第 46 卷 第 3 期 天 文 学 报 Vol.46 No.3
2005 年 7 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Jul., 2005

卫星轨道预报的一种分析方法

刘 林 王彦荣

(南京大学天文系 南京 210093)
(南京大学空间环境与航天动力学研究所 南京 210093)

摘要 人造地球卫星的轨道预报是空间环境监测和实时跟踪测量中一个重要环节，由于监测对象众多，要求精度也不太高，通常采用分析法预报．在已有分析法得到 t 时刻平均根数的基础上给出一种轨道预报方法，由 t 时刻的平均根数给出该时刻卫星的位置和速度，在此基础上将地球非球形引力摄动的周期项直接用卫星直角坐标的位置和速度分量表示，这样可以避免在计算轨道根数变化的周期项时出现的奇点问题，从而对根数的选择无特殊要求，可适用于各种轨道，简化预报程序和相应的软件，提高预报效率.

关键词 天体力学：轨道根数，轨道预报
中图分类号： P 135; **文献标识码**： A

1 引言

由于在空间环境监测和实时跟踪测量中对预报的精度要求不像定轨中那么高，通常只要求到百米甚至公里的量级，分析法完全可以满足其需要．但采用分析法预报的前提是必须引用轨道根数作为计算变量．关于轨道根数，若采用 Kepler 根数，则会出现小 e, 小 i 等各种奇点问题，而若改用各种无奇点变量，其轨道分析解的形式较复杂，这也有不便之处．然而，进一步分析可知，这些奇点问题均出现在轨道变化的周期项中，特别是短周期项．因此，我们将根据预报历元 t_0 时刻的平均根数 $\bar{\sigma}_0$ 外推到预报时刻 t 对应的平均根数 $\bar{\sigma}(t)$, 然后转化成该时刻对应的位置矢量 $\boldsymbol{r}(\bar{\sigma})$ 和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}(\bar{\sigma})$, 再去直接计算 t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的周期变化，从而给出预报时刻 t 的位置和速度矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$, 由此可完全避开各种奇点问题．对不同轨道 (包括小 e, 小 i 等), 可用同一种简单表达式，使预报计算方法和相应的计算软件简化，从而提高计算效率.

美国北美防空联合司令部 (NORAD) 用于空间监测的 SGP8 软件就作了类似处理，但有值得改进之处．一是过于简单，略去了 $O(e)$ 量级的周期项，对偏心率稍大的轨道，精度不能令人满意；其次是由于略去了 $O(e)$ 量级的周期项，也就不存在与 ω 有关的长周期项，故导出 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的周期变化中无法让人了解对于地球非球形引力摄动周期项 $\sigma_s^{1)}(t)$ 的处理；更值得注意的是，由于采用了早期 Kozai[1] 的分析解 (关于地球非球形引力位主要项 J_2, J_3, J_4 的摄动), 该解中对 a 的平均根数作了某种处理．这一处理不仅容易导致

2004-07-26 收到原稿， 2004-09-22 收到修改稿

引用错误，而且使得在采用平均根数法前提下解的表达式出现表面上的“差异”[1−3], 对使用者而言，有时难以判断哪一种表达式正确？鉴于这一现状，我们将给出与摄动分析解构造方法完全相吻合的处理方法，不加任何人为处理，且严格分清长、短周期项引起的 $\delta\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\dot{\boldsymbol{r}}$, 导出坐标和速度 $(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})$ 相应的周期变化项 $\delta\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\dot{\boldsymbol{r}}$ 的计算公式，并对于主要问题作了计算验证，结果证实了解的正确性和所要达到的精度.

卫星位置和速度矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$, 可在平均根数 $\bar{\sigma}$ 基础上进行展开，取到一阶周期项可表示为下列形式：

$$\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r})+\delta\boldsymbol{r},\quad \dot{\boldsymbol{r}}=(\dot{\boldsymbol{r}})+\delta\dot{\boldsymbol{r}}\,, \tag{1}$$

其中 $(\boldsymbol{r})$ 和 $(\dot{\boldsymbol{r}})$ 是由平均根数 $\bar{\sigma}$ 给出，即

$$(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}(\bar{\sigma}),\quad (\dot{\boldsymbol{r}})=\dot{\boldsymbol{r}}(\bar{\sigma})\,. \tag{2}$$

而 $\delta\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\dot{\boldsymbol{r}}$ 分别为卫星位置和速度矢量的周期变化项在 t 时刻的值. 本文是按不同的摄动法 (平均根数法或拟平均根数法) 严格区分了长、短周期项导出相应的 $\delta\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\dot{\boldsymbol{r}}$, 以适用于不同的预报方法以及预报历元 t_0 时的不同意义下的平均根数 (平均根数或拟平均根数), 在取项上保留到含 $O(e)$ 量级因子的周期项.

