第 46 卷 第 4 期　　天 文 学 报　　Vol.46 No.4
2005 年 10 月　　ACTA ASTRONOMICA SINICA　　Oct., 2005

单站单圈测距资料初轨计算的单位矢量法*

掌 静 [1]　马静远 [1]　陆本魁 [1]　傅敏辉 [2]　邹惠之 [2]

(1 中国科学院紫金山天文台　南京 210008)
(2 中国卫星海上测控部　江阴　214431)

摘要　根据单位矢量法测轨原理，在已知轨道面参数 i, Ω 的前提下，给出了一种适用于单站单圈测距资料的初轨计算方法．计算结果表明，方法是有效的．在没有测角资料或测角资料精度显著低于测距精度的情况下，有应用价值．

关键词　天体力学：初轨计算，单圈，测距
中图分类号：P 135;　　**文献标识码**：A

1 引言

初始轨道计算，是人造地球卫星轨道测定的主要内容之一 [1]．单站单圈测角资料，可以独立地测定 6 个轨道参数．单站单圈测距资料，不能独立地测定 6 个轨道参数，只能在已知轨道面参数 i 、 Ω 的前提下，测定另外 4 个参数 a 、 e 、 ω 、 M．本文根据单位矢量法测轨原理，给出了这种情况下的一种初轨计算方法．对于三元素资料 (测角资料 + 测距资料), 一般可以采用 UVM1 、 PUVM1 和 UVM2 进行初轨计算 [2−6], 但当：

(1) 测距资料精度远远高于测角资料精度;

(2) 具有较高精度的轨道面参数 i 、 Ω (例如由多圈多站资料经过轨道改进得到).

利用本文方法可以得到精度较高的另外 4 个参数，特别是轨道半长轴的测定精度，这对保证卫星下次过境预报精度是十分重要的．

实测计算结果表明，本方法是有效的．对于独立工作的测站，是有应用价值的．

2 原理

在二体问题中，我们有

$$\boldsymbol{r} = f\boldsymbol{r}_0 + g\dot{\boldsymbol{r}}_0 = \rho\boldsymbol{\rho}^* + \boldsymbol{R}\,. \tag{1}$$

已知轨道面参数 i_0 、 Ω_0, 即已知单位矢量系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega}_0 = +\cos\Omega_0\boldsymbol{i} + \sin\Omega_0\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{\Omega}_0' = -\cos i_0\sin\Omega_0\boldsymbol{i} + \cos i_0\cos\Omega_0\boldsymbol{j} + \sin i_0\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{w}_0 = +\sin i_0\sin\Omega_0\boldsymbol{i} - \sin i_0\cos\Omega_0\,\boldsymbol{j} + \cos i_0\boldsymbol{k} \end{cases}. \tag{2}$$

2004-11-30 收到原稿，　2005-04-09 收到修改稿
* 国家自然科学基金 (10303001) 资助

利用

$$\boldsymbol{r}_0 = A_0\boldsymbol{\Omega}_0 + B_0\boldsymbol{\Omega}_0', \quad \dot{\boldsymbol{r}}_0 = C_0\boldsymbol{\Omega}_0 + D_0\boldsymbol{\Omega}_0', \tag{3}$$

其中：

$$\begin{cases} A_0 = r_0\cos u_0 \\ B_0 = r_0\sin u_0 \\ C_0 = \frac{1}{\sqrt{p_0}}(\eta - \sin u_0) \\ D_0 = \frac{1}{\sqrt{p_0}}(\xi + \cos u_0) \end{cases}, \tag{4}$$

代入 (1) 式有

$$fA_0\boldsymbol{\Omega}_0 + fB_0\boldsymbol{\Omega}_0' + gC_0\boldsymbol{\Omega}_0 + gD_0\boldsymbol{\Omega}_0' = \rho\boldsymbol{\rho}^* + \boldsymbol{R}.$$

再利用 $\boldsymbol{\rho}^*$ 点乘方程两边，可得

$$f(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}_0)A_0 + f(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}_0')B_0 + g(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}_0)C_0 + g(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}_0')D_0 = \boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{R} + \rho\,. \tag{5}$$

这就是单圈测距资料初轨计算的条件方程，其中 A_0 、 B_0 、 C_0 、 D_0 是待求量，ρ 、 $\boldsymbol{R}$ 、 $\boldsymbol{\Omega}_0$ 、 $\boldsymbol{\Omega}_0'$ 是已知量， f 、 g 、 $\boldsymbol{\rho}^*$ 在第一次用最小二乘法求解时，代入估计值 (初值选择见下一节), 迭代计算时，按严格的理论公式计算.

