第 48 卷 第 1 期　　天 文 学 报　　Vol.48 No.1
2007 年 1 月　　ACTA ASTRONOMICA SINICA　　Jan., 2007

直接推导摄动运动方程的一种方法*

冯和生　李语强

(中国科学院国家天文台 / 云南天文台 昆明 650011)

摘要　提出一种直接推导摄动运动方程的方法，也就是以矢量的微分运算为工具直接推导二体问题意义下的瞬时椭圆如何在摄动力三分力的作用下轨道根数发生的变化，推导过程几何图像清晰，力学意义明确．特别是对 $\dot{\omega}$ 、 $\dot{M}$ 两根数的推导，比传统的方法更简洁、直观．

关键词　天体力学：摄动力，轨道根数，摄动方程
中图分类号：P 133;　　**文献标识码**：A

1　引言

以轨道根数为变量的摄动方程的推导，是个古老的经典问题．传统上的推导方法是，在分析力学的基础上，推导出正则常数的变化与摄动函数的关系，然后根据正则常数与轨道根数之间的对应，从而推导出以轨道根数为变量的摄动运动方程．虽然这种方法在力学上有普遍意义，但推导过程相当繁冗，而且还要认定摄动力存在力函数．以后的著作中出现了以轨道根数为对象的直接推导方法 [1−3]，不再要求摄动为保守力，但是推导方法是建立在微分方程解的常数变易的分析概念上，推理思路不够清晰．Burns[4] 、Murray[5] 等也采用了直接的方法对摄动方程进行推导，但是推导过程尤其是最后两个根数的推导不够直观．本文是用矢量的微分运算为工具直接推导瞬时椭圆在摄动力三分力作用下轨道根数发生的变化，这样使得推导过程更简洁、直观，因此，能够更清楚地理解摄动运动方程．

2　推导过程

我们先建立一个与受摄体随动的坐标系 (如图 1 所示)，其中，$\boldsymbol{R}_0$ 为径向单位矢量，$\boldsymbol{T}_0$ 为横向单位矢量，$\boldsymbol{W}_0$ 为轨道面的法向单位矢量．

摄动力 $\boldsymbol{F}_e$ 在上述 3 个方向的分量分别为 S 、 T 、 W．通过坐标旋转，不难计算

2005-11-08 收到原稿，2006-01-05 收到修改稿
* 云南省自然科学基金 (2002A0017R) 资助

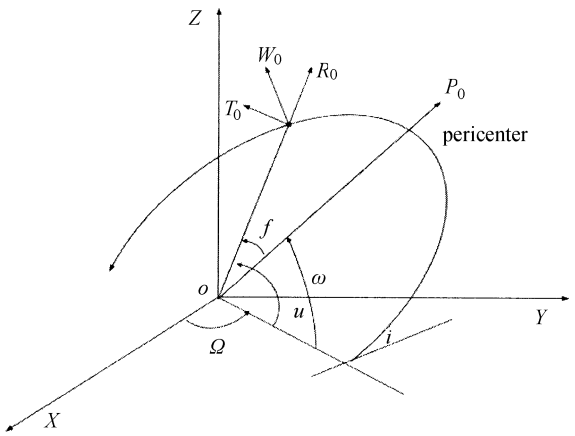

图 1　与受摄体随动坐标系几何示意图

Fig. 1　Geometry of orbital-plane coordinate system

$\boldsymbol{R}_0$ 、 $\boldsymbol{T}_0$ 、 $\boldsymbol{W}_0$ 在赤道坐标系 $O-XYZ$ 中的分量为

$$\boldsymbol{R}_0=\begin{pmatrix}\cos u\cos\Omega-\sin u\cos i\sin\Omega\\ \cos u\sin\Omega+\sin u\cos i\cos\Omega\\ \sin u\sin i\end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{T}_0=\begin{pmatrix}-\sin u\cos\Omega-\cos u\cos i\sin\Omega\\ -\sin u\sin\Omega+\cos u\cos i\cos\Omega\\ \cos u\cos i\end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{W}_0=\begin{pmatrix}\sin i\sin\Omega\\ -\sin i\cos\Omega\\ \cos i\end{pmatrix}. \tag{3}$$

其中， $u=\omega+f$ 是升交角距.

