第 46 卷 第 4 期 天 文 学 报 Vol.46 No.4
2005 年 10 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Oct., 2005

$8M_\odot$ 恒星演化过程中湍流应力作用效果的分析*

汪志云 [1,2] 蒋苏云 [1] 陈培杰 [2]

(1 浙江师范大学物理系 金华 321004)
(2 襄樊学院物理学系 襄樊 441053)

摘要 以恒星结构与演化理论中常用的混合程理论为基础，将湍流作用表现出来的宏观应力引入恒星结构与演化模型中的流体静力学平衡方程. 通过计算 $8M_\odot$ 恒星从主序星到早期 AGB 星演化过程中湍流应力梯度与引力的比值来研究湍流作用对恒星演化与结构的影响. 结果发现：在核燃烧阶段其比值很小，湍流作用几乎可以忽略；但在 RGB 和早期 AGB 演化阶段，发现在恒星外部存在一个湍流应力梯度为引力的几倍到几十倍的很小区域，而该小区域以外的对流区内湍流作用力能达到引力的 65%, 这些对 AGB 星的中心温度变化与热脉动发生的时间等恒星结构与演化规律有不同程度的影响.

关键词 **恒星：内部，恒星：演化，恒星：渐近巨星支，湍流**
中图分类号： P 142; **文献标识码：** A

1 引言

在恒星演化过程中，对流起着极其重要的作用，一方面对流的混合作用对化学组成的分布、核燃烧的产生有重要的影响 [1−3], 另一方面对流的传能、传压以及对流与振动的耦合作用 [4,5] 又对恒星内部的温度分布、压强、密度等产生重要的影响. 特别是当恒星演化到巨星分支和渐近巨星分支阶段时，恒星的整个外壳处于对流状态，并且对流区内通过对流作用的传能远大于辐射作用的传能 [6,7]. 所以在研究恒星的结构与演化时，对流作用是不能被忽略的. 在恒星内部对流作用表现为复杂湍流运动，蒋苏云等 [8−10] 将对流作用考虑为湍流压的形式引入到恒星的外层演化，计算了湍流压对恒星结构与演化的影响. 实际上气体的湍流运动存在着宏观上的 “表现应力”[11]. 本文的目的是将湍流作为一种应力的形式引入恒星内部的流体静力学平衡方程. 并对 $8M_\odot$ 恒星在不同演化时期的湍流应力与引力进行比较，分析湍流应力对恒星内部各物理量的影响，由此探讨其对恒星结构与演化的影响.

2004-11-01 收到原稿， 2005-06-09 收到修改稿
* 浙江省自然科学基金 (103002) 资助

2　静力学平衡方程

在恒星结构与演化理论中，采用的恒星模型是在一些假设基础上建立起来的一组方程 [12], 包括质量分布方程、流体静力学平衡方程、能量平衡和传递方程、化学组成变化方程. 其中流体静力学平衡方程为：

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4}\,, \tag{1}$$

式中，r 为某一体元到恒星中心的距离，P 表示该体元处的压强，M_r 表示以 r 为半径的球体内的质量. G 为引力常数. 此方程考察了距离恒星中心为 r 处的体元，当排除了磁场力、潮汐力和自转的影响时，作用在体元上的力仅考虑了指向中心的引力.

几十年来，人们处理对流问题都是采用了 Vitemse 发展的混合程对流理论 [13−18], 在静力学平衡方程中没有考虑湍流应力的作用. 根据此理论，在辐射平衡区内，方程 (1) 能反映体元的运动. 但在对流区内，该方程就不能真实地描述体元的运动. 由经典的流体运动方程：　Navier-Stokes 方程 [11], 此时体元的运动方程应为：

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\rho g - \nabla p - \nabla(\rho v u)\,, \tag{2}$$

式中 u 表示体元的宏观运动速度，　v 表示体元的真实运动速度.