3　初值

3.1　具有测角资料时

$$\boldsymbol{\rho}^* = +\cos A\cos h\boldsymbol{\Phi}^* + \sin A\cos h\boldsymbol{S}^* + \sin h\boldsymbol{R}^*, \tag{6}$$

其中,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}^* = -\cos S\sin\phi\boldsymbol{i} - \sin S\sin\phi\boldsymbol{j} + \cos\phi\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{S}^* = -\sin S\boldsymbol{i} + \cos S\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{R}^* = +\cos S\cos\phi\boldsymbol{i} + \sin S\cos\phi\boldsymbol{j} + \sin\phi\boldsymbol{k} \end{cases}, \tag{7}$$

$$S = S_G + \lambda,$$

S_G 为 t 时刻所对应的格林尼治恒星时， λ 、 ϕ 和 H 分别为测站的地理经度、地理纬度和大地高.

利用 $\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{\rho}^* + \boldsymbol{R}$ 进行中心平滑，不难得到 $t_0 = \dfrac{1}{2}(t_1 + t_n)$ 时刻的坐标 $\boldsymbol{r}_0$ 和速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$. 则

$$\begin{cases} f = 1 - \frac{F}{r_0} \\ g = Gr_0 + F(r_0\dot{r}_0) \\ F = a(1-\cos\Delta E) \\ G = \sqrt{a}\sin\Delta E \end{cases}. \tag{8}$$

3.2 没有测角资料时

$$\rho_\phi = \cos h \cos A\,, \quad \rho_S = \cos h \sin A\,, \quad \rho_R = \sin h \tag{9}$$

是不知道的，此时利用

$$\boldsymbol{W}_0 \cdot \boldsymbol{r} = \rho(\boldsymbol{W}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}^*) + \boldsymbol{W}_0 \cdot \boldsymbol{R} = 0\,,$$
$$r^2 = \rho^2 + (\boldsymbol{R})^2 + 2\rho\boldsymbol{\rho}^* \cdot \boldsymbol{R}\,,$$
$$(\boldsymbol{\rho})^2 = 1\,,$$

可以得到 ρ_ϕ 、 ρ_S 、 ρ_R 的 3 个方程:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{W}_0 \cdot \boldsymbol{\Phi}^*)\rho_\phi + (\boldsymbol{W}_0 \cdot \boldsymbol{S}^*)\rho_S + (\boldsymbol{W}_0 \cdot \boldsymbol{R}^*)\rho_R = \frac{\Delta R}{\rho}(\boldsymbol{W}_0 \cdot \boldsymbol{\Phi}^*) - \frac{R_0}{\rho}(\boldsymbol{W}_0 \cdot \boldsymbol{R}^*) \\ -\Delta R\rho_\phi + R_0\rho_R = \frac{1}{2\rho}[r^2 - \rho^2 - (R_0)^2 - (\Delta R)^2] \\ (\rho_\phi)^2 + (\rho_S)^2 + (\rho_R)^2 = 1 \end{cases}. \tag{10}$$

近似取 $r \approx r_0$, 在 $|\rho_\phi| < 1$, $|\rho_S| < 1$ 的约束条件下，求解 ρ_ϕ 或 ρ_S 的二次方程，可求出 ρ_ϕ 、 ρ_S 、 ρ_R 的估计值.

$$f = 1 - \frac{1}{2r_0^3}(t - t_0)^2\,, \quad g = (t - t_0) - \frac{1}{6r_0^3}(t - t_0)^3\,, \tag{11}$$

r_0 的值，可按已知信息适当选取.

4 推广

4.1 测速资料的应用

若同时具有较高精度的测速资料，可仿照 (5) 式，建立测速资料的条件方程

$$\dot{f}(\boldsymbol{\rho}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}_0)A_0 + \dot{f}(\boldsymbol{\rho}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}_0')B_0 + \dot{g}(\boldsymbol{\rho}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}_0)C_0 + \dot{g}(\boldsymbol{\rho}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}_0')D_0 = \boldsymbol{\rho}^* \cdot \dot{\boldsymbol{R}} + \dot{\rho}\,. \tag{12}$$

对于 $\dot{f}$ 、 $\dot{g}$ 的计算:

当具有测角资料时

$$\dot{f} = -\frac{G}{r_0 r}\,, \quad \dot{g} = 1 - \frac{F}{r}\,, \quad r = r_0 + F(1 - \frac{r_0}{a}) + G(r_0\dot{r_0})\,. \tag{13}$$

当没有测角资料时

$$\dot{f} = -\frac{1}{r_0^3}(t - t_0)\,, \quad \dot{g} = 1 - \frac{1}{2r_0^3}(t - t_0)^3\,. \tag{14}$$

(12) 和 (5) 式一起用加权最小二乘法求解，在迭代计算过程中，按严格的理论公式计算 $\dot{f}$ 、 $\dot{g}$ 和 $\boldsymbol{\rho}^*$[2].

