第 47 卷 第 3 期　　天 文 学 报　　Vol.47 No.3
2006 年 7 月　　ACTA ASTRONOMICA SINICA　　Jul., 2006

关于月球低轨卫星运动的两个问题*

刘 林　王海红

(南京大学天文系 南京 210093)
(南京大学空间环境与航天动力学研究所 南京 210093)

摘要 对月球低轨卫星的轨道寿命特征和冻结轨道的状态作了详尽的理论分析，给出它们与轨道倾角之间的关系以及它们相互之间的某种联系，并考虑低轨卫星的主要摄动源，在完整力模型下作了相应的模拟计算，不仅证实了理论分析的正确性，而且为环月运行探测器的轨道设计提供了极有参考价值的数值结果.

关键词 天体力学：月球低轨卫星，轨道寿命，冻结轨道
中图分类号： P 173.3;　**文献标识码**： A

1 引言

由于月球非球形引力位与地球非球形引力位的差别，导致月球卫星的轨道寿命与冻结轨道的状态与地球卫星均有相应的差别. 文 [1-6] 分别介绍过月球高轨卫星和低轨卫星的轨道寿命问题，文 [7] 对月球卫星的冻结轨道问题作过简单讨论. 本文将针对月球低轨卫星首先给出相应的分析解，从理论上进一步深入探讨其轨道寿命与各轨道根数的关系 (特别是与倾角 i 的关系) 以及轨道寿命与冻结轨道之间的某种联系，再用完整的力模型进行数值检验，给出详尽的轨道信息.

2 月球非球形引力位的主要特征

月球非球形引力位的形式如下：

$$V=\frac{GM}{R}\left\{1+\sum_{l\geq 2}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a_e}{R}\right)^l \bar{P}_{lm}(\sin\varphi)\left[\bar{C}_{lm}\cos m\lambda_G+\bar{S}_{lm}\sin m\lambda_G\right]\right\}, \tag{1}$$

其中 GM 是月心引力常数，a_e 是月球参考椭球体赤道半径，R 、λ_G 和 φ 是月固坐标系中的球坐标分量，即月心距、经度和纬度. $\bar{P}_{lm}(\sin\varphi)$ 是归一化的缔合勒让德球函数，$\bar{C}_{lm}$ 和 $\bar{S}_{lm}$ 是相应的谐系数，它们与非归一化的 $P_{lm}(\sin\varphi)$ 、C_{lm} 和 S_{lm} 有如下关系

$$\begin{cases}\bar{P}_{lm}(\mu)=P_{lm}(\mu)/N_{lm}\\ \bar{C}_{lm}=C_{lm}\cdot N_{lm},\quad \bar{S}_{lm}=S_{lm}\cdot N_{lm}\end{cases}, \tag{2}$$

2005-04-21 收到原稿，2005-07-08 收到修改稿
*863-703 主题 (2002AA735071) 资助项目

$$\begin{cases} N_{lm} = \left[\left(\dfrac{1}{1+\delta}\right)\dfrac{(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\right]^{1/2} \\ \delta = \begin{cases} 0 & m=0 \\ 1 & m\neq 0 \end{cases} \end{cases} . \tag{3}$$

为了进一步了解月球引力位的特征，表 1 列出目前一种较好的模型 (美国 JPL 的 LP75G) 参数. 从表 1 中可以看出，除月球由于自转较慢，动力学扁率 $J_2 = -C_{2,0}$ 较小 (10^{-4}) 外，奇次带谐项系数 $\bar{C}_{2l-1,0}(l \geq 2)$ 与 $\bar{C}_{2,0}$ 之比 $|\bar{C}_{2l-1,0}/\bar{C}_{2,0}|$ 的量级接近 10^{-1}，而地球引力场相应系数之比的量级只有 10^{-3}，这将导致环月运行探测器的轨道 (特别是轨道偏心率 e) 出现振幅较大的长周期变化，从而导致一些人造地球卫星不会出现的现象.