在此作近似考虑：　$v = u = v_t$, v_t 为气体的湍流运动速度. 代入 (2) 式得：

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\rho g - \nabla p - \nabla(\rho v_t^2)\,. \tag{3}$$

在恒星的结构模型计算中，人为地假设整个恒星处于统一静态平衡，而忽略与时间有关的项，并考虑一维情况，　(3) 式变换得：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\rho g - \frac{\mathrm{d}(\rho v_t^2)}{\mathrm{d}r}\,, \tag{4}$$

此式即为对流区内的流体静力学平衡方程. 蒋苏云等 [10] 根据混合程对流理论解得 v_t^2 表达式为 [12]:

$$v_t^2 = \frac{g\delta\alpha^2 H_p}{8}(W - \frac{8}{27}U - \frac{E}{3W})^2\,. \tag{5}$$

式中：

$$U = \frac{12\sigma T^3}{C_P\rho^2 l\,\bar{\kappa}}(\frac{8H_P}{gl^2\delta})^{1/2}\,,$$

$$W \equiv (\frac{1}{2}A + \sqrt{D})^{1/3}\,,$$

$$\frac{1}{2}A \equiv [\frac{4}{9}(\nabla_r - \nabla_{ad}) + (\frac{19^3}{27^3} - \frac{1}{9})U^2]U\,,$$

$$D \equiv (\frac{A}{2})^2 + (\frac{E}{3})^3\,,$$

$$\frac{E}{3}\equiv\frac{368}{729}U^2,\qquad g=\frac{GM_r}{r^2}\,,$$
$$H_P=\frac{\Re T}{g\mu\beta},\qquad \delta=-(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln T})_P\,.$$

令 $g_t=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}(\rho v_t^2)}{\mathrm{d}r}$ 代入 (5) 式可得到：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}=-\rho g-\rho g_t\,. \tag{6}$$

(6) 式中 $\rho g=\rho\dfrac{GM_r}{r^2}$ 为体元所受到的引力作用项，$\rho g_t=\dfrac{\mathrm{d}(\rho v_t^2)}{\mathrm{d}r}$ 是湍流应力作用项，ρv_t^2 为湍流应力．g 和 g_t 分别表示两种作用力对流体元所产生的加速度．由 (1) 式和 (6) 式，即可得到恒星演化模型的流体静力学平衡方程为：

$$\text{辐射平衡区：}\qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}M_r}=-\frac{GM_r}{4\pi r^4}\,.$$
$$\text{对流区：}\qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}M_r}=-\frac{GM_r}{4\pi r^4}-\frac{1}{4\pi r^2}g_t\,. \tag{7}$$

3 $8M_\odot$ 恒星在各演化阶段的湍流应力梯度与引力的比较值

由湍流应力的表达式不难发现，对流区内某一体元所受到的湍流应力大小与其压强、温度、光度、密度等物理量有关系．为了知道湍流应力的大小和对恒星各演化阶段所产生的影响，我们计算了初始质量为 $8M_\odot$ 的恒星从主序到早期 AGB 星各演化阶段的恒星演化．所采用的恒星结构与演化模型是在 Kippenhahn 等 [15] 设计的恒星结构与演化程序基础上，作了如下改进：

(1) 在进行恒星内部 (拟合点以内) 和从 $\tau=2/3$ 到拟合点处的模型计算时，静力学平衡方程的计算分两种情况，根据 Schwarzschild 产生对流非稳定性判据 [12]，在辐射平衡区内采用 (1) 式；在对流区采用 (7) 式，即加进了湍流应力项．

(2) 星风物质损失公式采用最近由 Nieuwenhuijzen 等 [16] 观测进行拟合得到的星风质量损失率公式

$$\lg\dot{M}=-7.93+1.64\lg L+0.16\lg Te-1.61\lg M\,.$$

图 1 给出了 $8M_\odot$ 恒星在演化过程中，在对流区内的流体静力学平衡方程中引入了湍流应力项与未考虑此力的两种情况下，恒星在赫罗图中的演化轨迹．图中的线段 AC 、CD 、DEFG 和 GH 分别表示恒星处于主序、跨过赫罗图中的空隙区、氦燃烧和早期 AGB4 个演化阶段，其中赫罗图中的轨迹曲线都结束于氢壳层第二次燃烧刚开始的时候，演化年龄分别为 $t=3.5862\times10^7$ 年和 $t=3.5821\times10^7$ 年，也正是热脉动开始起来的时候．这也说明在考虑湍流应力的时候，第二次氢壳层开始燃烧和热脉动比不考虑湍流作用时发生得更早些，提前了大约 4×10^4 年．从图中可以见在恒星核燃烧阶段两种情况下恒星