为了论述方便，假定受摄体的质量为单位质量，则受摄体的加速度即为力，速度即为动量. 受摄体在中心引力 $\boldsymbol{F}_0$ 及摄动力 $\boldsymbol{F}_e$ 的作用下

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}_0+\boldsymbol{F}_e=-\frac{\mu}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}+\boldsymbol{F}_e\,, \tag{4}$$

其中， $-\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ 表示从受摄体指向中心天体中心的单位矢量， μ 是重力常数. 单位质量的动量矩为 $\boldsymbol{h}$

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{h}\,, \tag{5}$$

对上式两端微分，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{r}\times(-\frac{\mu\boldsymbol{r}}{r^3}+\boldsymbol{F}_e)=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_e\,. \tag{6}$$

我们可以得到一个结论：受摄体动量矩的微商等于摄动力的力矩.

对应于每个时刻的瞬时椭圆有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\mu(\frac{2}{r}-\frac{1}{a})\,. \tag{7}$$

将上式两端微分

$$2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\mu(-\frac{2}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t})=\mu(-\frac{2}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t})\,, \tag{8}$$

根据 (4) 式和 (8) 式，则有

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{2a^2}{\mu}\boldsymbol{F}_e\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{9}$$

上式也可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{-\mu}{2a})=\boldsymbol{F}_e\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{10}$$

从上式中，我们可以得到：系统的总能量的变化率等于摄动力所做功的功率.

在新建的坐标系中 (见图 1), 有

$$\boldsymbol{F}_e=S\boldsymbol{R}_0+T\boldsymbol{T}_0+W\boldsymbol{W}_0\,, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_e=-rW\boldsymbol{T}_0+rT\boldsymbol{W}_0\,, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{h}=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\boldsymbol{W}_0,\quad h=|\boldsymbol{h}|=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\,. \tag{13}$$

根据 (6) 式和 (12) 式，有

$$-rW\boldsymbol{T}_0+rT\boldsymbol{W}_0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\mu a(1-e^2)}\boldsymbol{W}_0+\sqrt{\mu a(1-e^2)}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}_0}{\mathrm{d}t}\,. \tag{14}$$

从上式可以得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\mu a(1-e^2)}=rT\,, \tag{15}$$

$$\sqrt{\mu a(1-e^2)}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}_0}{\mathrm{d}t}=-rW\boldsymbol{T}_0\,, \tag{16}$$

其中，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}_0}{\mathrm{d}t}$ 及 $\boldsymbol{T}_0$ 可以根据 (3) 式和 (2) 式得到.

于是，有

$$\sqrt{\mu a(1-e^2)}\begin{pmatrix}\cos i\sin\Omega\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\sin i\cos\Omega\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\\ -\cos i\cos\Omega\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\sin i\sin\Omega\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\\ -\sin i\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}=-rW\begin{pmatrix}-\sin u\cos\Omega-\cos u\cos i\sin\Omega\\ -\sin u\sin\Omega+\cos u\cos i\cos\Omega\\ \cos u\sin i\end{pmatrix}. \tag{17}$$

上式经过简单计算，即可得到

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\frac{r\sin(\omega+f)}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}\sin i}W\,, \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{r\cos(\omega+f)}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}W\,. \tag{19}$$

根据 (9) 式，有

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{2a^2}{\mu}(S\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+rT\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t})\,. \tag{20}$$

对于瞬时椭圆，有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{\mu}{P}}e\sin f\,, \tag{21}$$

$$r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{\mu P}}{r}\,, \tag{22}$$

$$P=a(1-e^2)\,. \tag{23}$$

因此，有

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[Se\sin f+T(1+e\cos f)\right]. \tag{24}$$