4.2 考虑摄动时的修正

(5) 和 (12) 式是二体问题下的条件方程，与文 [2] 相对应，我们仍称为 UVM1. 由于测距数据的精度较高，当测量弧段达到一定长度时就需要考虑摄动的影响. 仿照 PUVM1 原理 [3], 我们也可得到只有测距和测速数据时的条件方程：

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}_0)A_0+f(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}_0')B_0+g(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}_0)C_0+g(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}_0')D_0=\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{R}-\omega(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{W}_0)+\rho \\ \dot f(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}_0)A_0+\dot f(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}_0')B_0+\dot g(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}_0)C_0+\dot g(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}_0')D_0=\boldsymbol{\rho}^*\cdot\dot{\boldsymbol{R}}-\dot\omega(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{W}_0)+\dot\rho \end{cases}. \tag{15}$$

与文 [3] 相对应，我们仍称为 PUVM1. 在按严格的理论计算公式

$$\begin{cases} f=\boldsymbol{F}_0\cdot\boldsymbol{r} \\ g=\boldsymbol{G}_0\cdot\boldsymbol{r} \\ \omega=\boldsymbol{W}_0\cdot\boldsymbol{r} \end{cases}, \tag{16}$$

$$\begin{cases} \dot f=\boldsymbol{F}_0\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \\ \dot g=\boldsymbol{G}_0\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \\ \dot\omega=\boldsymbol{W}_0\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \end{cases}. \tag{17}$$

$$\boldsymbol{F}_0=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}_0\times\boldsymbol{W}_0}{A_0D_0-B_0C_0}=\frac{D_0\boldsymbol{\Omega}_0-C_0\boldsymbol{\Omega}_0'}{A_0D_0-B_0C_0}.$$

$$\boldsymbol{G}_0=\frac{\boldsymbol{W}_0\times\boldsymbol{r}_0}{A_0D_0-B_0C_0}=\frac{A_0\boldsymbol{\Omega}_0'-B_0\boldsymbol{\Omega}_0}{A_0D_0-B_0C_0}.$$

计算 f 、 g 、 ω 和 $\dot f$ 、 $\dot g$ 、 $\dot\omega$ 时，对 UVM1, 用二体问题计算 $\boldsymbol{r}$ 、 $\dot{\boldsymbol{r}}$; 对 PUVM1, 用摄动计算 $\boldsymbol{r}$ 、 $\dot{\boldsymbol{r}}$. 同样,

$$\boldsymbol{\rho}^*=\frac{1}{\rho_c}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})=\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|},$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 的计算也是如此.

5 算例

为了验证本方法的特点和有效性，本文进行了大量的实测计算和仿真计算.

实测计算的比对标准采用多站多圈的轨道改进结果. 表中第一列是采用文 [3] 的 PUVM1 四元素计算结果，第二、三列是采用本文 UVM1 和 PUVM1 计算结果，其中 i_0 、 Ω_0 是由多站多圈的轨道改进提供的. 表中结果为多组计算结果的均方根值.

5.1 大偏心率卫星实测计算 (见表 1)

轨道半径 $a=30170.581\,\mathrm{km}$, 轨道倾角 $i=13.0967\,\mathrm{deg}$, 偏心率 $e=0.6013$.

表 1 大偏心率卫星实测计算结果

Table 1 Results for lager eccentricity orbit

Algorithm	Ref[3]	This paper	
	PUVM1	UVM1	PUVM1
Δa (km)	−4.4603	−1.3806	0.6792
$\Delta e(10^{-3})$	−1.0771	−1.2442	−1.3801
$\Delta i(deg)$	0.1106	− − −	− − −
$\Delta\Omega(deg)$	0.0174	− − −	− − −
$\Delta\omega(deg)$	−0.0670	−0.0502	−0.1153
$\Delta M(deg)$	0.0551	0.0486	0.0649
measure data	A, h, ρ	ρ	ρ

5.2 小偏心率卫星实测计算 (见表 2)

轨道半径 $a = 6712.8888\,\mathrm{km}$, 轨道倾角 $i = 42.419633\,\mathrm{deg}$, 偏心率 $e = 0.000255$.