表 1 月球引力场模型 LP75G 的带谐项系数

Table 1 Zonal Coefficients of LP75G Model

$GM = 4902.800269\,\mathbf{km}^3/\mathbf{s}^2$, $a_e = 1738.0\,\mathbf{km}$

l	$\bar{C}_{l0}$	l	$\bar{S}_{l0}$	l	$\bar{C}_{l0}$	l	$\bar{S}_{l0}$
2	−.909759705421E−04	3	−.318354210680E−05	40	.405008284524E−07	41	.185441992980E−06
4	.317891147722E−05	5	−.259812866570E−06	42	.205009425072E−06	43	−.150899873080E−06
6	.386236223769E−05	7	.567373030342E−05	44	−.275187649758E−07	45	.176940181862E−06
8	.235081824433E−05	9	−.345967761182E−05	46	−.527943316729E−07	47	.113440579555E−06
10	−.116218759517E−05	11	−.112206022536E−05	48	.122224096052E−07	49	.663588620156E−07
12	−.199394050844E−05	13	.533567368249E−07	50	.731614111229E−07	51	.926199532006E−07
14	.652989391396E−06	15	.137947201734E−06	52	.894259453709E−08	53	.528352529506E−07
16	.614034505167E−06	17	−.731676821100E−06	54	.706359685673E−07	55	.129633424131E−06
18	−.796355519107E−06	19	−.170818407129E−06	56	−.198666085468E−07	57	.248395209383E−07
20	.188974686302E−06	21	−.514933004808E−06	58	.561435441316E−07	59	.112824514896E−06
22	.147199245147E−06	23	−.110750857101E−06	60	−.653616570911E−09	61	.693395931110E−07
24	.217656090505E−06	25	.206589360658E−06	62	.247448260654E−07	63	−.184598671596E−07
26	−.471775947606E−07	27	−.867957221035E−06	64	.138060572938E−08	65	.142241997810E−06
28	.571759491547E−06	29	−.824525775982E−06	66	−.101207891298E−08	67	−.665943958016E−07
30	.110089170719E−06	31	.619266481143E−06	68	.417970502030E−07	69	.905703824763E−07
32	−.277424356036E−06	33	.370862095966E−07	70	−.177194952134E−07	71	−.545581017799E−08
34	.743483373289E−07	35	.187824931260E−06	72	.472965885893E−07	73	.402391578818E−08
36	.366642184110E−07	37	.209614233422E−06	74	−.116756209875E−07	75	−.398507057795E−07
38	.116036789227E−06	39	−.216888360685E−06				

3 月球低轨卫星轨道变化特征的理论分析

3.1 关于轨道寿命问题

尽管月球无大气，但在非球形引力作用下，低轨卫星的近月距 $r_p = a(1-e)$ 也会减小，当 $r_p = a_e$ 时，卫星将与月球相撞. 轨道半长径 a 在非球形引力作用下，只有振幅较小的短周期变化，主要源于月球动力学扁率 J_2 项摄动，变化量级只有 10^{-4}，不会导致 r_p 的明显变化. 显然， r_p 有明显减小趋势的原因是轨道偏心率 e 有振幅较大的长周期变化 Δe_l.

在月球非球形引力和地球引力两种主要摄动源的作用下，消除短周期变化后，e 的长周期变化满足下列方程：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e_l}{\mathrm{d}t} &= n(1-e^2)\sum_{l\geq 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}(-1)^{(l-\delta)/2}(l-2p)F(i)\left[\frac{1}{e}K(e)\right]I(\omega)- \\ & n(1-e^2)\sum_{l\geq 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}(l-2p)F_{lmp}(i)\left[\frac{1}{e}K(e)\right]\Phi_{lmp}(\omega,\theta)+O(em')\,. \quad (4)\end{aligned}$$

