第 47 卷 第 1 期　　天 文 学 报　　Vol.47 No.1
2006 年 1 月　　ACTA ASTRONOMICA SINICA　　Jan., 2006

关于“太阳线性无力场评注和快速傅氏分析法的应用”的评论*

李柱恒 [1,2]　颜毅华 [2]　宋国乡 [1]

(1 西安电子科技大学应用数学系　西安 710071)
(2 中国科学院国家天文台　北京　100012)

摘要　“太阳线性无力场评注和快速傅氏分析法的应用”一文对太阳线性无力场的工作做了一些评注，在此基础上对快速傅立叶方法的应用提出了改进的计算方法. 该文的某些观点值得商榷，有必要对其中存在的问题予以澄清. 另外，对该文关于快速傅氏分析法的工作从理论的角度提出看法.

关键词　太阳：磁场，太阳：日冕，方法：分析，方法：数值
中图分类号：　P 182;　　**文献标识码**：　A

1　引言

自从 Chandrasekhar 和 Kendall[1] 给出一个求线性无力场一般解的方法后，很多学者开展了用线性无力场近似描述太阳活动区磁场的研究工作 [2−12]. 由于太阳磁场在耀斑和日冕物质抛射等太阳物理核心问题中的重要性，关于日冕磁场模型研究一直是人们关注的一个重点. 目前主要研究兴趣转至非线性无力磁场甚至探讨非无力平衡条件的应用，如多年来的一系列综述文章所述 [13−18]. 从中可见即使是有关线性无力场的好些工作也不尽善尽美，因此对之做合理的评价从而加以改进是很有必要的，近来仍有新的结果问世 [12]. 最近，宋慕陶和张延安 [19,20] 对 Aly[10], Alissandrakis[5], Yan[11] 和 Hannakam 等 [7] 的工作做了一些评注，在此基础上他们提出了自己的改进方法. 文 [19,20] 在做评注时说理不充分，带有主观性和片面性，甚至有些说法有误. 文 [19,20] 关于快速傅氏分析法的工作从理论的角度看有些问题需要予以澄清. 另外，我们在认同文 [19,20] 对 Hannakam 等 [7] 工作的批评前提下，对 Hannakam 等 [7] 的工作做了进一步的评注.

2　讨论

2.1　驳文 [19,20] 关于 Aly[10] 工作的评注

仅仅从数学的角度来看，Aly[10] 的工作无疑是正确的. 他建立的模型存在唯一的解，而且解能用积分形式具体给出来，并在附录中给出了两个满足模型边界条件的函数. 由

2004-12-29 收到原稿，　2005-05-18 收到修改稿
* 国家自然科学基金 (10225313) 和国家“973”计划 (G2000078403) 资助项目

Aly[10] 的模型得到的解具有随距离至少平方衰减的渐近性态 (见文 [10] 中的 (55) 式 — (57) 式), 并且，所确定的场是能量有限的，这打破了人们关于线性无力场不能是能量有限的局限认识. 他先证明解的唯一性，在证明解的唯一性时用到了总磁能有限的条件假设，这表明只要磁能有限就能保证解唯一；然后证明磁能有限的解存在. 先证唯一性，再证存在性，这是数学中常用的手法. 关于这一点可以参看任何一本有关数学物理方面的书，例如文 [21]. 当然，唯一性的证明可以放在存在性的证明后面来处理，这样做给人的感觉似乎要顺理成章些.

在证明微分方程解的存在唯一性时，只要最终证明了存在性，究竟先证存在性还是先证唯一性都是没问题的. 既然文 [19,20] 在第 364 页倒数 13 行 (页码见文 [19], 同下) 也承认 Aly[10] 用傅立叶变换证明解的存在性的做法是正确的、无可非议的，那么，文 [19,20] 接下来的的说法： “然而它却预先假设半空间总磁能有限，如上所述在线性无力场框架下, 磁能有限和解的唯一性是等价的, 这无疑是把自己欲证的结果用为自己的假设条件, 前后颠倒了” 是不对的.

另外，文 [19,20] 在评注 Aly[10](文 [19,20] 中的文 [11]) 时，还在第 364 页倒数第 10 行说了这样一段话： “文 [11] 在傅里叶分析解积分后导出了类似于文 [10] 的磁场积分表达式即著名的 Chiu 和 Hilton 积分式，我们在计算机上实践 Chiu 和 Hilton 计算线性无力场结果证明： $B_x \sim r^{-1}$, $B_y \sim r^{-1}$, $B_z \sim r^{-1}$, 因而 (9) 式不满足，这导致线性无力场半空间内总磁能不是有限的，因而满足光球观测场的解不是唯一的. ” 我们认为这段话是有问题的. 首先，存在一个理解上的问题， Aly[10] 明确指出了由他所给积分公式导出 Chiu 和 Hilton 积分式的前提条件是 $\kappa < \alpha$, 而这一条件所对应的积分式确定的场并不为 Aly 的模型所需要；其次，文 [19,20] 所用的数据可能并不符合 Aly 模型所需要满足的边界条件 [10]; 再者，文 [19,20] 的计算也未必准确无误. 总之，文 [19,20] 对 Aly[10] 的评注是不妥的.