表 2 小偏心率卫星实测计算结果

Table 2 Results for near-circular orbit

Algorithm	Ref[3]	This paper	
	PUVM1	UVM1	PUVM1
Δa (km)	10.1102	2.8403	2.6661
Δi (deg)	0.0134	− − −	− − −
$\Delta\Omega$ (deg)	0.0396	− − −	− − −
$\Delta\xi(10^{-3})$	0.6304	0.4563	0.1812
$\Delta\eta(10^{-3})$	0.1283	0.3744	0.4662
$\Delta\lambda$ (deg)	0.0734	0.0723	0.0841
measure data	$A, h, \rho, \dot\rho$	$\rho, \dot\rho$	$\rho, \dot\rho$

5.3 小偏心率卫星模拟计算 (见表 3 和表 4)

轨道半径 $a = 7077.807\,\mathrm{km}$, 轨道倾角 $i = 98.207O\,\mathrm{deg}$, 偏心率 $e = 0.000331$.

表 3 小偏心率卫星仿真计算结果 (i, Ω 无误差固定)

Table 3 Simulative results for near-circular satellite (i, Ω are given without bias)

Algorithm	Ref[3]	This paper	
	PUVM1	UVM1	PUVM1
Δa (km)	0.3700	0.8823	0.0234
Δi (deg)	0.0053	− − −	− − −
$\Delta\Omega$ (deg)	0.0021	− − −	− − −
$\Delta\xi(10^{-3})$	0.0320	0.1362	0.0031
$\Delta\eta(10^{-3})$	0.0130	0.7741	0.0062
$\Delta\lambda$ (deg)	0.0015	0.0935	0.0006
measure data	$A, h, \rho, \dot\rho$	$\rho, \dot\rho$	$\rho, \dot\rho$

表 4　小偏心率卫星仿真计算结果 (i, Ω 有误差固定)

Table 4　Simulative results for near-circular satellite (i, Ω are given with bias)

Algorithm	PUVM1		
	i with bias	Ω with bias	i, Ω with bias
Δa (km)	0.3833	1.3377	1.7437
Δi (deg)	0.0050	− − −	0.0050
$\Delta\Omega$ (deg)	− − −	0.0050	0.0050
$\Delta\xi(10^{-3})$	0.0270	0.1110	0.1412
$\Delta\eta(10^{-3})$	0.0101	0.0421	0.0542
$\Delta\lambda$ (deg)	0.0008	0.0009	0.0006
measure data	$A, h, \rho, \dot{\rho}$	$\rho, \dot{\rho}$	$\rho, \dot{\rho}$

注：仿真计算中测角数据的误差为 0.1 deg, 测距数据的误差为 10 m, 测速数据的误差为 0.1 m/s. 计算结果为 200 组数据的均方根值.

6　分析

从计算结果可以看出：

(1) 本文在仅采用了精度较高的测距和测速资料时，通过固定精度较高的轨道面参数 i 、Ω, 得到的另外 4 个轨道参数的精度要优于三、四元素 PUVM 的计算精度 [3], 特别是轨道半长轴的精度尤为显著，因此本文方法是有效的. 同时，由于测距测速数据的精度较高，在初轨计算中考虑摄动是必要的.

(2) 本文方法适用于任意偏心率的卫星.

参 考 文 献

1　易照华. 天体力学引论. 上海：科学出版社， 1978

2　陆本魁，戎鹏志，吴建民等. 宇航学报， 1997, 18(2): 1

3　陆本魁，李剑峰，马静远等. 宇航学报， 1999, 20(1): 14

4　Lu Ben-kui, Ma Jing-yuan, Xia Yi, et al. ChA&A, 2004, 28: 88

5　Lu Ben-kui, Ma Jing-yuan, Xia Yi, et al. AcASn, 2003, 44(4): 369 (陆本魁，马静远，夏益等，天文学报， 2003, 44(4): 369)

6　He Jing, Ma Jing-yuan, Lu Ben-kui, et al. AcASn, 2005, 46(2): 181 (何晶，马静远，陆本魁等. 天文学报， 2005, 46(2): 181)

Unit-Vector-Method for Preliminary Orbit Determination with Range Data of Single Arc at Single Station

ZHANG Jing[1] MA Jing-yuan[1] LU Ben-kui[1] FU Ming-hui[2] ZOU Hui-zhi[2]
(1 *Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing* 210008)
(2 *The Department of Chinese Observatory of the Sea, Jiangyin* 214431)

Abstract In the case of that the parameters of orbit plane (i, Ω) are given,a method for preliminary orbit determination is presented for range data of single station and single arc with the principle of Unit-Vector-Method(UVM). Especially, if the angular data are not available or the accuracy of angular data is much lower than that of range data, this method is efficient and valuable.

Key words celestial mechanics: preliminary orbit determination, single arc, range data