y/r)\cos\left(\lambda_m-\omega_m\right)]\right\}\ , \end{aligned} \tag{29}$$

相应的 $C_{2,2}$ 项的附加项摄动位 $\Delta V_2$ 如下：

$$\begin{aligned}\Delta V_2\left(C_{2,2}\right) &= -\left(3C_{2,2}/a^3\right)(a/r)^3\left\{\tau\left[\sin\left(2\lambda_m-2\Omega\right)\left(2\cos 2u+\sin^2 i\left(1-\cos 2u\right)\right)-\right.\right. \\ &\left.\cos\left(2\lambda_m-2\Omega\right)\left(2\cos i\sin 2u\right)\right]+ \\ &\sigma_1\sin i\left[\sin\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)\sin 2u-\cos i\cos\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)\left(1-\cos 2u\right)\right]+ \\ &\sigma_2\sin i\left[\sin\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)\sin 2u-\right. \\ &\left.\left.\cos i\cos\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)\left(1-\cos 2u\right)\right]\right\}\ , \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\left(\Delta V_{2,2}\right)_l &= -\left(3C_{2,2}/a^3\right)\sin i\left(1-e^2\right)^{-3/2}\{\tau\sin i\left[\sin\left(2\lambda_m-2\Omega\right)\right]- \\ &\sigma_1\cos i\left[\cos\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)\right]-\sigma_2\cos i\left[\cos\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)\right]\}\ , \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}&\left(\Delta V_{2,2}\right)_s=-\left(3C_{2,2}/a^3\right)\{\sin i\left[\tau\sin i\sin\left(2\lambda_m-2\Omega\right)-\sigma_1\cos i\cos\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)-\right. \\ &\left.\sigma_2\cos i\cos\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)\right]\times\left[(a/r)^3-\left(1-e^2\right)^{-3/2}\right]+ \\ &\tau\left[\left(2-\sin^2 i\right)\sin\left(2\lambda_m-2\Omega\right)(a/r)^3\cos 2u-(2\cos i)\cos\left(2\lambda_m-2\Omega\right)(a/r)^3\sin 2u\right]+ \\ &\sigma_1\sin i\left[\sin\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)(a/r)^3\sin 2u+\cos i\cos\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)(a/r)^3\cos 2u\right]+ \\ &\left.\sigma_2\sin i\left[\sin\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)(a/r)^3\sin 2u+\cos i\cos\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)(a/r)^3\cos 2u\right]\right\}\ . \end{aligned} \tag{32}$$

## 5　天平动引起的附加摄动解

根据天平动引起的附加摄动位 $\Delta V\left(C_{2,0}\right)$ 和 $\Delta V\left(C_{2,2}\right)$ 可知，对月球卫星轨道只有长、短周期影响. 在米级精度要求下，只要给出长周期变化项即可，至于短周期项，只有轨道半长径 $a$ 需要考虑，这是由于沿迹根数 $M$ 的精度要求所致.

### 5.1　附加项 $\Delta\sigma\left(J_2\right)$

根据天平动对 $C_{2.0}$ 项的附加位，可得物理天平动通过 $J_2$ 项引起的月球卫星轨道的长周期变化项为

$$\Delta\sigma_l\left(t\right)=\sigma_l\left(t\right)-\sigma_l\left(t_0\right)\,, \tag{33}$$

$\sigma_l\left(t\right)$ 的具体形式如下：

$$a_l\left(t\right)=0\,, \tag{34}$$

$$e_l\left(t\right)=0\,, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} &i_l\left(t\right)=-\left(3J_2/2p^2\right)\cos i\times\\ &\left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\cos\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)+\frac{\sigma_2}{\alpha_2}\cos\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)+\frac{\sigma_3}{\alpha_3}\cos\left(2\lambda_m-\Omega_m-\Omega\right)\right]\,, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &\Omega_l\left(t\right)=-\left(3J_2/2p^2\right)\frac{\cos 2i}{\sin i}\times\\ &\left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\sin\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)+\frac{\sigma_2}{\alpha_2}\sin\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)+\frac{\sigma_3}{\alpha_3}\sin\left(2\lambda_m-\Omega_m-\Omega\right)\right]\,, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} &\omega_l\left(t\right)=\left(3J_2/2p^2\right)\frac{\cos i}{\sin i}\left(1-5\sin^2 i\right)\times\\ &\left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\sin\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)+\frac{\sigma_2}{\alpha_2}\sin\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)+\frac{\sigma_3}{\alpha_3}\sin\left(2\lambda_m-\Omega_m-\Omega\right)\right]\,, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} &M_l\left(t\right)=-\left(9J_2/4p^2\right)\sqrt{1-e^2}\sin 2i\times\\ &\left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\sin\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)+\frac{\sigma_2}{\alpha_2}\sin\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)+\frac{\sigma_3}{\alpha_3}\sin\left(2\lambda_m-\Omega_m-\Omega\right)\right]\,. \end{aligned} \tag{39}$$