2.2 评 Hannakam 等 [7] 的工作

许多学者都对 Hannakam 等 [7] 的工作提出批评，如 Sakurai[14] 和 Semel[16] 均在各自的综述文章中指出 Hannakam 等 [7] 仅从横场出发计算线性无力磁场的具体做法是错误的，文 [19,20] 也推断 Hannakam 等 [7] 的公式 (17) 是错误的. 但这些工作中均未明确分析错误原因. Hannakam 等 [7] 中 (17) 式是错的，错误的根源在其 (13) 式，即下式：

$$\begin{aligned} \mathrm{curl}\boldsymbol{V} &= \frac{1}{2\alpha}\mathrm{curl}(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{U}) = \\ &\frac{1}{2\alpha}[\boldsymbol{e}_z \mathrm{div}\boldsymbol{U} - (\boldsymbol{e}_z \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{U}] = \frac{1}{2\alpha}\boldsymbol{B},, \end{aligned} \tag{1}$$

其中我们改正了原文中第二个等号后的印刷错误 [7]. 改正印刷错误后的上述 (1) 式的第 3 个等号是没有理由成立的，我们将其更正为下式：

$$\begin{aligned} \mathrm{curl}\boldsymbol{V} &= \frac{1}{2\alpha}\mathrm{curl}(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{U}) = \\ &\frac{1}{2\alpha}[\boldsymbol{e}_z \mathrm{div}\boldsymbol{U} - (\boldsymbol{e}_z \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{U}] = \\ &\frac{1}{2\alpha}[-\frac{\partial U_x}{\partial z}\boldsymbol{e}_x - \frac{\partial U_y}{\partial z}\boldsymbol{e}_y + (\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y})\boldsymbol{e}_z]\,. \end{aligned} \tag{2}$$

从 (2) 式不难看出 Hannakam[7] 中 (13) 式的第 3 个等号要想成立，必须有：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{U}=0\,. \tag{3}$$

而 (3) 式一般来说不成立，所以， Hannakam 等 [7] 中 (17) 式是错的.

2.3 评文 [19,20] 关于快速傅立叶分析计算线性无力场的工作

文 [19,20] 在其第 3 节一开始就批评 Alissandrakis[5] (文 [19,20] 中的文 [9]) 的工作，以此作为他们开展该项工作的动机和基础. 文 [19,20] 指出： “文 [9] 首先用傅立叶分析法试解了线性无力场，由于太抽象了用无穷 2D- 空间积分，不便太阳工作者应用，另外他只用无力条件 (1) 式，完全不考虑是否满足无散条件. 本文将其具体化，补证它满足 (2) 式，这样文 [9] 将是一个自恰的解析解.” 我们知道，在满足线性无力场 $(\nabla\times\boldsymbol{B}=\alpha\boldsymbol{B})$ 的情况下，无散条件 $(\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0)$ 自然满足. 文 [19,20] 对 Alissandrakis[5] 的批评是不恰当的，而且，他们关于散度为零的补证完全是多余的. 值得注意的是， Alissandrakis[5] 的工作在国际上得到广泛应用 (例如，读者可以通过 ADS 网络检索观察到文 [5] 的影响), 并非 “不便太阳工作者应用”.

另外，文 [19,20] 在第 367 页有一段话 “注意： (25) 和 (26) 式在 $u=0,v=0$ 时不成立，对于这一特殊波数，可在 (21) 式 —(23) 式和 (26) 式中找出一特殊解来，这么一来，我们便准确无误地得到了一个严格的自恰的线性无力场解，它由 (25) 式给出.” 根据 Gary[13] 评述文章中关于系数确定的讨论，我们可以看到，对于半空间上的整体解来说，文 [19,20] 的 (25) 式中的系数 $\hat{B}_z(u,v,0)$ 必须在 $u=0,v=0$ 时满足 $\hat{B}_z(0,0,0)=0$, 否则无散条件不成立. 所以，我们的看法是，从理论的角度讲只须规定 (25) 式中 $u=0,v=0$ 所对应的项为零，不需要找特殊解.

不过，从实际应用的角度来看，如果仅考虑源区附近的场，并非不可以放弃 $z=0$ 平面上 $B_z=0$ 的要求 (事实上，这样对大活动区来说更符合实际情况，例如，可参见 Wang[17] 及其引用文献), 来取得日冕磁场的近似.

2.4 关于文 [19,20] 的其他一些问题

有关文 [19,20] 中的其他一些问题，分述如下.