的演化轨迹基本一致，但在赫罗图中的空隙区和早期 AGB 阶段恒星的演化轨迹出现了较小的偏差．引入湍流应力项后，在跨过赫罗图空隙区阶段，恒星的最低点温度更低；在 AGB 阶段，恒星的演化轨迹略为向右偏转，即温度降低光度减弱的方向，这与蒋苏云等人以湍流压来处理对流作用所得到的结论是基本一致的，但此图中湍流作用对演化轨迹的影响并不太明显．图 2 给出了在中心氦燃烧以后的恒星中心温度随密度的变化，在考虑了湍流作用力后， AGB 演化阶段其中心温度上升，这与蒋苏云等人所得的结论完全不同．说明对流作用对恒星 AGB 阶段以前的演化影响较小，但是对 AGB 阶段的演化与结构都有较大的影响．

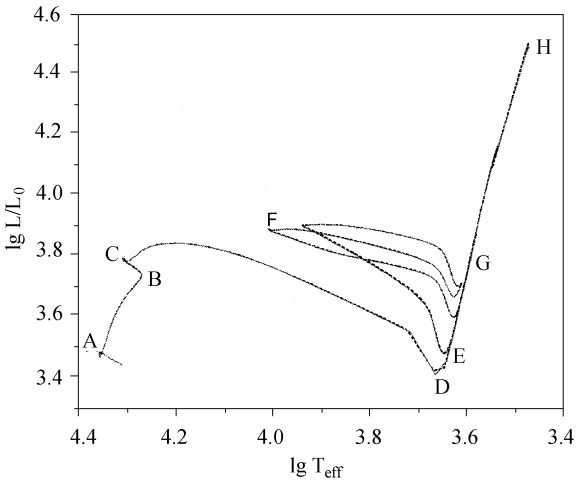

图 1　$8M_{\odot}$ 恒星在赫罗图中的演化轨迹（实线表示计算了湍流应力时的演化轨迹；虚线表示没计算湍流应力时的演化轨迹）

Fig. 1　The evolutionary track in the HR diagram for star with $8M_{\odot}$ (Solid line and dotted line indicate the cases with and without the effect of turbulent stress respectively)

中等质量恒星在主序演化 (即氢燃烧) 阶段和氦燃烧阶段，恒星内部的对流区主要存在于氢和氦燃烧层，其他区域及恒星外部的湍流作用力为零 [12]．图 3 给出了 $8M_{\odot}$ 恒星在氢燃烧和氦燃烧阶段 (图 1 中的 B 点和 F 点) 对流核的湍流应力梯度与引力的比值．从图中我们可以看出在这两个演化阶段恒星内部的湍流应力很小，它的梯度为引力的 10^{-7} 左右．从而说明了在恒星核燃烧阶段湍流作用的影响较小，湍流应力相对于引力而言可以忽略．

在跨过赫罗图中的空隙区阶段，恒星的湍流作用区域较大，对恒星的演化有一定的影响，但恒星演化较快，经历的时间短，对恒星的整过演化轨迹影响并不大．在红巨星和 AGB 演化阶段，恒星的外部区域是完全对流的，向内延伸到恒星的燃烧壳层．通过计算发现：恒星外部的湍流应力梯度与引力的比值比恒星内部的值大很多，且越靠近恒星内部，其比值越小，因此对恒星的结构与演化产生的影响应是外部对流区．图 4 给出了恒星在红巨星和早期 AGB 星演化阶段 (图 1 中 G 点和 H 点) 恒星外部的湍流应力梯度与引力比值的分布．从图 4 中可见，在恒星外部对流区存在着一个湍流应力很大的区域，

