第 48 卷 第 1 期 天 文 学 报 Vol.48 No.1
2007 年 1 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Jan., 2007

后牛顿近似下旋转椭球体的内外度规*

成 浩 [1,2] 宋国玄 [1] 黄 □ [1]

(1 中国科学院上海天文台 上海 200030)
(2 中国科学院研究生院 北京 100039)

摘要 在后牛顿近似下，得到由均匀不可压缩理想流体在刚体自转下形成的扁球体的内外度规. 对由后牛顿效应产生的度规分量利用椭球坐标系及级数展开求得解析解. 对这一具体问题，在级数展开中仅存若干项，因此结果有可能用于这一度规下粒子运动的研究.

关键词 后牛顿近似，内外度规，扁球体，球谐函数
中图分类号： P 131; **文献标识码**： A

1 引言

广义相对论建立以来，人们对世界的认识发生了巨大的变化. 在研究天体运动时，更多地应用度规而不使用力这一传统概念. 所谓度规其实就是时空结构的一种量度，物质在时空中的运动可根据度规推出. 按爱因斯坦场方程，描述时空结构的度规完全由质能在时空中的分布决定，此方程将几何量与物理量用一个等式联系在一起.

然而，由于爱因斯坦场方程求解的困难，迄今为止，我们只得到了为数不多的精确解，其中包括最简单的静止球体的 Schwarzchild 外部度规，以及内部为均匀理想流体的 Schwarzchild 内部度规，后来还有均匀旋转球体的 Kerr 度规和均匀静止椭球体的 Weyl-Levi-Civita 度规. 然而对于更一般的情况，精确解大都尚未求出 [1].

由于求解精确解的困难性， Einstein 等 [2] 发展了一种后牛顿近似方法，用于预报行星近日点的相对论进动和月球轨道的相对论进动. 后来很多学者尤其是 Fock [3] 将这一方法进一步发展和完善，使之成为研究相对论问题最重要的近似方法.

另一方面，对大多数天体而言，球近似并不是特别的精确. 考虑内部为均匀理想流体并且以不太大的角速度自转的天体，在牛顿体系下进行计算，它们的形状为扁椭球；在一阶后牛顿近似下进行计算，其形状与扁椭球仍然十分接近 [4]. 事实上，对于宇宙中普遍存在的很多天体，可以采用内部为理想流体的均匀旋转椭球体模型，包括我们所在的地球. 此处选取谐和规范条件，应用一阶后牛顿近似，求解这一模型的内外度规.

2005-11-26 收到原稿， 2006-03-22 收到修改稿
* 中国科学院知识创新工程重要方向 (KJCX2-SW-T1) 和 10333050 资助项目

2　理论基础及初步计算

首先应用基础理论初步得出计算所需的部分物理量.

2.1　后牛顿天体力学

选取谐和规范 $g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{uv}=0$, 在一阶后牛顿近似下我们将度规写成：

$$\begin{cases} g_{00}=-1-2\phi-2\phi^2-2\psi \\ g_{0i}=\zeta_i \\ g_{ij}=\delta_{ij}-2\delta_{ij}\phi \end{cases} . \tag{1}$$

这里 $\phi\sim 1/c^2$, $\psi\sim 1/c^4$, $\zeta_i\sim 1/c^3$. 其中 ϕ 是牛顿势，取决于泊松方程： $\nabla^2\phi=4\pi G\overset{2}{T}{}^{00}$. $\overset{2}{g}{}^{00}$ 必须在无限远处为零，故牛顿势的解为：

$$\phi(x,t)=-G\int \mathrm{d}^3x'\frac{\overset{0}{T}{}^{00}(x',t)}{|x-x'|} .$$

$\overset{2}{g}{}^{ij}$ 在无限远处为零的解为： $\overset{2}{g}{}^{ij}=-2\delta_{ij}\phi$. $\overset{3}{g}{}^{i0}$ 是一个新的矢量势： $\overset{3}{g}{}^{i0}=\zeta_i$. 下式给出：

$$\zeta_i(x,t)=-4G\int \mathrm{d}^3x'\frac{\overset{1}{T}{}^{0i}(x',t)}{|x-x'|} .$$

$\overset{4}{g}{}^{00}=-2\phi^2-2\psi$, 这里 ψ 是第二势，满足：

$$\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+4\pi G(\overset{2}{T}{}^{00}+\overset{2}{T}{}^{ii}) .$$

$\overset{4}{g}{}^{00}$ 也必须在无限远处为零，故上述方程的解为：

$$\psi(x,t)=-\int\frac{\mathrm{d}^3x}{|x-x'|}[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2\phi(x',t)}{\partial t^2}+G\overset{2}{T}{}^{00}(x',t)+G\overset{2}{T}{}^{ii}(x',t) .$$

2.2　扁球坐标及椭球体的牛顿势

由实测得知地球和行星的表面都是椭球体. 1742 年， Maclaurin[5] 就证明了不可压缩的理想流体在自转平衡时为扁椭球，其表面方程为：

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 .$$

这里 a 为扁椭球两个相等的半长轴， b 为半短轴. 为了研究该物体的内外牛顿势，这里引入一种新的坐标：扁椭球坐标在柱坐标系中 [6], 使用 (r,z,φ) 描述一个点的空间位置.