尽管本文只给出了包含地球非球形引力位中主要带谐项 (J_2, J_3, J_4) 的具体结果，但所给出的方法同样适用于考虑其它较小的摄动因素，如田谐项等，由于篇幅有限，本文不再列出.

2 考虑各种摄动时 $\delta\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\dot{\boldsymbol{r}}$ 的摄动分析解

众所周知，影响卫星轨道的因素很多，除了最主要的地球扁率 J_2 项之外，还有带谐项 $J_l(l\geq 3)$ 、田谐项、大气阻力、第三体引力和太阳光压等，当精度要求达到了某一摄动因素的影响量级时，就必须考虑相应的摄动因素才能满足精度的要求. 由于对任何一种摄动因素，我们都可以将其对卫星轨道的影响分解成长期部分和周期部分，对不同的摄动分析解构造方法，可相应地考虑不同的周期项. 任一时刻 t, 卫星的位置和速度矢量可表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}(t)=r\boldsymbol{U}\\ \dot{\boldsymbol{r}}(t)=\dot{r}\boldsymbol{U}+r\dot{\theta}\boldsymbol{V}\end{cases}, \tag{3}$$

其中 r 、$\dot{r}$ 和 $r\dot{\theta}$ 分别是卫星在极坐标系中的向径、径向速度和横向速度， $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 分别是卫星轨道面中径向和横向单位矢量. 如果已经知道某时刻的 r 、$\dot{r}$ 和 $r\dot{\theta}$ 以及 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$, 那么该时刻卫星的位置和速度即由 (3) 式得到. 它们与轨道根数的关系如下：

$$r=a(1-\cos E)\,, \tag{4}$$

$$\dot{r}=\sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}e\sin f,\quad r\dot{\theta}=\frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{r}\,, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\cos\Omega\cos u-\sin\Omega\sin u\cos i\\ \sin\Omega\cos u-\cos\Omega\sin u\cos i\\ \sin u\sin i\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}-\cos\Omega\sin u-\sin\Omega\cos u\cos i\\ -\sin\Omega\sin u+\cos\Omega\cos u\cos i\\ \cos u\sin i\end{pmatrix}. \tag{6}$$

其中 $u=f+\omega$, E 和 f 分别为卫星的偏近点角和真近点角.

将 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 在平均根数处 $\bar{\sigma}$ 展开即得 (1) 式, $(\boldsymbol{r})$ 和 $(\dot{\boldsymbol{r}})$ 即按 (2) 式和相应的 (3)—(6) 式计算, 其中所有的根数 $a,e,\cdots$, 均为相应的平均根数. 而其周期变化 $\delta\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\dot{\boldsymbol{r}}$ 可由根数的周期变化 $\delta a,\delta e,\cdots$ 等给出. 略去推导过程, 直接给出相应的表达式如下:

$$\begin{cases}\delta\boldsymbol{r}=(r)\delta\boldsymbol{U}+\delta r(\boldsymbol{U})\\ \delta\dot{\boldsymbol{r}}=(\dot r)\delta\boldsymbol{U}+\delta\dot r\boldsymbol{U})+(r\dot\theta)\delta\boldsymbol{V}+\delta(r\dot\theta)(\boldsymbol{V})\end{cases}, \tag{7}$$

$$\delta r=(1-e\cos f)\delta a-a\cos f\delta e+ae\sin f\delta M\,, \tag{8}$$

$$\delta\dot r=-\frac{1}{2}ne\sin f\delta a+na(\sin f+e\sin 2f)\delta e+nae(\cos f+e\cos 2f+e)\delta M, \tag{9}$$

$$\delta(r\dot\theta)=-\frac{1}{2}n(1+e\cos f)\delta a+na(\cos f+e\cos 2f)\delta e-nae(\sin f+e\sin 2f)\delta M\,, \tag{10}$$