此方程的原始形式在文 [8] 中曾给出过，采用了归一化单位，相应的月心引力常数 $\mu = GM = 1$. 为了探讨本文所提出的问题，这里又作了一些必要的改变. (4) 式右端第一和第二大项分别为带谐项 ($J_l = -C_{l,0}$) 和田谐项摄动，第三大项为地球引力摄动，含有 e 因子. 方程中的 $n = a^{-3/2}$, 采用符号 p_0 是为了与式中求和取值 p 区分开. 有关表达式如下：

$$\delta = \frac{1}{2}[1-(-1)^l] = \begin{cases} 1 & l\text{奇} \\ 0 & l\text{偶} \end{cases}, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{e}K(e) = \displaystyle\sum_{\alpha(2)=(l-2p)}^{l-2} C_{lp\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha} = \begin{cases} O(e^0) & l\text{奇} \\ O(e) & l\text{偶} \end{cases} \\ C_{lp\alpha} = \begin{pmatrix} l-1 \\ \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{1}{2}(\alpha-(l-2p)) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{m!(m-n)!} \end{cases}, \quad (6)$$

$$\begin{cases} F(i) = -\displaystyle\sum_{q=0}^{p}(-1)^q\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_p)} C_{lpq}(\sin i)^{(l-2p+2q)} \\ \delta_p = \begin{cases} 0 & l-2p=0 \\ 1 & l-2p\neq 0 \end{cases} \\ C_{lpq} = \begin{pmatrix} l \\ p-q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2l-2p+2q \\ l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l-2p+2q \\ q \end{pmatrix} \end{cases}, \quad (7)$$

$$I(\omega) = -(1-\delta)\sin(l-2p)\omega + \delta\cos(l-2p)\omega\,. \quad (8)$$

田谐项摄动中的 $\Phi(\omega,\theta)$ 涉及的 $\theta = \Omega - S(t)$, $S(t)$ 是月固坐标系中 X 轴方向的经度，随月球自转而变化. $\Phi(\omega,\theta)$ 的表达式和一般的倾角函数 $F_{lmp}(i)$ 以及地球引力摄动项 $O(em')$, 不再具体给出，因下面的讨论表明，可略去相应的两类摄动影响.

对 (4) 式作进一步分析，当 l 为奇数时，右函数中含有 $O(e^0)$ 因子，即以 $e^0\cos\omega$ 形式出现，l 为偶数时却含有 $O(e)$ 因子，是以 $e\sin 2\omega$ 形式出现. 而考虑月球低轨卫星寿命时，相应的 e 肯定是小量，有 $e < 0.1$. 事实上，对于平均高度为 100 km 的低轨卫星，只要 e 达到 $0.05\sim 0.06$, 即可使 r_p 接近 a_e 值，若 e 增大将会立即撞上月球. 因此，(4) 式中只有对应 l 为奇数的摄动项值得考虑，但与奇次带谐项相比，田谐项影响要小一个量级. 故对于理论分析而言，只要保留 (4) 式中的奇次带谐摄动部分即可. 舍去的各种摄动项的影响，可在后面对相应的完整力模型进行模拟计算中去考察，实际计算结果将会

证实上述简化的合理性. 在 (4) 式中只保留奇次带谐项摄动部分，但仅取其 $O(e^0)$ 项，对应求和中 $l-2p=1$ 的取值，从而简化成下列形式：

$$\frac{\mathrm{d}e_l}{\mathrm{d}t}=\sin i\sum_{l(2)\geq 3}(-1)^{(l-1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)(l-1)(J_l/P_0^l)F^*(i)(n\cos\omega)\,, \tag{9}$$

其中

$$\begin{cases} F^*(i) &= \displaystyle\sum_{q=0}^{(l-1)/2}(-1)^q\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)}C^*_{lpq}(\sin^2 i)^q \\ C^*_{lpq} &= \begin{pmatrix} l \\ (l-1)/2-q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l+2q+1 \\ l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2q+1 \\ q \end{pmatrix} \end{cases}. \tag{10}$$

在 (9) 式求和中 $l(2)$ 表示取值 “步长” 为 2, 即 $l(2)=3,5,\cdots$. $\omega=\bar{\omega}(t)=\bar{\omega}_0+\omega_c(t-t_0)$, ω_c 是 $\bar{\omega}(t)$ 的长期变率，如果仅取其由 J_2 项给出的一阶变率 ω_1, 有

$$\omega_c=\omega_1=\frac{3J_2}{2p_0^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\,. \tag{11}$$