在这种扁椭球坐标系中， φ 的含义保持不变，但是要用 (μ,ν) 代替 (r,z), (μ,ν) 定义：$r=\triangle\cosh\mu\sin\nu$, $z=\triangle\sinh\mu\cos\nu$, 考虑如下定义的势：

$$\Phi=\frac{GM}{\triangle}\times\begin{cases}\arcsin\left(sech\mu_0\right) & \mu<\mu_0\\ \arcsin\left(sech\mu\right) & \mu\geq\mu_0\end{cases}. \tag{2}$$

这样一种势在任何一处均连续，并且除了 $\mu=\mu_0$ 外在任何一处均满足拉普拉斯方程. 因此 (2) 式就是由表面在 $\mu=\mu_0$ 处的薄椭球壳产生的引力势. 有了这样一个薄椭球壳的势，我们可以利用积分得到椭球体内外的牛顿势 [7]. 椭球体的内部势为：

$$\Phi(r,z,\varphi)=-\pi G\rho_0(Ia^2-A_1r^2-A_3z^2)\,.$$

其中， $I=2\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e}\arcsin e$, $e=\sqrt{1-b^2/a^2}$, $A_1=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e^2}\left[\dfrac{\arcsin e}{e}-\sqrt{1-e^2}\right]$, $A_3=2\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e^2}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-e^2}}-\dfrac{\arcsin e}{e}\right]$. 椭球体的外部势为：

$$\begin{aligned}\Phi(r,z,\varphi) &= \frac{2\pi G\rho_0a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(1-\frac{x^2+y^2-2z^2}{2(a^2-b^2)}\right)\arcsin\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+\kappa}}+\\ &\quad\frac{\pi G\rho_0a^2b\sqrt{b^2+\kappa}}{\sqrt{a^2-b^2}}\frac{x^2+y^2}{a^2+\kappa}-\frac{\pi G\rho_0}{a^2-b^2}\frac{2z^2}{b^2+\kappa}\,.\end{aligned}$$

这里 κ 满足方程：

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\kappa}+\frac{z^2}{b^2+\kappa}=1\,.$$

2.3 理想流体自引力作用下自转平衡研究简介

对于相对论体系下的流体力学问题， Weinberg 在文 [2] 中做过详细地介绍. 而对于理想流体在自引力作用下缓慢旋转的问题，最早由 Thorne 等 [8] 应用微扰的方法进行讨论. 他们首先考虑静止的可以看作是理想流体的大质量星平衡态 [9−11], 然后应用 Regge 等提出的微绕法 [12], 把缓慢旋转当成一种微扰来处理. 文 [9] 指出：内部为理想流体的可变形的大质量星在缓慢旋转达到自转平衡时，可以在一阶后牛顿近似下看作椭球体.

在此之后，吴雪君等 [13] 也对这一问题进行了一系列的回顾和进一步的讨论，并且指出在计算慢旋转星体的结构时，坐标系的选择必须非常谨慎，否则的话 “微扰量 / 原来值” 不再是小量，因而微扰理论失败. 为避免此困难，可以引入新的坐标系，并借此说明非旋转星体等密度面 (即等压面) 是球面，旋转星体等密度面变为椭球面. 在 DSX 体系建立以后， Klioner, 戴玉蓉等 [14,15] 对 DSX 体系下 1PN 流体力学及弹性力学问题作了进一步的讨论.

在牛顿体系下，理想流体的自转角速度与其形状的关系为：

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\left[(3-2e^2)\arcsin e-3e\sqrt{1-e^2}\right]. \tag{3}$$

实际上本文主要的工作是求解质量和自转都不太大的天体 (如恒星) 的一阶后牛顿度规，故不考虑相对论天体的真实形状与椭球体的差别，因此公式 (3) 仍可应用. 在一阶后牛

顿近似下，应用相对论流体力学公式可得：$\overset{0}{T}{}^{00}=\rho_0$, $\overset{2}{T}{}^{00}=\rho_0(-2\phi+v^2)$, $\overset{1}{T}{}^{0i}=\rho_0 v^i$, $\overset{2}{T}{}^{ii}=P+\rho_0 v^2=P+\rho_0 r^2\Omega^2$. 以及：

$$\nabla^2\psi=4\pi G(\overset{2}{T}{}^{00}+\overset{2}{T}{}^{ii})=2\rho_0(-\phi+\frac{1}{2}r^2\Omega^2)+P+\rho_0 r^2\Omega^2\,.$$

这里需要明确以下几个量的量级：$\rho\sim 1$, $\Phi\sim 1/c^2$, $P\sim 1/c^2$, $v^2\sim 1/c^2$.

另外还得到：$\nabla^2\zeta_i=16\pi G\ \overset{1}{T}{}^{0i}$, 写成分量形式为：$\nabla^2\zeta_1=-16\pi G\rho_0 y\Omega$, $\nabla^2\zeta_2=16\pi G\rho_0 x\Omega$, $\nabla^2\zeta_3=0$.