其中

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha_1 &=& \frac{1}{n}\left(\dot\lambda_m-\dot\omega_m-\dot\Omega\right)=O\left(10^{-3}\right)\\ \alpha_2 &=& \frac{1}{n}\left(\dot\lambda_m+\dot\omega_m-\dot\Omega\right)=O\left(10^{-3}\right)\\ \alpha_3 &=& \frac{1}{n}\left(2\dot\lambda_m-\dot\Omega_m-\dot\Omega\right)=O\left(10^{-3}\right) \end{array}\right.\,. \tag{40}$$

**5.2 附加项** $\Delta\sigma\left(C_{2,2}\right)$

相应轨道的长周期变化项 $\Delta\sigma_l\left(t\right)=\sigma_l\left(t\right)-\sigma_l\left(t_0\right)$ 中 $\sigma_l\left(t\right)$ 的具体表达式如下：

$$a_l\left(t\right)=0\,, \tag{41}$$

$$e_l\left(t\right)=0\,, \tag{42}$$

$$\begin{aligned} &i_l\left(t\right)=-\left(3C_{2,2}/p^2\right)\times\\ &\left[\frac{2\tau}{\alpha_4}\sin i\sin\left(2\lambda_m-2\Omega\right)-\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\cos i\cos\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)-\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\cos i\cos\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)\right], \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} \Omega_l\left(t\right) &= \left(3C_{2,2}/p^2\right)\times\\ &\left[\frac{2\tau}{\alpha_4}\cos i\cos\left(2\lambda_m-2\Omega\right)+\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\frac{\cos 2i}{\sin i}\sin\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)+\right.\\ &\left.\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\frac{\cos 2i}{\sin i}\sin\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)\right], \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \omega_l\left(t\right) &= -\left(3C_{2,2}/p^2\right)\times\\ &\left[\frac{\tau}{\alpha_4}\left(2-5\sin^2 i\right)\cos\left(2\lambda_m-2\Omega\right)+\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\frac{\cos i}{\sin i}\left(1-5\sin^2 i\right)\sin\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)+\right.\\ &\left.\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\frac{\cos i}{\sin i}\left(1-5\sin^2 i\right)\sin\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)\right], \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} M_l\left(t\right) &= \left(9C_{2,2}/p^2\right)\sqrt{1-e^2}\times\\ &\left[\frac{\tau}{\alpha_4}\sin^2 i\cos\left(2\lambda_m-2\Omega\right)+\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\sin i\cos i\sin\left(\lambda_m+\omega_m-\Omega\right)+\right.\\ &\left.\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\sin i\cos i\sin\left(\lambda_m-\omega_m-\Omega\right)\right]. \end{aligned} \tag{46}$$

其中

$$\alpha_4=\frac{1}{n}\left(2\dot{\lambda}_m-2\dot{\Omega}\right)=O\left(10^{-3}\right)\,. \tag{47}$$

为了使平近点角 $M$ 达到同样的精度要求，则需要考虑轨道半长径 $a$ 的二阶短周期项，上述两部分 ($C_2$ 和 $C_{2,2}$) 附加摄动引起的 $a$ 的短周期项为

$$a_s\left(t\right)=2a^2\left[\left(\Delta V_2\right)_s+\left(\Delta V_{2,2}\right)_s\right]\,. \tag{48}$$

## 6 数值验证

采用平均高度为 200 km 的月球低轨卫星进行高精度数值解与摄动分析解的比对, 外推 2880 分钟 (两个地球日), 初始条件如下：

$t_0 = 0.0$, $a_0 = 1938.0\,\mathrm{km}$, $e_0 = 0.001$, $i_0 = 89^\circ.5$, $\Omega_0 = 45^\circ.0$, $\omega_0 = 45^\circ.0$, $M_0 = 0^\circ.0$,

分别用数值解 (积分器采用 RKF7(8) 方法) 和上述分析解计算如下 3 种情况 [10]: 1) 仅考虑 $J_2$ 项; 2) 考虑 $J_2$ 项和天平动主项的第一项; 3) 考虑 $J_2$ 项和天平动主项的全部三项.