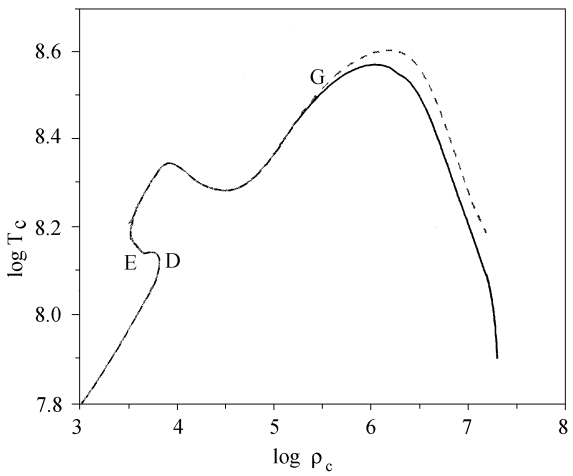

图 2 $8M_\odot$ 恒星中心温度随密度的变化 (实线表示没计算湍流应力时的变化曲线; 虚线表示计算了湍流应力时的变化曲线)

Fig. 2 The variation of central temperature with the central density for the star with $8M_\odot$ (Solid line and dotted line indicate the cases without and with the effect of turbulent stress respectively)

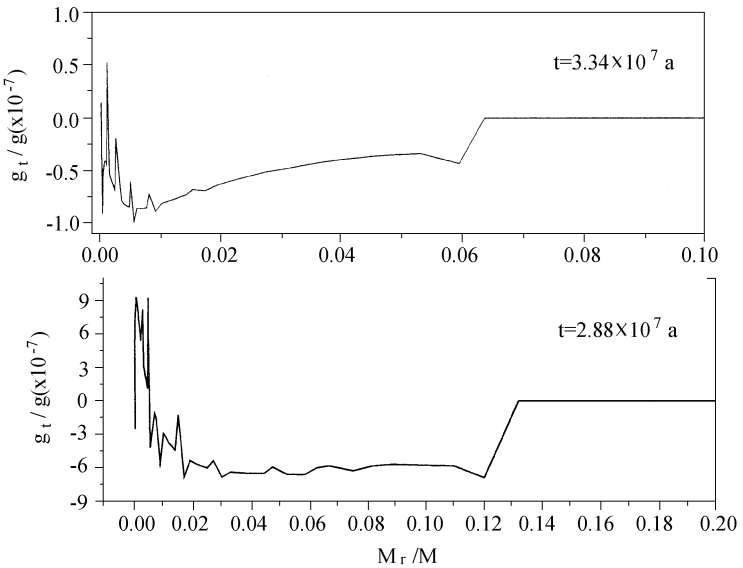

图 3 $8M_\odot$ 恒星在主序阶段 ($t = 2.88 \times 10^7 a$) 和在氦燃烧阶段 ($t = 3.34 \times 10^7 a$) 对流核内湍流应力梯度与引力比值 (g_t/g) 的分布

Fig. 3 The distribution of the ratio (g_t/g) of the turbulent stress gradient to gravitation in the convective core of the star with $8M_\odot$ on the phases of H burning and He burning

对于红巨星，该区域的湍流应力大小达到了引力的 4 倍；而 AGB 星，湍流应力是引力的十几倍．由于该区域的范围非常小，且靠近恒星的外边界，所以它对恒星的内部结构与演化应该不会产生大的影响，但它可能与 AGB 星的强星风物质量损失率有一定的关系．