2.4 部分物理量的简化与取舍

在能动张量的原始公式 $T^{\mu\nu}=\rho_0 g^{\mu\nu}+[\rho_0(1+\Pi)+P]U^\mu U^\nu$ 中，含有内能 Π 这一项，但若选取固连于旋转体的坐标系，则其内部的物质是没有相对运动的，因此 $\Pi=0$. 另外分析计算中所用到的压强表达式：

$$\nabla^2\psi=4\pi G(\overset{2}{T}{}^{00}+\overset{2}{T}{}^{ii})=2\rho_0(-\phi+\frac{1}{2}r^2\Omega^2)+P+\rho_0 r^2\Omega^2\,.$$

如果将 P 表达为 $P=\overset{0}{P}+\overset{2}{P}+\cdots$, 其中 $\overset{0}{P}$ 是牛顿体系下得出的压强. 由于 $\overset{0}{P}$ 为 $1/c^2$ 量级，则 $\overset{2}{P}$ 为 $1/c^4$ 量级，$\overset{2}{P}$ 及其高阶项的影响在二阶后牛顿近似下才能表现出来，因此可以忽略，故使用 $\overset{0}{P}$ 已足够. 而牛顿近似下的压强公式对应于椭球体的形状，这里也说明使用椭球体这一模型计算一阶后牛顿度规可以满足精度要求.

3 内外度规的具体计算

从以上计算可见，要计算内部为理想流体的均匀缓慢旋转椭球体的内外度规，最后还需计算以下几项：

3.1 等效密度为 x, y, r^2 分布的有效势

首先考虑 $\rho_0 r^2\Omega^2$ 、$\rho_0 x\Omega$ 和 $\rho_0 y\Omega$ 在外部产生的等效势. 再回到原来的泊松方程：$\nabla^2\Phi=\rho$, 这里 $\rho=\begin{cases}\rho_0 x\Omega\\ \rho_0 y\Omega\\ \rho_0 r^2\Omega^2\end{cases}$. 我们使用与本问题边界相一致的扁椭球坐标系，扁椭球坐标系在前面已有说明. 使用分离变数法求解拉普拉斯方程 [16]. 在此坐标系下，$\begin{cases}r=\triangle\cosh\mu\sin\nu\\ z=\triangle\sinh\mu\cos\nu\\ \varphi=\varphi\end{cases}$. 拉普拉斯算符为：

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{1}{\triangle^2(\sinh^2\mu+\cos^2\nu)}\left[\frac{1}{\cosh\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\cosh\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{\sin\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sin\nu\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\right]\\ &\quad+\frac{1}{\triangle^2\cosh^2\mu\sin^2\nu}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,.\end{aligned}$$

为了求解泊松方程，首先求解拉普拉斯方程 $\nabla^2\Phi=0$, 这里应用分离变量法，首先假设 $\Phi=U(\mu)V(\nu)\Theta(\varphi)$, 代入拉普拉斯方程得：

$$\frac{1}{\triangle^2(\sinh^2\mu+\cos^2\nu)}\left[\frac{V(\nu)\Theta(\varphi)}{\cosh\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left(\cosh\mu\frac{\mathrm{d}U(\mu)}{\mathrm{d}\mu}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{U(\mu)\Theta(\varphi)}{\sin\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\sin\nu\frac{\mathrm{d}V(\nu)}{\mathrm{d}\nu}\right)\right]+\frac{U(\mu)V(\nu)}{\triangle^2(\cosh^2\mu\sin^2\nu)}\frac{\mathrm{d}^2\Theta(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}=0\,.$$

然后通过分离变量得到以下 3 式：

$$\frac{1}{U(\mu)\cosh\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left(\cosh\mu\frac{\mathrm{d}U(\mu)}{\mathrm{d}\mu}\right)+\frac{m^2}{\cosh^2\mu}=l(l+1)\,.$$

$$\frac{m^2}{\sin^2\nu}-\frac{1}{V(\nu)\sin\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\sin\nu\frac{\mathrm{d}V(\nu)}{\mathrm{d}\nu}\right)=l(l+1)\,.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta(\varphi)}{\mathrm{d}\phi^2}+m^2\Theta(\varphi)=0\,.$$

显然第 3 式的解容易求得： $\Theta(\varphi)=Ce^{im\varphi}$ 观察前两个方程的形式，与勒让德方程：

$$\frac{m^2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{p\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta}\right)=l(l+1)$$

进行比较我们发现 $V(\nu)$ 满足的此方程, 即为勒让德方程, 所以 $V(\nu)\Theta(\varphi)=V_{lm}Y_{lm}\,(\nu,\varphi)$, 这里 $Y_{lm}\,(\nu,\varphi)$ 为球谐函数.

再看

$$\frac{1}{U(\mu)\cosh\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left(\cosh\mu\frac{\mathrm{d}U(\mu)}{\mathrm{d}\mu}\right)+\frac{m^2}{\cosh^2\mu}=l(l+1)\,,$$

如果我们令 $\xi=i\sinh\mu$, 则上式可以化为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}\right]+\frac{m^2}{(1-\xi^2)}U+l(l+1)U=0\,.$$

对 $Re(\xi)>0$: 当 $|\xi|\to\infty$ 时，此方程的解为第一类缔合勒让德函数，正比于 ξ^l; 对 $Re(\xi)<o$: 当 $|\xi|\to\infty$ 时，此方程的解也可以为第二类缔合勒让德函数，正比于 $\xi^{-(l+1)}$.