计算结果列于表 1:

**表 1　数值法与分析法的比较**

**Table 1　comparison between the result of numerical solution and analytical solution**

| Type | $a$(km) | $e$ | $i^{(\circ)}$ | $\Omega^{(\circ)}$ | $\omega^{(\circ)}$ | $\omega + M^{(\circ)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1a | 1937.6535 | 0.00139349 | 89.499955 | 44.982581 | 43.212265 | 248.644631 |
| 1b | 1937.6535 | 0.00139353 | 89.499955 | 44.982581 | 43.213246 | 248.644630 |
| 2a | 1937.6536 | 0.00139333 | 89.499961 | 44.983533 | 43.209529 | 248.645090 |
| 2b | 1937.6536 | 0.00139353 | 89.499958 | 44.983539 | 43.213375 | 248.645066 |
| 3a | 1937.6537 | 0.00139353 | 89.499957 | 44.983629 | 43.210945 | 248.643669 |
| 3b | 1937.6537 | 0.00139353 | 89.499955 | 44.983635 | 43.212876 | 248.643674 |

表中 1a 和 1b 分别表示数值解和分析解的结果, 2a 和 2b 等亦有同样意义. 从表中列出的结果可以清楚地看出：

1) 月球物理天平动对低轨月球卫星影响明显, 考虑与不考虑, 在沿迹量上相差 $10^{-5}$, 相当于位置误差 20 m, 不可忽视.

2) 以高精度数值解作为标准, 本文给出的分析解对上述两种情况的沿迹量实际相差分别为 $4 \times 10^{-7}$ 和 $10^{-7}$.

3) 对于米级精度要求, 由 2 和 3 的差别表明必须考虑物理天平动分析解中的前几项, 如文 [6] 中的前 3 项或文 [7-9] 中的前 4 项.

上述比对验证表明, 本文给出的月球物理天平动对月球卫星轨道影响的摄动分析解是正确的, 有实用价值. 关于 $\Delta V\,(C_{2,2})$ 项, 它的影响要比 $\Delta V\,(C_2)$ 的影响小一个量级, 本文不再列出计算结果.

## 参 考 文 献


1　Oesterwinter C. Celest Mech, 1970, 1(3): 368

2　Giacaglia G E O, Murphy J P, Felsentreger T L. Celest Mech, 1970, 3(1): 3

3　Brumberg V A, Evdokimova L S, Kochina N G. Analytical Methods for the Orbits of Artificial Satellites of the Moon. 1971, 3(2): 197

4　Liu Lin, Wang Jia-song. Chin. Astron Astrophys, 1998, 22(3): 328

5　Koziel K. Physicsand Astronomy of the Moon. In: Kopal Z ed. New York: Academic Press, 1962

6 Gappellari J O, Velez C E, Fuchs A J. Mathematical Theory of Goddard Trajectory Determination System. Goddard Space Flight Center, Greenbeit, Maryland. 1976, N76-24291-24302: 3-31
7 Eckhardt D H. The Moon and the Planets, 1981, 25: 3
8 Moons M. Celest Mech, 1982, 26(2): 131
9 Newhall X X. Celest Mech, 1997, 66(1): 21
10 Fehlberg E, Classical Fifth-, Sixth- , Seventh-and Eighth Order Runge-kutta Formulas with Stepsize Control, NASA TR R-287, 1968

# The EffectS of Physical Libration of Moon on Lunar Satellites

ZHANG Wei LIU Lin
(*Department of Astronomy, Nanjing University, Nanjing* 210093)
(*Institute for Space Environment and Astrodynamics, Nanjing University, Nanjing* 210093 )

**Abstract** Lunar physical libration, which is the true swing of lunar equator in the space, alters the lunar gravitational field in the space coordinate system and affects the orbiting motion of lunar satellites correspondingly. This kind of affection is very similar with that of the precession and nutation on the earth satellites. The method which resemble the one used in the effects of precession and nutation on the earth satellites be adopted to discuss the effects of physical libration of moon on the motion of lunar satellite. The variation of gravitation force and the orbit's perturbation solution which indicate orbital variation clearly, are given in the paper together with corresponding numerical solution. From the aspects of both quality and quantity, this discussion is significative.

**Key words** celestial mechanics: Physical Libration of Moon, motion of lunar orbiters