第 47 卷 第 1 期 天 文 学 报 Vol.47 No.1
2006 年 1 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Jan., 2006

基于 GPS 与三轴磁强计的联合导航算法

赵敏华[1] 吴 斌[1] 石 萌[1] 黄永宣[1] 李济生[2]

(1 西安交通大学电信学院 西安 710049)
(2 西安卫星测控中心 西安 710043)

摘要 为了修正近地轨道 (小于 1000 km) 地磁场模型, 提高导航的精度, 在地磁导航系统中引入 GPS 作为一个新的测量设备, 提出了一种基于三轴磁强计与 GPS 的联合导航算法. 该算法取卫星的位置和速度向量作为状态向量, 建立状态方程; 取卫星周围的磁场强度和 GPS 接收的信号作为观测量, 建立观测方程; 并以 GPS 确定的轨道状态量为标准量, 去估计磁场模型参数的修正量, 构成冷备冗余导航算法. 仿真结果表明, 提出的导航算法对轨道位置的估计误差小于 50 m, 速度的估计误差小于 0.1 m/s, 导航算法的精度和收敛性都优于使用单一地磁导航的系统.

关键词 **地磁导航**, **扩展** Kalman **滤波**, **人造卫星**, GPS
中图分类号: P 128; **文献标识码**: A

1 引言

导航是卫星控制系统的基本任务之一. 卫星导航分为自主式和非自主式两大类. 实现自主导航将大大降低人力和地面设施的要求, 从而减少卫星的成本, 并使卫星的生存能力大为提高. 早在空间飞行的初始阶段就开展了卫星自主导航的研究工作, 至今已有近 40 年的历史 [1].

随着小卫星技术的发展, 低空探测和资源卫星的增加, 更需要性价比高的导航系统, 减少对地面站的依赖. 对于低轨小卫星, 由于有丰富的地磁场资源可以利用, 而且地磁场已有良好的描述模型, 场强和方向均是位置的函数. 特别是磁强计具有重量轻、低功耗、低成本和高可靠性等优点. 因此我们可以利用磁强计对地磁场的测量进行卫星自主定轨.

在上世纪 90 年代初, Psiaki 提出利用磁强计对地磁场的测量实现卫星自主定轨 [2]. 文 [3-10] 中对此方法亦进行了研究. 但是鉴于地磁场的可变性及磁强计本身精度的限制, 目前报道的定轨精度仅在 4 km, 而由于太阳敏感器仅对方向敏感, 对近地卫星的距离为非敏感量, 所以 Psiaki [5] 提出的磁强计与太阳敏感器融合的导航算法并不能显著改善导航效果. 鉴于 GPS 是一种高精度半自主的导航方法, 本文提出使用 GPS 和磁强计冗余的联合算法. 仿真结果显示定轨精度优于单独使用磁强计的地磁定轨算法. 而磁强计作为 GPS 的冷备, 防止了纯粹依赖 GPS 信号时的半自主性, 增加了导航算法的自主性.

2004-12-21 收到原稿, 2005-01-17 收到修改稿

2 GPS 与磁强计信息冗余的估计算法

本文提出采用磁强计与 GPS 的冷备处理算法，即正常情况由于 GPS 的导航精度很高，满足导航要求，磁强计不参与导航运算，而是假定 GPS 获得的轨道信息足够精确，利用其估计信息对地磁场模型的参数进行修正，得到一个比较精确的地磁模型参数，当 GPS 信号因某些原因失踪或有故障时，启动地磁导航模型，保证导航的自主性. 文 [9-11] 中已经详细分析了地磁导航算法，而 GPS 导航算法也已经比较成熟 [12,13]，所以本文中我们不在对这两种算法进行详细分析，本文提出的 GPS 与磁强计信息冗余的定轨算法框图见图 1.