图 4 的结果是根据局部的混合程理论计算出来的，由此理论计算在表面对流区上边界附近会出现超声速对流，导致一个非常大的湍流应力梯度．对流本是一种非局部现象，根据熊大闰和邓李才等 [17−21] 提出的非局部混合程理论和对两种理论下湍流速度的比较，当我们恢复对流的非局部处理，恒星外壳不会出现超声速对流，湍流的变化也就变得比较平缓，也就可能不会出现这种湍流应力梯度比引力大很多的情况．为此我们去掉 g_t/g 大于 1 的那几个值得到图 5 所示的 g_t/g 随质量的变化曲线来分析湍流的作用，从图 5 可见：在红巨星阶段时，拟合点以内的区域，湍流应力梯度与引力的比值非常小，几乎为零，在拟合点以外，湍流应力达到了引力的 50%，但也只是在一个很小的区域内，对恒星的结构与演化不会产生大的影响．当恒星演化到 $t = 3.582 \times 10^7$ 年的早期 AGB 阶段时，在恒星的外部，对流区域内的湍流作用力相对于引力而言是比较大的，其应力梯度也能达到引力的 65%，此时湍流作用对恒星演化的还是有一定的影响．

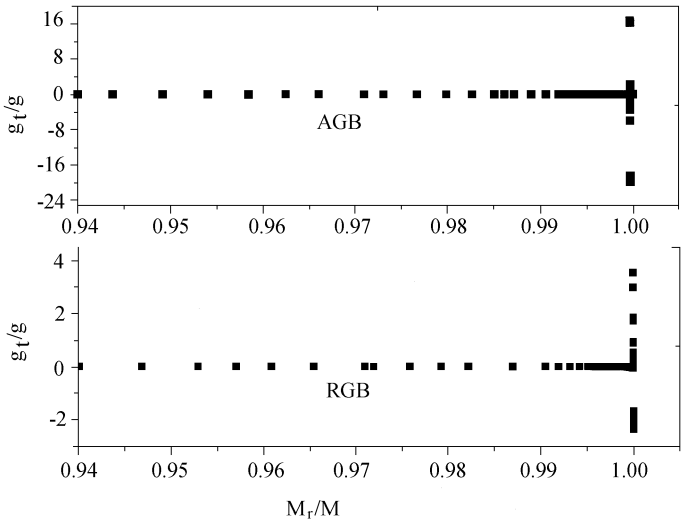

图 4　$8M_\odot$ 恒星在红巨星阶段 ($t = 2.99 \times 10^7 a$) 和在 AGB 阶段 ($t = 3.582 \times 10^7 a$) 湍流应力梯度与引力的比值 (g_t/g) 在对流外壳中的分布

Fig. 4　The distribution of the ratio (g_t/g) of the turbulent stress gradient to gravitation in the envelope of the a red giant star and AGB star with $8M_\odot$

4　结束语

对于 $8M_\odot$ 中等质量恒星，湍流作用对恒星结构与演化的影响主要是由于在恒星外部对流区内湍流所表现出来的宏观应力相对于引力而言较大，改变了流体的静力学平衡，从而影响恒星的结构与演化．在中心核燃烧阶段，恒星外部不存在对流区，内部的湍流对恒星的结构与演化的影响非常小；在红巨星阶段，湍流作用在外层较大，但只是在一

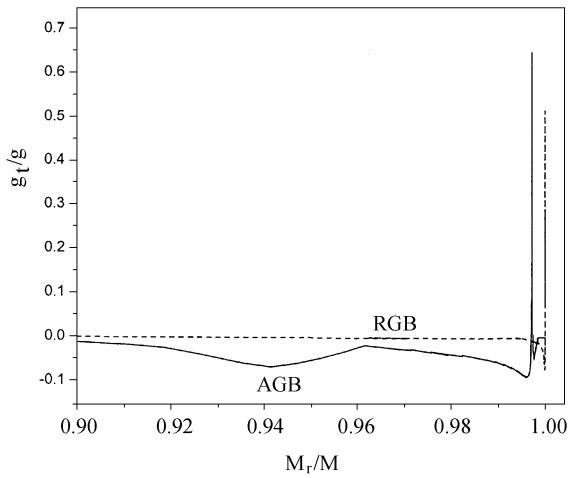

图 5 $8M_\odot$ 恒星在红巨星阶段 ($t = 2.99 \times 10^7 a$) 和在 AGB 阶段 ($t = 3.582 \times 10^7 a$) 湍流应力梯度与引力之比的绝对值小于 1 的值 ($|g_t/g| < 1$) 在对流外壳中的分布