积分 (9) 式给出 e 的长周期变化 Δe_l 的表达式如下：

$$\begin{aligned}\Delta e_l &= e_l(t)-e_l(t_0)= \\ &\sin i\left\{\sum_{l(2)\geq 3}(-1)^{(l-1)/2}\frac{(l-1)}{3p_0^l}\left(\frac{J_l}{J_2}\right)F^*(i)\right\}[\sin\bar{\omega}(t)-\sin\bar{\omega}(t_0)]\,/ \\ &(2-\frac{5}{2}\sin^2 i),\end{aligned} \tag{12}$$

由此可见， e 的变幅主要取决于奇次带谐项系数 $J_{2l-1}(l\geq 2)$ 与 J_2 的相对大小以及倾角函数 $F^*(i)$ 的性质，有

$$|\Delta e_l|\sim O(J_{2l-1}/J_2)\cdot F^*(i)\,. \tag{13}$$

对于地球卫星，由于

$$O(J_{2l-1}/J_2)=10^{-3}\,, \tag{14}$$

相应的轨道偏心率的变幅很小，而月球卫星则不同，由于

$$O(J_{2l-1}/J_2)=10^{-1}, \tag{15}$$

故完全有可能使月球低轨卫星的轨道偏心率 e 增大到使 $r_p=a_e$ 的状态. 当然，这还要取决于 $(J_{2l-1}/J_2)F^*(i)$ 值的变化状况.

由于月球非球形引力位的特征，谐系数 J_{2l-1} 随阶 l 的升高并无明显地减小，由函数 $(J_{2l-1}/J_2)F^*(i)$ 的特征，长周期变化 Δe_l 的模 $|\Delta e_l|$ 随着不同的 i 值 ($0^\circ<i\leq 90^\circ$) 将出现多个极小与极大值，相应的 r_p 值将不会达到 a_e 或必然会达到 a_e 值，亦即月球低轨卫星的轨道寿命既取决于奇次带谐项的摄动影响，又与轨道的空间定向有关. 由于 $\sin i$ 的特征， $90^\circ\leq i<180^\circ$ 的情况与 $0^\circ<i\leq 90^\circ$ 的情况类似.

3.2 关于冻结轨道

与地球卫星类似，在月球非球形引力作用下，相应的平均系统 (即消除轨道变化的短周期部分) 可能存在一种特解 [10,11]:

$$\bar{a}(t)=a_0,\quad \bar{e}(t)=e_0,\quad \bar{i}(t)=i_0,\quad \bar{\omega}(t)=\omega_0=90^\circ \quad 或 \quad 270^\circ \tag{16}$$

拱线不动，此即冻结轨道，此解对 i_0 无任何限制，对应不同的 i_0 有相应的 e_0 存在. 那么根据 (12) 式给出的 Δe_l, 对于平均高度为 100 km 的低轨卫星，是否存在某些轨道配置，通过冻结轨道的选择保持 $r_p>a_e$ 使其不会与月球相撞呢？

首先考查冻结轨道的存在情况，同样由于月球引力场的特征，与地球卫星的冻结轨道状况亦有差别. 对于地球卫星，基本上由 J_2 和 J_3 两项即可确定冻结轨道解 [11], 而对月球卫星则不然, 文 [7] 有过简单讨论, 这里将进一步深入讨论. 对于平均轨道根数, 仍记作 a,e,i,ω, 略去推导过程，下面将直接给出相应的冻结轨道解. 当 a 值给定的情况下，对于任一 i 值，冻结轨道对应的 e 值满足下列条件:

$$e=\pm\sin i\sum_{l(2)\geq 3}(-1)^{(l-1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{l-1}{p_0^l}(J_l)F^*(i)\left(\frac{n}{\omega_c}\right), \tag{17}$$