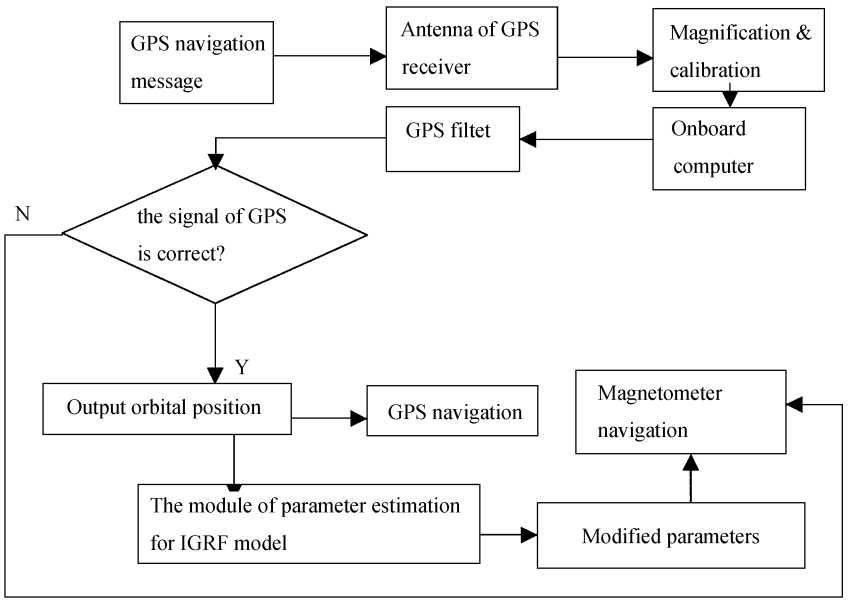

图 1 GPS 与磁强计信息冗余的估计算法框图

Fig. 1 The Frame of redundance algorithm

3 高斯系数估计算法

3.1 数值算法

地球磁场不是恒定不变的，而是随着时间有缓慢的变化，有

$$V_m(R,\theta,\lambda)=R_e\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_e}{R}\right)^{n+1}(g_n^m\cos m\lambda+h_n^m\sin m\lambda)p_n^m(\cos\theta)\,. \tag{1}$$

其中高斯系数 g_n^m 与 h_n^m 是随地球内部的运动变化而缓慢变化，需要根据测量数据加以

矫正. 利用 (1) 式，可以得到基本磁场 3 个分量在地球表面上的高斯级数表达式，

$$B_x = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_e}{R}\right)^{n+2}(g_n^m\cos m\lambda + h_n^m\sin m\lambda)\frac{\partial p_n^m}{\partial\theta}\,, \tag{2}$$

$$B_y = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_e}{R}\right)^{n+2}(-g_n^m\sin m\lambda + h_n^m\cos m\lambda)\frac{mp_n^m}{\sin\theta}\,, \tag{3}$$

$$B_z = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_e}{R}\right)^{n+2}(n+1)(g_n^m\cos m\lambda + h_n^m\sin m\lambda)p_n^m(\cos\theta)\,. \tag{4}$$

利用球谐函数的正交性和地球表面上 3 个分量的观测值 X 、 Y 、 Z 中任何一个，就可以确定高斯系数 g_n^m 和 h_n^m. 例如，如果知道 Z 分量的全球连续分布，则可求得

$$\begin{aligned} g_n^m &= -\frac{2n+1}{4\pi(n+1)}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}B_z p_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda\sin\theta\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta\,,\\ h_n^m &= -\frac{2n+1}{4\pi(n+1)}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}B_z p_n^m(\cos\theta)\sin\lambda\sin\theta\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta\,, \end{aligned} \tag{5}$$

上式中， R 、 λ 和 $theta$ 可以通过 GPS 的测量数据计算求得， B_z 可以利用星载磁强计测得，但因卫星运行轨道的影响，不一定能获得其全球连续分布，即使可以，在星载计算机上直接运行上式，运算量也太大，所以我们考虑使用参数估计算法获得高斯系数 g_n^m 和 h_n^m 的修正值.