Fig. 5 The distribution of the ratio ($|g_t/g| < 1$) of the turbulent stress gradient to gravitation that absolute value is less than one in the envelope of the a red giant star and AGB star with $8M_\odot$

个很小的区域内，所以在这些演化阶段恒星的演化轨迹与没有考虑湍流应力时相比较，没有发生偏差，湍流作用可以不考虑. 但在早期 AGB 阶段，对流延伸到恒星内部，且外部的湍流作用力与引力相比较是较大的，对 AGB 星的中心温度变化与热脉动发生的时间等恒星结构与演化规律有不同程度的影响，还可能对晚期 AGB 星的强星风物质损失有重要的影响.

参 考 文 献

1 Zhang Bo, Chang Rui-xiang, Peng Qiu-he. ChA&A, 1998, 22(1): 49
2 Zhang Bo, Chang Rui-xiang, Peng Qiu-he. AcASn, 1997, 38(3): 232 (张波，常瑞香，彭秋和. 天文学报， 1997, 38(3): 232)
3 张妙静，张波，厉光烈. 原子核物理评论， 2002, 19(3): 321
4 Wood P R, Bessell M S, Fox M W. ApJ, 1983, 272: 99
5 龚志刚，李炎. 天文学进展， 1994, 12(4): 320
6 Kippenhahn R, weigert A, Weigert A. Z Astrophys, 1965, 61: 241
7 Weigert A. Z Astrophys,1966, 64: 394
8 蒋苏云，黄润乾. 天体物理学报， 1997, 17(3): 271
9 蒋苏云，黄润乾. 天体物理学报， 1998, 18(1): 59
10 蒋苏云，黄润乾. 天体物理学报， 1998, 18(2): 148
11 杨本洛. 湍流及理论流体力学的理性重构. 上海：上海交通大学出版社， 2003
12 黄润乾. 恒星物理. 北京：科学出版社， 1998
13 Vitense E. Z Astrophys, 1951, 29: 73
14 Vitense E. Z Astrophys, 1953, 32: 135
15 Kippenhahn R, weigert A, Hofmeister E, Methods in Computation physics, New York: Academic

Press, 1967,7: 129
16 Nieuwenhui jzen H, de Jager C. A&A, 1990, 231: 134
17 熊大闰. 紫金山天文台台刊， 2003, 22(2): 17
18 邓李才. 紫金山天文台台刊， 2003, 22(2): 49
19 熊大闰，邓李才. 紫金山天文台台刊， 1999, 18(3): 325
20 Xiong Da-run, Deng Li-cai. ChA&A, 2001, 25(3): 269
21 Xiong Da-run, Deng Li-cai. AcASn, 2001, 42(2): 121 (熊大闰，邓李才. 天文学报， 2001, 42(2): 121)

The Analysis of the Effect of Turbulent Stress on the Evolution of the Star with $8M_\odot$

WANG Zhi-yun[1,2] JIANG Su-yun[2] CHEN Pei-jie[2]
(1 *Zhejiang normal university, Jinhua* 321004)
(2 *Xiangfan university, Xiangfan* 441053)

Abstract Basee on the mixing-length theory of convection, macroscopical stress of the turbulence is used in hydrostatics equation of the stellar structural and evolutionary model. In order to know the effect of the turbulence,we performed calculations for the evolution of the Star with $8M_\odot$, and stadied the effect of turbulent stress on the evolution and structure of the star by comparing the ratio of the turbulent stress gradient to gravitation. The results show that the ratio is very small in the phase of nucleus burn, the effect of the turbulent may be ignored. For RGB and AGB star, we find there is a small area where the turbulent stress gradient is several times as big as gravitation in the envelope and in other area the ratio can reach a value 65 percent. Those have some effect on structure and evolution of AGB star, such as variety of stellar center temperature and the beginning time of thermal pulse.

Key words stars: interiors, stars: evolution, stars: AGB, turbulence