其中 ω_c 是 ω 的长期变率. 与上一段讨论 e 的长周期变化对应，若只取由 J_2 给出的一阶变率 ω_1, 则 (17) 式简化为下列形式:

$$e=\pm\sin i\left\{\sum_{l(2)\geq 3}(-1)^{(l-1)/2}\frac{(l-1)}{3p_0^{l-2}}\left(\frac{J_l}{J_2}\right)F^*(i)\right\}/(2-\frac{5}{2}\sin^2 i), \tag{18}$$

式中 “+” 号对应冻结轨道解 $\omega\equiv\omega_0=90^\circ$, “−” 号对应 $\omega_0=270^\circ$, 即前者对应 (18) 式右端值为正，而后者则对应右端值为负. 这一结果与地球卫星情况有差别，地球卫星的冻结轨道主要取决于 J_3 项，且总有 $\omega\equiv\omega_0=90^\circ$, 由类似的 (18) 式给出的偏心率 e 对不同的 i 值均很小，即 $e_0=O(10^{-3})$, 而对于月球低轨卫星则不同，对不同的 i 值，冻结轨道解有两种可能，即 $\omega\equiv\omega_0=90^\circ$ 或 270°, 且相应的 e_0 值可能较大，见表 2.

从 (18) 式和上 (12) 式可以看出，在考虑主要摄动因素前提下，冻结轨道解的 e 值与 e 的长周期变化幅度 $|\Delta e_l|$ 是相同的，而这一解是在平均系统中给出的，且仅在 i 变化的小邻域内才能保持，对于月球卫星，由于月球非球形引力位的特征，实际状况是 $\omega(t)$ 有明显的变化幅度. 由此可知，当 $|\Delta e_l|$ 对应某些 i 值为极小时，即使冻结轨道不能保持 (即 $\omega(t)$ 有大范围变化), 也不会出现 e 有明显增大的可能， r_p 不会降至 a_e 值；相反，当 $|\Delta e_l|$ 对应某些 i 值为极大时，即使冻结轨道 (此时对应解的 e 值较大) 能基本保持 (即 $\omega(t)$ 的变化范围不大), e 的变化也有可能使 r_p 降至 a_e 大小，结束其轨道寿命. 也就是说，月球低轨卫星的轨道寿命并不依赖冻结轨道的选择 (即轨道偏心率 e 和倾角 i 按条件 (18) 的选择), 而主要取决于 (12) 式中所确定的 Δe_l 的模，这归结为月球非球形引力场的基本特征和卫星轨道倾角 i 的选择. 我们将在下一节给出相应的模拟计算来证实月球低轨卫星轨道寿命与倾角 i 的关系.

表 2 冻结轨道解

Table 2 Solutions of frozen orbit

$T_S = 117.848695$ **(m)**

i(deg)	ω(deg)	e	i(deg)	ω(deg)	e
0.5	90.0	0.002831	5.0	90.0	0.025923
1.0	90.0	0.005647	10.0	90.0	0.040836
27.0	90.0	0.005333	20.0	90.0	0.021863
28.0	270.0	0.002481	35.0	270.0	0.060784
49.5	270.0	0.007062	40.0	270.0	0.047442
50.0	90.0	0.000870	45.0	270.0	0.046151
75.0	270.0	0.009016	55.0	90.0	0.140493
76.0	270.0	0.002874	60.0	270.0	0.253887
77.0	270.0	0.005638	63.0	270.0	0.188417
85.0	270.0	0.001753	80.0	90.0	0.026043
95.0	270.0	0.001728	90.0	270.0	0.043215

4 模拟计算 — 结果与分析

为了证实理论分析的正确性，对低轨卫星 (平均高度 100 km), 分别计算了下列 3 种情况：

(1) 根据分析解 (12), 扫描似地从 $i = 0^\circ.5$ 到 $179^\circ.5$, 间隔 1°, 计算了对应的 $|\Delta e_l|$ 值，看极小与极大的分布状况.

(2) 根据分析解 (18) 式，同样对 $i = 0^\circ.5$—$179^\circ.5$, 间隔 1° 求出相应地冻结轨道解：e_0 和对应的 ω_0 值.