3.2 多输入多输出系统最小二乘算法

由于在高空，高阶项衰减较快，高斯系数对地磁模型的影响较小，从工程应用角度考虑，本文只考虑地磁模型的前 3 项的影响，所以 (2) 至 (4) 式可简化为 (6) 至 (8) 式.

$$B_x = -(\frac{R_e}{R})^3(g_1^0\sin\theta - (g_1^1\cos\lambda + h_1^1\sin\lambda)\cos\theta)\,, \tag{6}$$

$$B_y = \left(\frac{R_e}{R}\right)^3(g_1^1\sin\lambda - h_1^1\cos\lambda)\,, \tag{7}$$

$$B_z = 2\left(\frac{R_e}{R}\right)^3(g_1^0\cos\theta + (g_1^1\cos\lambda + h_1^1\sin\lambda)\sin\theta)\,. \tag{8}$$

从 (6) 至 (8) 式可以看出， B_x 、 B_y 、 B_z 是待估参数 g_1^0 、 g_1^1 和 h_1^1 的函数，卫星的位置量作为输入量可以通过 GPS 确定. 对于参数估计有许多方法，因待估参数 g_1^0, g_1^1 和 h_1^1 是慢缓变的，为了减轻机载计算机的运算量，我们每隔一定时间，再启动最小二乘参数估计算法，连续采样若干点，给出新的估计参数 g_1^0 、 g_1^1 和 h_1^1, 并修正地磁模型，以备地磁导航算法使用. 具体算法如下：

由 (6) 至 (8) 式可以得到：

$$y(t) = \varphi(t)\vartheta + \zeta(t)\,, \tag{9}$$

这里，

$$y = [\boldsymbol{B}_x \quad \boldsymbol{B}_y \quad \boldsymbol{B}_z]^T ,$$

$$\vartheta = \left[\begin{array}{ccc} g_1^0 & g_1^1 & h_1^1 \end{array} \right] ,$$

$$\phi = (R_e/R)^3 \left[\begin{array}{ccc} -\sin\theta & \cos\lambda\cos\theta & \sin\lambda\cos\theta \\ 0 & \sin\lambda & -\cos\lambda \\ 2\cos\theta & 2\cos\lambda\sin\theta & 2\sin\lambda\sin\theta \end{array} \right] .$$

令：

$$\Phi_N = \left[\begin{array}{c} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{array} \right] , \quad Y_N = \left[\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{array} \right] , \quad \zeta_N = \left[\begin{array}{c} \varsigma_1 \\ \vdots \\ \varsigma_N \end{array} \right] ,$$

则：

$$Y_N = \Phi_N \vartheta + \zeta_N . \tag{10}$$

设 $\hat{\vartheta} \in \Theta$ 是对 ϑ 的一个估计，估计残量为

$$\varepsilon_N = Y_N - \Phi_N \hat{\vartheta} , \tag{11}$$

由残量构成二次损失函数

$$J(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{N} [Y_N - \Phi_N \hat{\vartheta}]^T [Y_N - \Phi_N \hat{\vartheta}] , \tag{12}$$

按二次目标函数优化可解得：

$$\hat{\vartheta}^{\mathrm{LS}} = [\Phi_N^T \Phi_N]^{-1} \Phi_N^T Y_N . \tag{13}$$

3.3 渐消记忆的递推最小二乘算法

因为地磁系统模型是长期慢缓变的，所以我们还可考虑引入 “遗忘因子”, 形成多输入多输出系统的渐消记忆递推最小二乘算法，这种算法不但可以克服数据饱和现象，还对具有缓变参数的系统产生适应能力，跟踪参数的变化 [14].

下面我们来讨论这一算法的基本思想. 对于加权最小二乘，其权矩阵取如下形式

$$W_N = \left[\begin{array}{ccccc} \alpha^{N-1} & & & & \\ & \alpha^{N-2} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha & \\ 0 & & & & 1 \end{array} \right] , \tag{14}$$

其中 α 为实数，且 $0 < \alpha < 1$, 称为遗忘因子. 这样，历史的数据对当前的参数估计有不同的权重，而距离现在愈远，权系数愈小，即采用逐渐 “遗忘” 的办法减小历史较长数据

的作用. 为了不降低参数估计的精度， α 的选择不能太小，一般情况下 $\alpha = 0.95 \sim 0.997$ 比较适宜. 根据 (14) 式，加权最小二乘的公式有

$$\hat{\vartheta} = [\Phi_N^T W_N \Phi_N]^{-1} \Phi_N^T W_N Y_N \,. \tag{15}$$

令：

$$P_N = [\Phi_N^T W_N \Phi_N]^{-1} \,, \tag{16}$$

由 (14) 式可得

$$W_{N+1} = \begin{bmatrix} \alpha W_N & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{17}$$