从这一点可以看出，当 $e\to0$ 时，在扁椭球坐标系下分离变量的结果与在球坐标系下分离变量的结果相同. 同样在无穷远的区域这种分离变量法得到的解与在球坐标系下相同，因为对于无穷远的区域，扁椭球体的形状所带来的影响是可以忽略的. 在 $\mu\le\mu_0$ 处，其解为第一类缔合勒让德函数，用 P_l^m 表示. 在 $\mu\ge\mu_0$ 处，其解为第二类缔合勒让德函数，用 Q_l^m 表示. 因此拉普拉斯方程的解可以表示为： $\Phi=\sum_{lm}\phi_{lm}$, 其中：

$$\Phi_{lm}=\begin{cases}\dfrac{V_{lm}}{Q_l^m(0)}Q_l^m(i\sinh\mu)Y_l^m(\nu,\varphi),\mu\ge\mu_0\\[2ex]\dfrac{V'_{lm}}{P_l^m(0)}P_l^m(i\sinh\mu)Y_l^m(\nu,\varphi),\mu\le\mu_0\end{cases}\,. \tag{4}$$

回到原来的泊松方程：$\nabla^2\phi = \rho$, 这里 $\rho = \begin{cases} \rho_0 x\Omega \\ \rho_0 y\Omega \\ \rho_0 r^2\Omega^2 \end{cases}$, 其中 x, y, r^2 分别为：

$\begin{cases} x = r\cos\phi = \triangle\cosh\mu\sin\nu\cos\varphi \\ y = r\sin\phi = \triangle\cosh\mu\sin\nu\sin\varphi \\ r^2 = \triangle^2\cosh^2\mu\sin^2\nu \end{cases}$. 对于这个泊松方程, 为了求解它, 首先找一个特解,

对于 $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$, 设 $\Phi = R_{\rm lm}(\mu)P_{\rm lm}(\cos\nu)e^{im\varphi}$, 可以改写为：

$$\frac{P_{\rm lm}(\cos\nu)e^{im\varphi}}{\cosh\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\cosh\mu\frac{\partial R_{\rm lm}(\mu)}{\partial\mu}\right) - \left(l(l+1) - \frac{1}{\cosh^2\mu}\right)P_{\rm lm}(\cos\nu)R_{\rm lm}(\mu)e^{im\varphi} = 4\pi G\triangle^2\rho(\sinh^2\mu + \cos^2\nu)\,.$$

对于 $\rho = \begin{cases} x = \triangle\cosh\mu\sin\nu\cos\varphi \\ y = \triangle\cosh\mu\sin\nu\sin\varphi \end{cases} = \triangle\cosh\mu P_1^1(\cos\nu)e^{i\varphi}$ 首先求特解, 欲使两边相等, 需要两项：$l = 1, m = 1;\ l = 3, m = 3$ 最后求得内部等效势的特解表达为：

$$\Phi_{int} = \frac{2}{5}\pi G\triangle^3 e^{i\varphi}\left[\cosh^3\mu P_1^1(\cos\nu) - \frac{2}{15}\cosh\mu P_3^1(\cos\nu)\right].$$

把解用通解加特解的形式表示出来：

$$\Phi_{int} = \frac{2}{5}\pi G\triangle^3 e^{i\varphi}\left[\cos h^3\mu P_1^1(\cos\nu) - \frac{2}{15}\cos h\mu P_3^1(\cos\nu)\right] + \sum_{\rm lm} V_{\rm lm}P_l^m(i\sinh\mu)Y_l^m(\nu,\varphi)\,.$$

而外部解可由边界条件给出：$\Phi_{\rm ext}|_{\mu=\mu_0} = \Phi_{\rm int}|_{\mu=\mu_0}$, 为了方便，这里把 $Y_l^m(\nu,\varphi)$ 中的常数并到系数中去，改写为 $P_l^m(\cos\nu)e^{im\varphi}$, 由于内外势在边界上连续：

$$\begin{aligned}\Phi_{\rm int}|_{\mu=\mu_0} &= \frac{2}{5}\pi G\triangle^3 e^{i\varphi}\left[\cosh^3\mu P_1^1(\cos\nu) - \frac{2}{15}\cosh\mu P_3^1(\cos\nu)\right] + \\ &\sum_{\rm lm} V_{\rm lm}P_l^m(i\sinh\mu)P_l^m(\cos\nu)e^{im\varphi} = \\ &\Phi_{\rm ext}|_{\mu=\mu_0} + \sum_{\rm lm} V'_{lm}P_l^m(i\sinh\mu)P_l^m(\cos\nu)e^{im\varphi}\,.\end{aligned}$$