(3) 考虑主要摄动因素 (月球非球形引力，地球引力和太阳引力), 对完整的运动方程计算了低轨卫星 (取平均高度 $\bar{h} = 100\,\mathrm{km}$, $e_0 = 0.001$) 随倾角 i_0 的不同，相应近月点高度 h_p 的变化情况，即轨道寿命与倾角 i 的关系，见表 3.

上述第 (3) 部分的计算正是为了证实第 (1) 和第 (2) 两部分由分析解给出的结果的正确性，从而确定月球低轨卫星轨道寿命与倾角 i 的关系，同时也进一步证实这种结果主要是由月球非球形引力场特征所决定的.

在计算中，月球引力场模型采用了美国 JPL 的 LP75G 模型，前两部分对引力场球谐展开式阶次 l 取 30—45, 无实质性差别，第 (3) 部分是取完整的力模型，即 l 取到 75, m 取 0—l.

关于 $|\Delta e_l|$, 对应极小值有如下几个 “稳定区” (即 $|\Delta e_l|$ 值很小):

$$i = 0^\circ\,, \quad 27^\circ\,, \quad 50^\circ\,, \quad 77^\circ\,, \quad 85^\circ$$

根据 $\sin i$ 的性质，在 90°—180° 间有对应的 “稳定区”, 即 $95^\circ\,, 103^\circ\,, \cdots$.

关于冻结轨道，与上述 $|\Delta e_l|$ 的情况对应，对应 “稳定区” 的倾角 i_0, 相应的冻结轨道解 e_0 的值均较小，而对应 “不稳定区” 的倾角 i_0, 则相应的解 e_0 值均较大. 表 2 列出了部分结果，对应 l 取 40.

表 3　月球低轨卫星轨道寿命的状况

Table 3　Orbit lifetime of LMO

i (deg)	T_c (day)	max e	min h_p (km)	i (deg)	T_c (day)	max e	min h_p (km)
1.0	2723.1	0.0362	33.9	60.0	88.2	0.0548	0.0
2.0	549.0	0.0414	24.6	61.0	88.1	0.0547	0.0
3.0	1852.7	0.0479	13.0	63.43	85.9	0.0545	0.0
4.0	273.2	0.0550	0.0	65.0	88.0	0.0546	0.0
5.0	49.5	0.0548	0.0	67.0	115.5	0.0547	0.0
7.5	42.9	0.0545	0.0	69.0	224.1	0.0523	3.9
10.0	42.5	0.0545	0.0	70.0	3347.5	0.0464	14.9
12.5	43.9	0.0547	0.0	71.0	3407.0	0.0406	25.5
15.0	43.9	0.0547	0.0	72.0	2453.3	0.0348	36.2
17.5	46.3	0.0548	0.0	73.0	1469.4	0.0333	39.0
20.0	77.0	0.0547	0.0	74.0	1498.4	0.0339	37.8
22.0	80.7	0.0532	3.2	75.0	1500.5	0.0340	37.8
24.0	80.0	0.0525	4.4	76.0	1449.0	0.0336	38.5
26.0	2543.1	0.0515	6.0	77.0	3383.8	0.0381	30.4
27.0	2219.9	0.0419	23.6	79.0	401.1	0.0544	0.0
28.0	2599.4	0.0264	52.1	80.0	320.6	0.0545	0.0
29.0	1404.4	0.0251	54.4	81.0	294.0	0.0545	0.0
30.0	2084.1	0.0453	17.3	82.0	294.7	0.0547	0.0
31.0	91.6	0.0547	0.0	83.0	403.2	0.0544	0.0
33.0	46.2	0.0547	0.0	84.0	2941.4	0.0419	23.0
35.0	44.5	0.0546	0.0	85.0	1711.7	0.0220	59.6
37.0	45.2	0.0546	0.0	86.0	3401.8	0.0414	23.6
39.0	47.4	0.0548	0.0	87.0	308.8	0.0523	4.0
40.0	47.9	0.0547	0.0	88.0	174.6	0.0542	0.3
41.0	48.4	0.0546	0.0	89.0	171.3	0.0545	0.0
43.0	48.3	0.0548	0.0	90.0	172.0	0.0545	0.0
45.0	49.7	0.0544	0.7	91.0	193.0	0.0546	0.0
47.0	72.7	0.0545	0.0	92.0	226.7	0.0546	0.0
49.0	177.9	0.0546	0.0	93.0	309.9	0.0546	0.0
50.0	2522.0	0.0545	0.0	94.0	1133.9	0.0392	28.1
51.0	1908.1	0.0337	38.5	95.0	1102.0	0.0172	68.3
52.0	211.9	0.0547	0.0	96.0	1557.2	0.0253	53.6
54.0	88.9	0.0546	0.0	97.0	1118.8	0.0464	14.5
56.0	83.1	0.0547	0.0	98.0	236.2	0.0546	0.0
58.0	84.6	0.0546	0.0				