(1) 文 [19,20] 引进 Yan[11] 的方法来处理势函数，对上半空间求得特征函数 U,V,W. 这是允许的. 但从第 365 页 14 式前第 3 行起，文中称： “第二套特征函数定义在下半平面上和上述方法一样也能准确定出，记为 U^-,V^-,W^-, 它们也满足同一磁场边值. 然后将这两套函数作解析延拓，这样对上半空间 $z>0$ 便同时有两套特征函数，作以下和数解： $\cdots$(原文公式略), 便可拟合线性无力场在一薄层 $0\le z\le\epsilon\Delta Z$ 内的准确解.” 文 [19,20] 在其附录中介绍具体做法时，从第 378 页 (28) 式后第 1 行起指出： “在 (27) 式中令 $z\to 0^+$ (0^+ 表示从上半空间 z 趋于零) 得渐进积分式： $\cdots$”, “对于 B^- 其做法完全和上面一样：只需将 (27) 式改为下半空间 $z<0$, 其 $\frac{\partial}{\partial n}$ 方向恰相反，用类似法得另一套方程 (30), 从而定出另外 6 个源函数” (见同页倒数第 5 行). 根据上述内容可见，文 [19, 20] 是在 $z=0$ 的平面以 $z\to 0^-$, 即从下半空间 z 趋于零来构造函数 U^-,V^-,W^-. 按我们的理解函数 U^-,V^-,W^- 在上半空间 $z>0$ 任意点处的值恒为零. 因为，根据数学物理方法中的格林定理应用 (例如，见文 [21] 第 102 页的内容) 我们知道，对于定义在下半空间 $z\le 0$ 的第二套特征函数，它们的边界积分对于上半空间 $z>0$ 的任何位置来说恒为零.

因此，文 [19,20] 提出的 “和数解” 是不存在的，亦即其 (14) 式是有问题的.

(2) 文 [19,20] 在第 368 页最后一段进行 FFT 时, 对于 $2^7 = 128$ 的网格以为 “$(\Delta x)^{-1} = 127$ 就是 $|\alpha|$ 的最大值或最大波数”. 根据香农采样定理我们知道， FFT 的最大采样频率 (即这里的最大波数), 只能是 $\frac{1}{2}(\Delta x)^{-1} = 64$. 所以文 [19,20] 在后文 (第 376 页第二段) 取 $\alpha = \pm 120$ 进行的计算及讨论是有问题的.

本文旨在指出文 [19,20] 中存在的问题或不严密之处，以商榷.

参 考 文 献

1 Chandrasekhar S, Kendall P C. ApJ, 1957, 126: 457
2 Nakagawa Y, Raadu M A. Solar Phys, 1972, 25: 127
3 Chiu Y T, Hilton H H. ApJ, 1977, 21: 873
4 Seehafer N. Solar Phys, 1978, 58: 215
5 Alissandrakis C E. A&A, 1981, 100: 197
6 Low B C. Solar Phys, 1982, 77: 43
7 Hannakam L, Gary G A, Teuber D L. Solar Phys, 1984, 94: 219
8 Chen Z, Wang J. Solar Phys, 1986, 103: 317
9 Chen Z, Chen Y. Solar Phys, 1989, 119: 279
10 Aly J J. Solar Phys, 1992, 138: 133
11 Yan Y. Solar Phys, 1995, 159: 97
12 Evangelidis E A, Botha G J J. Solar Phys, 2003, 213: 69
13 Gary G A. ApJS, 1989, 69: 323
14 Sakurai T. Space Sci Rev, 1989, 51: 11
15 McClymont A N, Jiao L, Mikic Z. Solar Phys, 1997, 174: 191-218
16 Semel M. 2nd Advances in Solar Physics Euroconf, ASP Conf Series, 1998, 155: 423
17 Wang J. Fundamentals Cosmic Phys, 1999, 20: 251
18 Yan Y. Space Sci Rev, 2003, 107: 119
19 Song Mu-tao, Zhang Yan-an. ChA&A, 29(2): 159
20 Song Mu-tao, Zhang Yan-an. AcAsn, 2004, 45(4): 361 (宋慕陶，张延安. 天文学报， 2004, 45(4): 361)
21 谷超豪，李大潜，陈恕行，等. 数学物理方程. 北京：高等教育出版社， 1979

Comments on “Comments on Solar Linear Force-free Field and Application of FFT Analysis”

LI Zhu-heng[1,2] YAN Yi-hua[2] SONG Guo-xiang[1]

(1 *Dept of Applied Mathematics, Xidian University, Xian* 710071)

(2 *National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100012)

Abstract The paper “Comments on Solar Linear Force-free Field and Application of FFT Analysis (Song & Zhang, 2004, 2005)” made some comments on linear force-free field problems and proposed a so-called improvement on the application of FFT. We argue that some points in Song & Zhang on available methods are misleading or incorrect. The FFT technique proposed in Song & Zhang is also controversial. Therefore some of their conclusions should not be solid.

Key words sun: magnetic fields, sun: corona, methods: analytical, method: numerical