$$\delta\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\delta U_x\\ \delta U_y\\ \delta U_z\end{pmatrix},\quad \delta\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\delta V_x\\ \delta V_y\\ \delta V_z\end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\begin{cases}\delta U_x=(-\sin\Omega\cos u-\cos\Omega\sin u\cos i)\delta\Omega-(\cos\Omega\sin u+\sin\Omega\cos u\cos i)\delta u+\\ \sin\Omega\sin u\sin i\delta i\\ \delta U_y=(\cos\Omega\cos u-\sin\Omega\sin u\cos i)\delta\Omega-(\sin\Omega\sin u-\cos\Omega\cos u\cos i)\delta u-\\ \cos\Omega\sin u\sin i\delta i\\ \delta U_z=\cos u\sin i\delta u+\sin u\cos i\delta i\end{cases}, \tag{12}$$

$$\begin{cases}\delta V_x=(-\cos\Omega\sin u-\sin\Omega\cos u\cos i)\delta\Omega-(\sin\Omega\cos u+\cos\Omega\sin u\cos i)\delta u-\\ \cos\Omega\cos u\sin i\delta i\\ \delta V_y=(\cos\Omega\cos u-\sin\Omega\sin u\cos i)\delta\Omega-(\sin\Omega\sin u-\cos\Omega\cos u\cos i)\delta u-\\ \cos\Omega\sin u\sin i\delta i\\ \delta V_z=-\sin u\sin i\delta u+\cos u\cos i\delta i\end{cases}. \tag{13}$$

上述各式右端出现的 $a,e,\cdots$ 均为 t 时刻的平均根数, 而 δa 、 δe 、 δi 、 $\delta\Omega$ 、 δu 和 δM 均为 a 、 e 、 i 、 Ω 、 u 和 M 的周期项, 亦是平均根数的函数. 在推导中严格区分短周期项和长周期项, 既可适用于完整意义下的平均根数也适用于拟平均根数.

3 考虑地球非球形引力摄动主要带谐项 (J_2, J_3, J_4) 的结果

对于中低轨卫星，特别是低轨卫星，就空间监测而言，精度要求不会太高，即使需要准确到 10^{-5} (相当于位置精度 100 m), 也只需要考虑地球非球形引力位中主要项的周期摄动效应. 大气阻力摄动的短周期效应通常不超过 10^{-6}, 而第三体引力摄动的短周期摄动量级仅为 10^{-7}, 其长周期摄动效应又往往处理成长期项，并入平均根数中. 故我们主要给出地球非球形引力位中主要带谐项 (J_2, J_3, J_4) 的长、短周期项和主要田谐项 ($J_{lm}, l = 2 \sim 4, m = 1 \sim l$) 中的地球自转项 (其摄动量级可超过 10^{-5}). 但考虑到不占太多的篇幅，本文只列出 J_2, J_3, J_4 项对应的结果，供读者了解这一分析预报方法和 SGP8 软件的有关细节，更好地用于空间监测任务. 当 r 、 $\dot{r}$ 、 $r\dot{\theta}$ 、 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 在 $\bar{\sigma}$ 处展开时，与一阶摄动分析解对应，同样只取到一阶周期项： δa 、 δe 、 δi 、 $\delta\Omega$ 、 δu 和 δM, 而且只保留到表达式中的 $O(e)$ 项 (注意，这并非展成平近点角 M 的三角级数，而是一般二项式展开中的取项，否则收敛性差), 但短周期项和长周期项严格分开. 具体表达式引用文 [3] 中的形式，在文 [4] 中也有相应的表达式，表达形式为

$$\sigma(t) = \bar{\sigma}(t) + [\sigma_l^{(1)}(t) + \overline{\sigma_s^{(1)}(t)}] + [\sigma_s^{(1)}(t) - \overline{\sigma_s^{(1)}(t)}]\,, \tag{14}$$

其中 $\sigma(t)$ 和 $\bar{\sigma}(t)$ 各为 t 时刻的瞬时根数和平均根数，而右端第二和第三部分分别为完整的长周期项和短周期项. 引用这些结果，略去推导过程，直接写出位置和速度变化的短周期部分 $\delta x_s, \cdots$ 和长周期部分 $\delta x_l, \cdots$ 如下：