根据上述结果，考虑完整力模型后，第 (3) 部分的计算应有如下预期结果，即在上述 “稳定区” (即取 $i_0 = 0^\circ, 27^\circ, \cdots$), 低轨卫星的轨道寿命应很长，而相反，则轨道寿命应很短. 为了节省篇幅表 3 列出了对 i 取值有一定间隔的结果. 表中 $\min h_p = 0.0$ 或接近 0.0, 即表明与月球相撞， T_c 即为对应的轨道寿命值. 对所有 i_0 值计算间隔均为 10 年，当在较短间隔内 $h_p = 0.0$ 时计算结束. 而在 “稳定区”, 如 $i_0 = 85^\circ$ 和 95°, 即使卫星运行 10 年近月点高度 h_p 也不会明显降低，极小值仍有近 60 km 高. 图 1— 图 4, 分别为 $i_0 = 40^\circ, 90^\circ$ 和 $85^\circ, 95^\circ$ 时 h_p 随时间的变化状态，前者分别为 48 天和 172 天与月球相撞，后者 10 年期间的极小值还分别有 60 km 和 68 km 高.

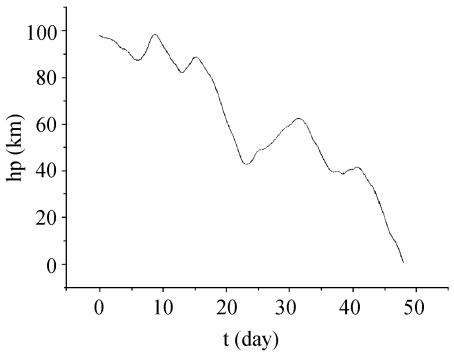

图 1 初始轨道倾角 $i_0 = 40°$ 的月球低轨卫星轨道寿命

Fig. 1 The orbital life of a Low-Moon-Orbit satellite with initial inclination $i_0 = 40°$

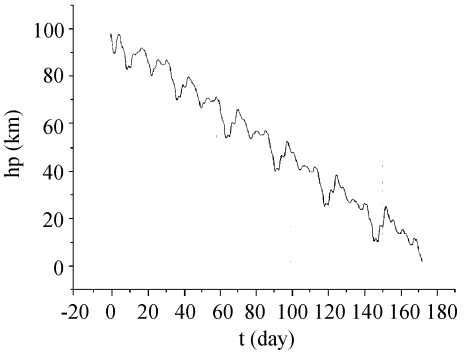

图 2 初始轨道倾角 $i_0 = 90°$ 的月球低轨卫星轨道寿命

Fig. 2 The orbital life of a Low-Moon-Orbit satellite with initial inclination $i_0 = 90°$

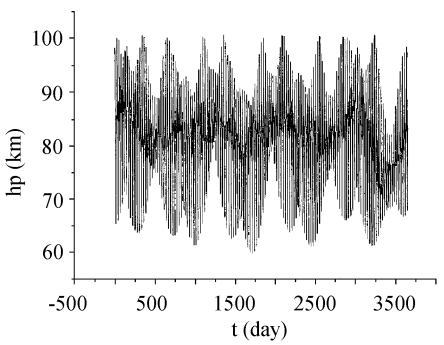

图 3 初始轨道倾角 $i_0 = 85°$ 的月球低轨卫星轨道寿命轨道寿命

Fig. 3 The orbital life of a Low-Moon-Orbit satellite with initial inclination $i_0 = 85°$