利用矩阵求逆引理可得：

$$\begin{aligned} P_{N+1} \quad = \quad & [\Phi_{N+1}^T W_{N+1} \Phi_{N+1}]^{-1} = \\ & [\alpha \Phi_N^T W_N \Phi_N + \phi(N+1)\phi^T(N+1)]^{-1} = \\ & \frac{1}{\alpha}\left[P_N - P_N \frac{\phi(N+1)\phi^T(N+1)}{\alpha + \phi^T(N+1)P_N\phi(N+1)} P_N\right] . \end{aligned} \tag{18}$$

又因：

$$\Phi_{N+1}^T W_{N+1} Y_{N+1} = \alpha \Phi_N^T W_N Y_N + \phi(N+1) y(N+1) \,, \tag{19}$$

所以有：

$$\hat{\vartheta}_{N+1} = P_{N+1}\Phi_{N+1}^T W_{N+1} Y_{N+1} = \hat{\vartheta}_N + K_{N+1}[y(N+1) - \phi^T(N+1)\hat{\vartheta}_N] \,, \tag{20}$$

其中增益阵为：

$$K_{N+1} = \frac{P_N \phi(N+1)}{\alpha + \phi^T(N+1)P_N\phi(N+1)} \,. \tag{21}$$

(18) 、 (20) 、 (21) 式就构成了渐消记忆递推最小二乘算法.

4　系统仿真

在本文中系统仿真初值为：

$$t_0 = 0.0\,s, \quad \boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 0.25e6 \\ -2.45e6 \\ -6.82e6 \end{bmatrix} (\mathrm{m}), \quad \dot{\boldsymbol{r}}_0 = \begin{bmatrix} -4.12e3 \\ -5.21e3 \\ 2.2e3 \end{bmatrix} (\mathrm{m/s}) \,.$$

磁强计的观测噪声方差取 $550\,(\mathrm{nT})^2$, 仿真时间取为 10 小时，代入第 3 节的联合导航算法，得到图 2 所示仿真结果. 从图中可知，联合导航算法对卫星地心距的估计误差小于 $50\,\mathrm{m}$, 速度的估计误差小于 $0.1\,\mathrm{m/s}$, 图 3 为使用第 1 节磁强计未修正参数的仿真结

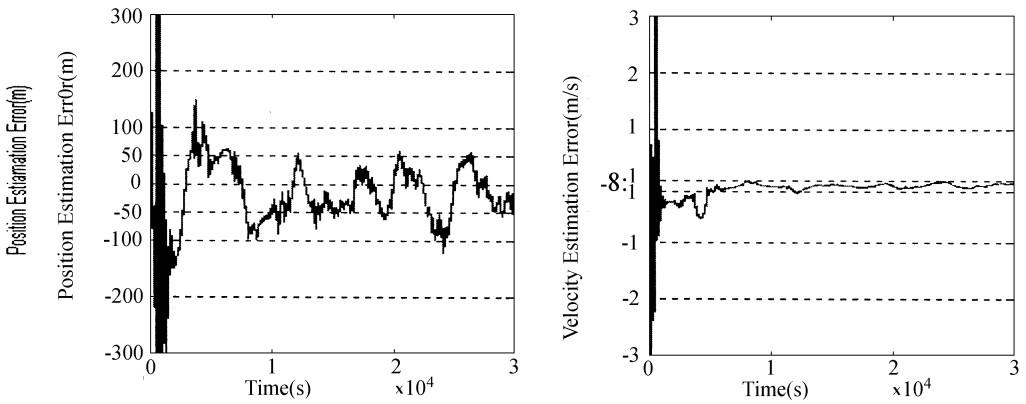

图 2 冗余算法估计误差图

Fig. 2 The estimated errors of redundance algorithm

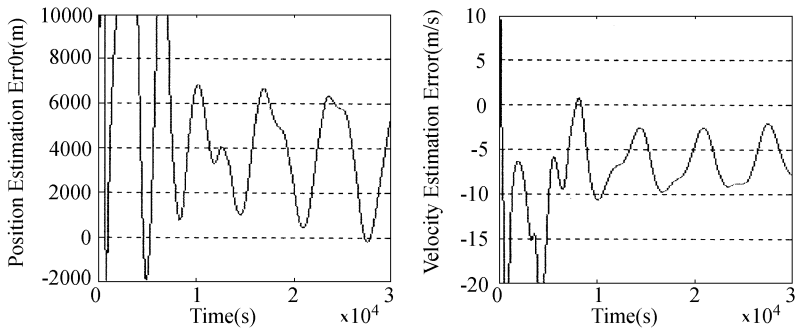

图 3 单地磁算法估计误差图

Fig. 3 The estimated errors of mono –geomagnetism algorithm

果. 对仿真结果进行比较, 可以发现联合算法的效果无论是收敛速度, 还是精度方面都要比单纯使用未修正模型的磁强计导航算法有显著改善.