$$\begin{aligned}\delta x_s = \frac{3J_2}{2a}\{&\sin\Omega\cos i\left[\left(\frac{5}{4}e\sin\omega+\sin u-\frac{7}{4}e\sin(2f+\omega)\right)-\sin^2 i\left(\frac{43}{12}e\sin\omega+\right.\right.\\ &\left.\left.\frac{47}{24}\sin u-\frac{203}{48}e\sin(2f+\omega)+\frac{1}{12}e\sin(2f+3\omega)+\frac{1}{8}\sin 3u-\frac{1}{48}e\sin(4f+3\omega)\right)\right]-\\ &\cos\Omega\left[\left(\frac{5}{4}e\cos\omega+\cos u-\frac{7}{4}e\cos(2f+\omega)\right)-\sin^2 i\left(\frac{23}{12}e\cos\omega+\frac{37}{24}\cos u-\right.\right.\\ &\left.\left.\frac{125}{48}e\cos(2f+\omega)+\frac{1}{12}e\cos(2f+3\omega)+\frac{1}{8}\cos 3u-\frac{1}{48}e\cos(4f+3\omega)\right)\right]\Big\}\,,\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\delta y_s = \frac{3J_2}{2a}\{&-\cos\Omega\cos i\left[\left(\frac{5}{4}e\sin\omega+\sin u-\frac{7}{4}e\sin(2f+\omega)\right)-\sin^2 i\left(\frac{43}{12}e\sin\omega+\right.\right.\\ &\left.\left.\frac{47}{24}\sin u-\frac{203}{48}e\sin(2f+\omega)+\frac{1}{12}e\sin(2f+3\omega)+\frac{1}{8}\sin 3u-\frac{1}{48}e\sin(4f+3\omega)\right)\right]-\\ &\sin\Omega\left[\left(\frac{5}{4}e\cos\omega+\cos u-\frac{7}{4}e\cos(2f+\omega)\right)-\sin^2 i\left(\frac{23}{12}e\cos\omega+\frac{37}{24}\cos u-\right.\right.\\ &\left.\left.\frac{125}{48}e\cos(2f+\omega)+\frac{1}{12}e\cos(2f+3\omega)+\frac{1}{8}\cos 3u-\frac{1}{48}e\cos(4f+3\omega)\right)\right]\Big\}\,,\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\delta z_s = \frac{3J_2}{2a}\sin i\Big\{&-\left[3e\sin\omega+\frac{3}{2}\sin u-\frac{5}{2}e\sin(2f+\omega)\right]+\sin^2 i\left[\frac{43}{12}e\sin\omega+\frac{47}{24}\sin u-\right.\\ &\left.\frac{203}{48}e\sin(2f+\omega)+\frac{1}{12}e\sin(2f+3\omega)+\frac{1}{8}\sin 3u-\frac{1}{48}e\sin(4f+3\omega)\right]\Big\}\,,\end{aligned} \tag{17}$$

$$\delta x_l = \frac{\sin^2 i}{a(4-5\sin^2 i)}\left[\frac{3J_2}{2}\left(\frac{13}{24}-\frac{5}{8}\sin^2 i\right)+\frac{35J_4}{8J_2}\left(\frac{3}{14}-\frac{1}{4}\sin^2 i\right)\right]\times \{-\sin\Omega\cos i\,[3e\sin\omega+e\sin(2f+3\omega)]-\cos\Omega\,[3e\cos\omega-\ e\cos(2f+3\omega)]\}+ \frac{J_3}{8J_2}\sin i\,\{-\sin\Omega\cos i\,[6-6e\cos f-e\cos(f+2\omega)+2\cos 2u-e\cos(3f+2\omega)]+ \cos\Omega\,[e\sin(f+2\omega)-2\sin 2u+e\sin(3f+2\omega)]\}\ , \tag{18}$$

$$\delta y_l = \frac{\sin^2 i}{a(4-5\sin^2 i)}\left[\frac{3J_2}{2}\left(\frac{13}{24}-\frac{5}{8}\sin^2 i\right)+\frac{35J_4}{8J_2}\left(\frac{3}{14}-\frac{1}{4}\sin^2 i\right)\right]\times \{\cos\Omega\cos i\,[3e\sin\omega+e\sin(2f+3\omega)]-\sin\Omega\,[3e\cos\omega-\ e\cos(2f+3\omega)]\}+ \frac{J_3}{8J_2}\sin i\,\{\cos\Omega\cos i\,[6-6e\cos f-e\cos(f+2\omega)+2\cos 2u-e\cos(3f+2\omega)]+ \sin\Omega\,[e\sin(f+2\omega)-2\sin 2u+e\sin(3f+2\omega)]\}\,, \tag{19}$$

$$\delta z_l = \frac{\sin^3 i}{a(4-5\sin^2 i)}\left[\frac{3J_2}{2}\left(\frac{13}{24}-\frac{5}{8}\sin^2 i\right)+\frac{35J_4}{8J_2}\left(\frac{3}{14}-\frac{1}{4}\sin^2 i\right)\right]\times [3e\sin\omega+e\sin(2f+3\omega)]+ \frac{J_3}{8J_2}\{4e\cos f+\sin^2 i\,[6-6e\cos f-e\cos(f+2\omega)+2\cos 2u-e\cos(3f+2\omega)]\}\ , \tag{20}$$