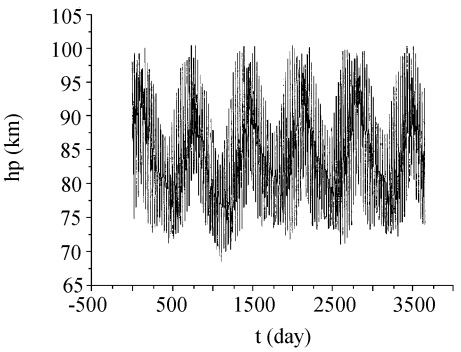

图 4 初始轨道倾角 $i_0 = 95°$ 的月球低轨卫星轨道寿命

Fig. 4 The orbital life of a Low-Moon-Orbit satellite with initial inclination $i_0 = 95°$

上述数值结果一方面验证了理论分析的正确性，同时也给出了低轨卫星轨道寿命与倾角 i 的关系. 但这些保持不与月球相撞的所谓 “稳定区” 的范围 (对轨道倾角 i_0 值而言) 都较小，考虑到各种因素 (包括发射误差的影响), 即使允许选择适当的倾角，也还要注意运行过程中的轨道控制 (耗费较小能量的轨道机动).

最后说明两点：

(1) 低轨卫星的轨道寿命与轨道升交点 Ω 的初值无关，这一点从非球形引力位带谐项的性质不难看出，实际计算结果也证实了这一点，我们在上述第 (3) 种情况的计算中，改变过 Ω 的不同初值，对计算结果 h_p 的变化无实质性影响.

(2) 月球卫星的冻结轨道难以保持，即使是那种特殊的冻结轨道，即临界倾角情况，$i = i_c = 63° 26'$, 在采用实际力模型对应的第 (3) 种计算中， ω 仍在大范围内变化，未保持 “冻结”.

参 考 文 献

1 Marchal C L. 52th International Astronautical Congress, Amsterdam, The Netherlands, 2001
2 Meyer K W, Buglia J J, Desai P N. NASA Technical Paper 1994, 3394
3 Wang Xin, Liu Lin. ChA&A, 2002, 26(4): 489
4 Wang Xin, Liu Lin. AcASn, 2002, 43(2): 189 (王歆，刘林. 天文学报， 2002, 43(2): 189)
5 Wang Xin, Liu Lin, ChA&A, 2003, 27(1): 107
6 Wang Xin, Liu Lin. AcASn, 2002, 43(4): 379 (王歆，刘林. 天文学报， 2002, 43(4): 379)
7 刘林，刘世元，王彦荣. 飞行器测控学报， 2003, 22(2): 19
8 Liu Lin, Wang Jia-song. ChA&A, 1998, 22(3): 328
9 Liu Lin, Wang Jia-song. AcASn, 1998, 39(1): 81 (刘林，王家松. 天文学报， 1998, 39(1): 81)
10 Cook G E. Planet Space Sci, 1966(14): 433
11 刘林. 航天器轨道理论，北京：国防工业出版社， 2000

Two Problems for the Motion of Low-Moon-Orbit Satellite

LIU Lin WANG Hai-hong

(*Astronomy Department, Nanjing University, Nanjing* 210093)

(*Institute for Space Environment and Astrodynamics, Nanjing University, Nanjing* 210093)

Abstract Under more detailed theoretical analysis on the orbital lifetime and the frozen orbit of Low-Moon-Orbit satellite (LMOs) and their relationships with the orbital inclination are presented here. Some numerical simulations under real force model with main perturbation included were carried out. They both validate the theoretic analysis and give valuable results for the orbit design of LMOs.

Key words celestial mechanics, Low-Moon-Orbit satellite, orbital lifetime, frozen orbit