因此对于 $l = 3, m = 1;\ l = 1, m = 1$ 之外的项，如要同时满足 $\partial_\mu\Phi_{\rm ext}|_{\mu=\mu_0} = \partial_\mu\Phi_{\rm int}|_{\mu=\mu_0}$, 只有让系数全部为零. 而对于 $l = 3, m = 1;\ l = 1, m = 1$ 有：

$$\frac{2}{5}\pi G\triangle^3\cosh^3\mu_0 + V_{11}P_1^1(i\sinh\mu_0) = V'_{11}Q_1^1(i\sinh\mu_0)\,.$$

$$-\frac{4}{75}\pi G\triangle^3\cosh\mu_0 + V_{31}P_3^1(i\sinh\mu_0) = V'_{31}Q_3^1(i\sinh\mu_0)\,.$$

以及由 $\partial_\mu\Phi_{\rm ext}|_{\mu=\mu_0} = \partial_\mu\Phi_{\rm int}|_{\mu=\mu_0}$ 所得出的：

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{2}{5}\pi G\triangle^3\cosh^3\mu + V_{11}P_1^1(i\sinh\mu)\right]|_{\mu=\mu_0} = \frac{\partial}{\partial\mu}V'_{11}Q_1^1(i\sinh\mu)|_{\mu=\mu_0}\,.$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[-\frac{4}{75}\pi G\triangle^3\cosh\mu+V_{31}P_3^1(i\sinh\mu)\right]|_{\mu=\mu_0}=\frac{\partial}{\partial\mu}V'_{31}Q_3^1(i\sinh\mu)|_{\mu=\mu_0}\,.$$

这样得到了关于 V_{11}, V'_{11}, V_{31}, V'_{31} 的两个方程组. 为了表达方便, 将 $\partial_\mu f(\mu)|_{\mu=\mu_0}$ 简写为 $\partial_{\mu_0}f(\mu)$. 解这两个方程组得:

$$\begin{cases} V_{11}=-\dfrac{1}{5}\pi Gi\triangle^3\cosh^3\mu_0\left(\dfrac{\partial Q_1^1(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}\cosh\mu_0-3Q_1^1(i\sinh\mu_0)\sinh\mu_0\right)\\ V'_{11}=-\dfrac{1}{5}\pi Gi\triangle^3\cosh^3\mu_0\left(\dfrac{\partial P_1^1(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}\cosh\mu_0-3P_1^1(i\sinh\mu_0)\sinh\mu_0\right)\\ V_{31}=\dfrac{1}{225}\pi Gi\triangle^3\cosh\mu_0\left(\dfrac{\partial Q_3^1(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}\cosh\mu_0-3Q_3^1(i\sinh\mu_0)\sinh\mu_0\right)\\ V'_{31}=\dfrac{1}{225}\pi Gi\triangle^3\cosh\mu_0\left(\dfrac{\partial P_3^1(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}\cosh\mu_0-3P_3^1(i\sinh\mu_0)\sinh\mu_0\right)\end{cases}. \tag{5}$$

由于式中的形式过于复杂, 这里就用 $P_1^1(i\sinh\mu)$, $Q_1^1(i\sinh\mu)$, $P_3^1(i\sinh\mu)$, $Q_1^1(i\sinh\mu)$ 表示最后的结果. 下面我们来看 $\rho=\triangle^2\cosh^2\mu\sin^2\nu$ 的情景, 这里只有 $m=0$, 而 $l=4,2,0$ 同样先求内部等效势的特解, 特解为:

$$\Phi_{\rm int}=\pi G\triangle^4[\frac{2}{15}\cosh^4\mu-\frac{4}{21}\cosh^4\mu P_2^0(\cos\nu)+\frac{2}{35}\cosh^4\mu P_4^0(\cos\nu)]\,.$$

然后根据边界条件得到 V_{00}, V'_{00}, V_{20}, V'_{20}, V_{40}, V'_{40} 的方程组, 最后的解为:

$$V_{l0}=\frac{a_l\pi G\triangle^4\cosh^3\mu_0\left(\dfrac{\partial Q_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}\cosh\mu_0-4Q_l^0(i\sinh\mu_0)\sinh\mu_0\right)}{Q_l^0(i\sinh\mu_0)\dfrac{\partial P_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}-P_l^0(i\sinh\mu_0)\dfrac{\partial Q_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}}, \tag{6}$$

$$V'_{l0}=\frac{a_l\pi G\triangle^4\cosh^3\mu_0\left(\dfrac{\partial P_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}\cosh\mu_0-4P_l^0(i\sinh\mu_0)\sinh\mu_0\right)}{Q_l^0(i\sinh\mu_0)\dfrac{\partial P_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}-P_l^0(i\sinh\mu_0)\dfrac{\partial Q_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}}. \tag{7}$$

这里 $l=4,2,0$, $a_0=2/15$, $a_2=-4/21$, $a_4=2/35$. 我们认为用勒让德函数表示更简单, 因此不再做进一步的展开.