$$\delta\dot{x}_s = \frac{3J_2}{4a}n\{\sin\Omega\cos i\,[(e\cos\omega-2\cos u-4e\cos(2f+\omega))+\sin^2 i\left(-\frac{41}{12}e\cos\omega+ \frac{49}{12}\cos u+\frac{21}{2}e\cos(2f+\omega)-\frac{13}{12}e\cos(2f+3\omega)-\ \frac{3}{4}\cos 3u-\frac{7}{12}e\cos(4f+3\omega)\right)]+ \cos\Omega\,[(e\sin\omega-2\sin u-4e\sin(2f+\omega))+\sin^2 i\left(-\frac{19}{12}e\sin\omega+\frac{35}{12}\sin u+ \frac{35}{6}e\sin(2f+\omega)-\frac{13}{12}e\sin(2f+3\omega)-\ \frac{3}{4}\sin 3u-\frac{7}{12}e\sin(4f+3\omega)\right)]\}\ , \tag{21}$$

$$\delta\dot{y}_s = \frac{3J_2}{4a}n\{-\cos\Omega\cos i\,[(e\cos\omega-2\cos u-4e\cos(2f+\omega))+\sin^2 i\left(-\frac{41}{12}e\cos\omega+ \frac{49}{12}\cos u+\frac{21}{2}e\cos(2f+\omega)-\frac{13}{12}e\cos(2f+3\omega)-\ \frac{3}{4}\cos 3u-\frac{7}{12}e\cos(4f+3\omega)\right)]+ \sin\Omega\,[(e\sin\omega-2\sin u-4e\sin(2f+\omega))+\sin^2 i\left(-\frac{19}{12}e\sin\omega+\frac{35}{12}\sin u+ \frac{35}{6}e\sin(2f+\omega)-\frac{13}{12}e\sin(2f+3\omega)-\ \frac{3}{4}\sin 3u-\frac{7}{12}e\sin(4f+3\omega)\right)]\}\ , \tag{22}$$

$$\delta\dot{z}_s = \frac{3J_2}{4a}n\sin i\left\{\left[-3e\cos\omega+3\cos u+\frac{25}{3}e\cos(2f+\omega)\right]+\sin^2 i\left[\frac{41}{12}e\cos\omega- \frac{49}{12}\cos u-\ \frac{21}{2}e\cos(2f+\omega)+\frac{13}{12}e\cos(2f+3\omega)+\ \frac{3}{4}\cos 3u+\frac{7}{12}e\cos(4f+3\omega)\right]\right\}\ , \tag{23}$$

$$\delta\dot{x}_l = \frac{\sin^2 i}{a(4-5\sin^2 i)}n\left[\frac{3J_2}{2}\left(\frac{13}{12}-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)+\frac{35J_4}{2J_2}\left(\frac{3}{28}-\frac{1}{8}\sin^2 i\right)\right]\times [-e\cos(2f+3\omega)\sin\Omega\cos i-e\sin(2f+3\omega)\cos\Omega]+ \frac{J_3}{8J_2}n\sin i\,\{\sin\Omega\cos i\,[-6e\sin f+3e\sin(f+2\omega)+4\sin 2u+e\sin(3f+2\omega)]+ \cos\Omega\,[-3e\cos(f+2\omega)-4\cos 2u-e\cos(3f+2\omega)]\}\ , \tag{24}$$

$$\delta\dot{y}_l = \frac{\sin^2 i}{a(4-5\sin^2 i)} n \left[\frac{3J_2}{2}\left(\frac{13}{12}-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)+\frac{35J_4}{2J_2}\left(\frac{3}{28}-\frac{1}{8}\sin^2 i\right)\right]\times$$
$$[e\cos(2f+3\omega)\cos\Omega\cos i - e\sin(2f+3\omega)\sin\Omega]+$$
$$\frac{J_3}{8J_2} n\sin i\{-\cos\Omega\cos i[-6e\sin f+3e\sin(f+2\omega)+4\sin 2u+e\sin(3f+2\omega)]+$$
$$\sin\Omega[-3e\cos(f+2\omega)-4\cos 2u-e\cos(3f+2\omega)]\}\ , \tag{25}$$

$$\delta\dot{z}_l = \frac{\sin^3 i}{a(4-5\sin^2 i)} n \left[\frac{3J_2}{2}\left(\frac{13}{12}-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)+\frac{35J_4}{2J_2}\left(\frac{3}{28}-\frac{1}{8}\sin^2 i\right)\right] e\cos(2f+3\omega)+$$
$$\frac{J_3}{8J_2} n\sin i\{-4e\sin f+\sin^2 i[6e\sin f-3e\sin(f+2\omega)-4\sin 2u-e\sin(3f+2\omega)]\}\ . \tag{26}$$