5 总结

卫星的自主导航技术是当今卫星控制系统的一个发展热点. GPS 导航系统的导航精度高, 但是它是一种半自主的导航方式. 基于地磁的导航系统是完全自主的导航方式, 却由于地磁场模型的缓变性, 导航精度不高. 本文根据以上特点, 提出了 GPS 导航系统与地磁导航系统冷备的联合冗余导航系统. 该系统采用 GPS 导航系统作为主导航系统, 同时使用 GPS 导航系统得到的位置参数修正地磁模型; 用地磁导航系统作为备用导航系统, 这种系统的组成方式增加了地磁导航系统的精度, 提高了 GPS 导航系统的自主性, 而冷备的处理降低了机载计算机的工作量, 仿真表明, 本文提出的方法满足自主导航要

求，系统的性价比高，具有很好的工程应用价值.

参 考 文 献

1 Chory M A, Hoffman D D, LeMay J L. Proceedings of the IEEE Position, Location, and Navigation Symposium, Las Vegas, Nov, 1986, 110

2 Psiaki M L, Martel F. Proceedings of the Third Annual AIAA/USU conference on Small Satellites, 1989,

3 Psiaki M L, Huang L, Fox S M. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1993, 16(1): 206

4 Psiaki M L. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1995, 18(3):584

5 Psiaki M L. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1999, 22(2): 296

6 Shorshi G, Bar-Itzhack I Y. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1995, 18(4): 843

7 Deutschmann J, Harman R, Bar-Itzhack I. Proceedings of the 1998 AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conf, Boston, MA： 1998, 1

8 Deutschmann J, Bar-Itzhack. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2001, 24(3): 616

9 Zhao Min-hua, Peng Qing-ke, Huang Yong-xuan, et al. 2004, WCICA: 5487

10 Zhao Min-hua, SHI Meng, ZENG Yu-lian, et al. Systems Engineering and Electronics, 2004, 26(9): 1236

11 Zhao Min-hua, WU Bin, SHI Meng, et al. Journal of astronautics, 2004, 25(4): 411

12 Shuai Ping, Chen Ding-chang, Jiang Yong . Journal of Telemetry, Tracking, and Command, 2001, 9: 4

13 Wu Jiang-fei, Huang cheng. AcASn, 2005, 46(1): 55 (吴江飞，黄成. 天文学报， 2005, 46(1): 55)

14 HAN Chong-zhao, WANG Yue-juan, WAN Bai-wu. "Stochastic system theory",Xi'an: XI'AN Jiaotong University press, 1987

Combined Navigation Algorithm by Means of Magnetometers and GPS

ZHAO Min-hua[1] WU Bin[1] SHI Meng[1] HUANG Yong-xuan[1] LI Ji-sheng[2]

(1 *School of Electronics and Information Engineering. Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)

(2 *Xi'an Satellite Control Center, Xi'an* 710043)

Abstract In order to refine the geomagnetic model of LEO (Low Earth Orbit) and to improve the precision of navigation, it introduces GPS as a new measure instrument and proposes a combined navigation algorithm based on three-axis magnetometer and GPS. Using the position and velocity of the satellite as state vectors and using the intensity of the magnetic field and signals of GPS as observed values, this algorithm establishes the state equation and observation equation respectively. The orbit states which are deteminated by GPS navigation system are used to estimate corrections of geomagnetic model. The simulation result shows that the estimation error of orbit position is less then 20 meters and velocity estimation error is less than 1 meter per second. The veracity and convergence of this navigation algorithm are better than mono-geomagnetic navigation system.

Key words geomagnetic navigation, extended Kalman filtering, artifical satellites, GPS