3.2 相似椭球壳径向分布的有效势

根据角速度与偏心率的关系 $\dfrac{\Omega^2}{2\pi G\rho}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\left[(3-2e^2)\arcsin e-3e\sqrt{1-e^2}\right]$ 可得:

$$\begin{aligned}&2\rho_0(-\phi+\frac{1}{2}r^2\Omega^2)=\\&2\rho_0\pi G\rho_0(Ia^2-A_1r^2-A_3z^2)+\\&\pi G\rho_0r^2\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\left[(3-2e^2)\arcsin e-3e\sqrt{1-e^2}\right]\,.\end{aligned}$$

由于后面的项是相似椭球分布的, 因此可用 $m^2\equiv r^2+\dfrac{z^2}{1-e^2}$ 将后面的 r,z 整合为一个变量, 得: $2\rho_0(-\phi+\dfrac{1}{2}r^2\Omega^2)=2\pi G\rho_0^2(Ia^2-A_3(1-e^2)m^2)$. 根据椭球体内部理想流体的平衡

条件得到：$p=\rho_0(-\phi+\frac{1}{2}r^2\Omega^2+C)$. 其中 C 是一常数, 它的大小满足在椭球体表面压力为零, 我们用 $m=m_0$ 表示椭球体表面, 可得：$C=\Phi_0-1/2r_0^2\Omega^2=\pi G\rho_0(A_3(1-e^2)m^2-Ia^2)$. 因此：

$$p=\rho_0(-\phi+\frac{1}{2}r^2\Omega^2+C)=\pi G\rho_0^2(A_3(1-e^2)(m_0^2-m^2))\,, \tag{8}$$

$$2\rho_0(-\phi+\frac{1}{2}r^2\Omega^2)+P=2\pi G\rho_0^2Ia^2+\pi G\rho_0^2A_3(1-e^2)m_0^2-3\pi G\rho_0^2A_3(1-e^2)m^2\,. \tag{9}$$

可见前两项为常数，因此用广义球谐级数展开可很容易地得到解，而最后一项变为：$-3\pi G\rho_0^2A_3(1-e^2)(r^2+\dfrac{z^2}{1-e^2})$. 对于 $-3\pi G\rho_0^2A_3(1-e^2)r^2$ 项，前面已经给出了求解的方法，唯一不同之处在于系数. 对于 $-3\pi G\rho_0^2A_3z^2$ 项，设内部级数的系数为 W_{l0}, 外部为 W'_{l0}, 得：

$$W_{l0}=\frac{b_l\pi G\triangle^4\cosh^3\mu_0\left(\dfrac{\partial Q_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}\cosh\mu_0-4Q_l^0(i\sinh\mu_0)\sinh\mu_0\right)}{Q_l^0(i\sinh\mu_0)\dfrac{\partial P_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}-P_l^0(i\sinh\mu_0)\dfrac{\partial Q_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}}\,, \tag{10}$$

$$W'_{l0}=\frac{b_l\pi G\triangle^4\cosh^3\mu_0\left(\dfrac{\partial P_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}\cosh\mu_0-4P_l^0(i\sinh\mu_0)\sinh\mu_0\right)}{Q_l^0(i\sinh\mu_0)\dfrac{\partial P_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}-P_l^0(i\sinh\mu_0)\dfrac{\partial Q_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}}\,. \tag{11}$$

这里 $l=4,2,0$, $b_0=-1/20$, $b_2=-1/7$, $b_4=-2/35$. 最后我们求解最简单的 $\rho=1$ 时的内外势, 这个解出后, 只需要再乘以常数 $2\rho_0(-\phi+\frac{1}{2}r^2\Omega^2)+P=2\pi G\rho_0^2Ia^2+\pi G\rho_0^2A_3(1-e^2)m_0^2$ 就可以得到两项产生的等效势，为：

$$V_{l0}=\frac{c_l\pi G\triangle^4\cosh\mu_0\left(\dfrac{\partial Q_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}\cosh\mu_0-2Q_l^0(i\sinh\mu_0)\sinh\mu_0\right)}{Q_l^0(i\sinh\mu_0)\dfrac{\partial P_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}-P_l^0(i\sinh\mu_0)\dfrac{\partial Q_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}}\,, \tag{12}$$

$$V'_{l0}=\frac{c_l\pi G\triangle^4\cosh\mu_0\left(\dfrac{\partial P_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}\cosh\mu_0-2P_l^0(i\sinh\mu_0)\sinh\mu_0\right)}{Q_l^0(i\sinh\mu_0)\dfrac{\partial P_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}-P_l^0(i\sinh\mu_0)\dfrac{\partial Q_l^0(i\sinh\mu_0)}{\partial\mu_0}}\,. \tag{13}$$

这里只有两项 $c_0=2/3$, $c_2=-2/3$. 故内外等效势可表达为：

$$\Phi_{\rm int}=\frac{2}{3}\pi G\triangle^2\cosh^2\mu(1-P_2^0(\cos\nu))+V_{00}P_0^0(i\sinh\mu)+V_{20}P_2^0(i\sinh\mu)P_2^0(\cos\nu)\,,$$

$$\Phi_{\rm ext}=V'_{00}Q_0^0(i\sinh\mu)+V'_{20}Q_2^0(i\sinh\mu)P_2^0(\cos\nu)\,.$$