以上各式中出现的轨道根数均为平均根数. 最后给出

$$\delta\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \delta x_s+\delta x_l \\ \delta y_s+\delta y_l \\ \delta z_s+\delta z_l \end{pmatrix},\quad \delta\dot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \delta\dot{x}_s+\delta\dot{x}_l \\ \delta\dot{y}_s+\delta\dot{y}_l \\ \delta\dot{z}_s+\delta\dot{z}_l \end{pmatrix}. \tag{27}$$

若采用平均根数法, 则 $\delta\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\dot{\boldsymbol{r}}$ 均分别包含上式右端两个部分, 若采用拟平均根数法, 则仅包含右端的短周期部分, 即 $\delta x_s,\cdots,\delta\dot{x}_s,\cdots$.

4 数值验证

为了说明该方法的可行性及其精度, 即对于小偏心率, 亦可通过 Kepler 根数 a 、e 、i 、Ω 、ω 和 M 进行摄动外推, 就上面给出的以地球非球形引力主要带谐项 (J_2, J_3, J_4) 摄动为例, 在考虑相同摄动因素的条件下, 和高精度的数值法进行比较. 为了便于比较, 这里将位置速度转换为轨道根数列出, 而且用 $\lambda=\omega+M$ 代替 M, 算例结果见表 1.

表 1 初始根数: $a=6942.7488\,\mathbf{km}$, $e=0.00634566$, $i=98.2237^\circ$, $\Omega=101.0486^\circ$, $\omega=253.1687^\circ$, $M=106.8618^\circ$

Table 1 Initial orbit: $a=6942.7488\,\mathbf{km}$, $e=0.00634566$, $i=98.2237^\circ$, $\Omega=101.0486^\circ$, $\omega=253.1687^\circ$, $M=106.8618^\circ$

Time(minute)	Analytical methed			Numerical methed		
	a(km)	e	$i(^\circ)$	a(km)	e	$i(^\circ)$
	$\Omega(^\circ)$	$\omega(^\circ)$	$\lambda(^\circ)$	$\Omega(^\circ)$	$\omega(^\circ)$	$\lambda(^\circ)$
1440	6951.85992	0.005259	98.218094	6951.95568	0.005264	98.218119
	102.105520	250.850502	355.911563	102.105510	250.590673	355.911635
2880	6951.59982	0.005356	98.218258	6951.70169	0.005362	98.218274
	103.162292	246.762971	351.790865	103.162286	246.523995	351.792314

上述计算结果表明, 对于低轨卫星预报一天 (相当于 10^2 弧段), 精度可达到 10^{-5}, 而分析法本身的精度也是如此, 这和理论精度一致.

由于该方法在位置预报的计算过程中有效地避免了小 e 、小 i 等奇点问题, 公式简单, 适应性强, 在预报精度要求不高的情况下, 如空间环境监测和卫星实时跟踪测量等的多目标监测中有着很好的应用效果.

参 考 文 献

1 Kozai Y. AJ, 1959, 64(9): 367
2 Cook G E. Celest Mech, 1973, 7(3): 301
3 刘林. 人造地球卫星轨道力学 (第五章). 北京：高等教育出版社， 1992
4 刘林. 航天器轨道理论 (第五章). 北京：国防工业出版社， 2000

An Analytical Method for Satellite Orbit Forecasting

LIU Lin[1,2] WANG Yan-rong[1,2]
(1 *Department of Astronomy, Nanjing University, Nanjing* 210093)
(2 *Institute of Space Environment and Astrodynamics*
Research of Nanjing University, Nanjing 210093)

Abstract The orbit forecasting plays an important role in the observing and tracking of plentiful space objects. The analytical method is always used due to the large amount of the objects and not very high accuracy of forecasting. A method based on the position and velocity derived from the mean orbit elements directly is given, which is to avoid the problem of singularity in calculating the periodic terms of orbit elements variation, thus the process and software can be simplified.

Key words celestial mechanics: orbit forecast, Orbit elements