3.3 内外度规的表达式

通过以上的计算，我们把 (1) 式中内外度规需要的所有项全部求解并列出来，首先看外部，椭球体的外部势为：

$$\begin{aligned}\Phi(r,z,\phi) &= \frac{2\pi G\rho_0 a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(1-\frac{x^2+y^2-2z^2}{2(a^2-b^2)}\right)\arcsin\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+\kappa}}+\\ &\quad\frac{\pi G\rho_0 a^2 b\sqrt{b^2+\kappa}}{\sqrt{a^2-b^2}}\frac{x^2+y^2}{a^2+\kappa}-\frac{\pi G\rho_0}{a^2-b^2}\frac{2z^2}{b^2+\kappa}\,.\end{aligned}$$

这里 κ 满足方程：

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\kappa}+\frac{z^2}{b^2+\kappa}=1\,.$$

由 $2\rho_0(-\phi+\frac{1}{2}r^2\Omega^2)+P$ 产生的等效势：

$$\begin{aligned}\Phi_{1\rm ext} &= (2\pi G\rho_0^2 Ia^2+\pi G\rho_0^2 A_3(1-e^2)m_0^2)(V'_{00}Q_0^0(i\sinh\mu)+\\ &\quad V'_{20}Q_2^0(i\sinh\mu)P_2^0(\cos\nu)+W'_{l0}Q_l^0(i\sinh\mu)P_l^0(\cos\nu)\,.\end{aligned}$$

这里的 V'_{00}, V'_{20} 由 (12),(13) 式给出， W'_{l0}, $l=0,2,4$ 由 (10),(11) 式给出.

$\rho_0 r^2\Omega^2$ 产生的等效势为：

$$\Phi_{2\rm ext}=\rho_0 r^2\Omega^2(V'_{00}Q_0^0(i\sinh\mu)+V'_{20}Q_2^0(i\sinh\mu)P_2^0(\cos\nu)+V'_{40}Q_4^0(i\sinh\mu)P_4^0(\cos\nu)\,.$$

第二势 ψ 可以写为： $\psi=\Phi_{1\rm ext}+\Phi_{2\rm ext}-\dfrac{3\pi G\rho_0 A_3(1-e^2)}{\Omega^2}\Phi_{2\rm ext}$. 这样一阶后牛顿近似下的 g_{00} 就表示出来. 由 $4\rho_0 y\Omega$ 产生的等效势：

$$\zeta_{1\rm ext}=4\rho_0\Omega(V'_{11}Q_1^1(i\sinh\mu)P_1^1(\cos\nu)\sin\varphi+V'_{31}Q_3^1(i\sinh\mu)P_3^1(\cos\nu)\sin\varphi)\,.$$

由 $-4\rho_0 x\Omega$ 产生的等效势：

$$\zeta_{1\rm ext}=-4\rho_0\Omega(V'_{11}Q_1^1(i\sinh\mu)P_1^1(\cos\nu)\cos\varphi+V'_{31}Q_3^1(i\sinh\mu)P_3^1(\cos\nu)\cos\varphi)\,.$$

这里的 V'_{11}, V'_{31} 由 (5) 式给出. 这样， ζ_i 即可解出，并且求得 g_{0i}. 而 g_{ij} 只需要外部牛顿势就够了. 因而我们可得到一阶后牛顿近似下整个外部解. 对于内部解，只需在最后度规的表达式中将各项换成与外部对应的内部等效势即可.

3.4 讨论

在上面的计算中，我们还有以下几个问题需要说明：

(1) 应用积分和求解泊松方程均可得出等效势，这里选择后一种方法.

(2) 最后的解是否正确，需要满足以下几个条件：

a) 内部解满足泊松方程，外部解满足拉普拉斯方程.

b) 内部解表达为特解加通解，外部解表达为通解，内部解与外部解在边界上及边界上的导数连续.

c) 内部解在原点处有限，外部解在无穷远处为零.

这里取 $\nabla^2\Phi=1$ 的解做一个简单的验证，有：

$$Q_0^0(i\sinh\mu)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+i\sinh\mu}{1-i\sinh\mu},$$

$$Q_0^2(i\sinh\mu)=\frac{1}{4}(-1-3\sinh^2\mu)\ln\frac{1+i\sinh\mu}{1-i\sinh\mu}-\frac{3}{2}i\sinh\mu,$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}Q_0^0(i\sinh\mu)=isech\mu,$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}Q_0^2(i\sinh\mu)=-\frac{1}{2}sech\mu\left(4i+6i\sinh^2\mu+3(\sinh\mu+\sinh^3\mu)\ln\frac{1+i\sinh\mu}{1-i\sinh\mu}\right).$$

最后解得：

$$\begin{cases} V_{00}=\dfrac{2\pi G}{3}\triangle^2\cosh^2\mu_0\left(-i\sinh\mu_0\ln\dfrac{1+i\sinh\mu}{1-i\sinh\mu}-1\right) \\ V_{00}'=-\dfrac{4\pi Gi}{3}\triangle^2\cosh^2\mu_0\sinh\mu_0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} V_{20}=\dfrac{2\pi G}{3}\triangle^2\cosh^2\mu_0\left(2-i\sinh\mu_0\ln\dfrac{1+i\sinh\mu}{1-i\sinh\mu}\right) \\ V_{00}'=\dfrac{4\pi Gi}{3}\triangle^2\cosh^2\mu_0\sinh\mu_0 \end{cases}.$$

内外等效势表达为：

$$\Phi_{\rm int}=\frac{2}{3}\pi G\triangle^2\cosh^2\mu(1-P_2^0(\cos\nu))+V_{00}P_0^0(i\sinh\mu)+V_{20}P_2^0(i\sinh\mu)P_2^0(\cos\nu),$$

$$\Phi_{\rm ext}=V_{00}'Q_0^0(i\sinh\mu)+V_{20}'Q_2^0(i\sinh\mu)P_2^0(\cos\nu).$$

在 $\Phi_{\rm ext}$ 的表达式中，由于 V_{00}' 是常数，所以可验证 $\nabla^2Q_0^0(i\sinh\mu)=0$, $\nabla^2Q_2^0(i\sinh\mu)P_2^0(\cos\nu)=0$. 同样对于 $\Phi_{\rm int}$ 也可验证. 内外连续的条件显然是满足的，并且从内部与外部解的表达形式 $P_l^m(i\sinh\mu)P_l^m(\cos\nu)$, $Q_l^m(i\sinh\mu)P_l^m(\cos\nu)$ 可以看出内部解为有限，外部解在无穷远处为零的条件必满足. 由以上几方面，我们可保证求解的等效势的合理性.

4　总结与展望

可以看出即使用后牛顿近似的方法，求解复杂形状物体的度规仍然并非易事，为了解决椭球体等效势的问题，引入一种新的求解椭球体等效势的方法，广义球谐函数展开法，这种方法的优点在于对多种等效密度分布的情况，都可用来求解，并且其结果的形式以广义球谐函数表示. 缺点是，这样得到的东西里面含有复数项，因此在实际应用时，可能还需要用它的实部. 但不管如何，这里都给出了一种新的解决此类问题的方法. 在度规求出以后，我们希望可以在以下几个方面得到应用：

(1) 相对论天体力学. 用于进一步的探讨在这种模型下可能出现的一阶后牛顿效应以及可能造成的对小天体运动的影响.

(2) 地球物理学. 例如可以使用一阶后牛顿定义下的大地水准面概念, 从理论上计算出不同层之间精密时钟频率的差异. 同时内部度规还可用在地球内部的运动中, 对一些现象进行理论上的分析.

当然人们正应用各种方法求解缓慢旋转的内部为理想流体的椭球体度规的精确解, 并且取得了一些进展, 求解精确解或更加简单地应用于实际的解, 是将来仍然需要面对的问题.

参 考 文 献

1 Hans Stephani, Dietrich Kramer, Comelius Hoenselaers, et al. Exact Solutions of Einstein Field Equations. Cambridge University Press, 2003

2 温伯格. 引力论和宇宙论. 北京: 科学出版社, 1980 (Weinberg. Gravitation and Cosmology. New York: Wiley, 1972)

3 Fock V A. The Theory of Space, Time and Gravitation. Moscow: State Technical Publications, 1955

4 James Hartle. ApJ, 1967, 150: 1005

5 戴文赛. 太阳系演化学. 上海: 上海科学技术出版社, 1979 (Dai Wen-sai. Evolvement of Solar System. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1979)

6 Jemes Binney, Scott Tremaine. Galactic Dynamics. Princeton: Princeton University Press, 1987

7 MacMillan W D. The Theory of Potential. New York: Dover, 1958

8 Kip S Thorne, Alfonso Campolattaro. ApJ, 1967, 149: 591

9 James Hartle, David Sharp. ApJ, 1967, 147: 317

10 James Hartle, Kip Thorne. ApJ, 1968, 153: 807

11 James Hartle,Kip Thorne.APJ,1969,158:719-726

12 Regge, Wheeler. Physical Review 1957, 108(4): 1063

13 吴雪君, 须重明. 天文学报, 1996, 37(3): 254 (Wu Xue-jun, Xu Chong-ming. AcASn, 1996, 37(3): 254)

14 Xu Chong-ming, Wu Xue-jun (Soffel Michael), Klioner Sergei Physics Review D, 2003, 68: 064009

15 戴玉蓉, 吴雪君, 须重明. 天文学报, 1999, 40(4): 400 (Dai Yu-rong, Wu Xue-jun, Xu Chong-ming. AcASn, 1999, 40(4): 400)

16 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 北京大学出版社, 2000 (Wang Zhu-xi, Guo Dun-ren. Survey of Special Functions. Beijing: Beijing University Press, 2000)

Post-Newton Metric Inside and Outside a Rotating Oblate Ellipsoid

CHENG Hao[1,2] SONG Guo-xuan[1] HUANG Cheng[1]

(1 *Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 200030)

(2 *Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039)

Abstract Post-Newton metric was got inside and outside a uniform uncompressed ideal fluid oblate ellipsoid at rigid rotation.Analytic solutions of post-Newton metric component were got by series expansion in oblate ellipsoid coordinate system.There are only finite terms in series in this problem,so results can be used to study particle movement near the ellipsoid.

Key words post-Newton approximation, inner and exerior metric, oblate spheroid, spherical harmonics