根据 (15) 式，得到

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu}{n\sqrt{\mu a(1-e^2)}}\left[(1-e^2)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-2ae\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right]=rT\,. \tag{25}$$

将 (24) 式代入 (25) 式，得到

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[S\sin f+T(\cos f+\cos E)\right]\,. \tag{26}$$

$\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ 的推导可以借助于上述结果，利用矢量的微分运算为工具直接快捷地求出. 为此，定义一个单位矢量 $\boldsymbol{P}_0$, 它位于瞬时椭圆的拱线 (apse line) 上，指向拱点 (apsis) (见图 1). 每一时刻的瞬时椭圆方程为：

$$r=\frac{h^2}{\mu(1+e\cos f)}\,. \tag{27}$$

写成矢量形式为

$$\frac{h^2}{\mu}=\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{R}_0+e\boldsymbol{P}_0)=r+re\boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{P}_0\,. \tag{28}$$

将上式微分

$$\frac{2h}{\mu}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}e\boldsymbol{P}_0\cdot\boldsymbol{R}_0+r\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{P}_0+re\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_0}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{P}_0+re\boldsymbol{R}_0\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_0}{\mathrm{d}t}\,, \tag{29}$$

得单位矢量的微商其方向垂直于该单位矢量，模等于该单位矢量的角变化率. 很显然，$\boldsymbol{R}_0$ 的角变化率是 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, $\boldsymbol{P}_0$ 的角变化率则是拱线自身的转动 $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ 加上轨道面交线进动量在轨道面上的投影 $\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\cos i$. 于是可以直接写出

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_0}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{P}_0=-\sin f\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{R}_0\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_0}{\mathrm{d}t}=\sin f\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\cos i\right)\,, \tag{31}$$

$$\frac{2h}{\mu}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}e\cos f+r\cos f\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}-re\sin f\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+re\sin f(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\cos i)\,. \tag{32}$$

而对于椭圆运动总有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}e\cos f-re\sin f\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=0\,, \tag{33}$$

$$\frac{2h}{\mu}rT=r\cos f\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+re\sin f\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\cos i\right)\,. \tag{34}$$

代入相关的结果，得到

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-S\cos f+T(1+\frac{r}{P})\sin f\right]-\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\cos i\,. \tag{35}$$

最后，我们选定平近点角 M 作为第 6 个根数. 利用瞬时轨道运动中的开普勒方程及上述有关结果，可以直接推导它的变化 $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$.

$$M=E-e\sin E\,. \tag{36}$$

偏近点角 E 不仅取决于真近点角 f 同时还取决于偏心率 e, 利用椭圆中的几何关系

$$\cos E=\frac{e+\cos f}{1+e\cos f}\,. \tag{37}$$

对上式求导，得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{r}{a\sqrt{1-e^2}}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\sin f}{1+e\cos f}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\,, \tag{38}$$

其中，真近点角的变化率 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, 不仅取决于向径 $\boldsymbol{r}$ 自身的旋转 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, 同时还取决于构成真近点角的另一个边 (拱线) 的旋转，显然，

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}-\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\cos i\right)\,, \tag{39}$$

而 $r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=h$ 为瞬时角动量. 因此

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{r^2}-(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\cos i)\,. \tag{40}$$

对 (36) 式两端求导

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = (1 - e\cos E)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} - \sin E\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\,, \tag{41}$$

将 (26) 式、 (35) 式、 (38) 式和 (40) 式代入 (41) 式，得到

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n - \frac{1-e^2}{nae}\left[-S(\cos f - 2e\frac{r}{P}) + T(1+\frac{r}{P})\sin f\right] \tag{42}$$

3 结论

至此，我们已经很简单地将 6 个摄动运动方程推导出．利用矢量微分运算的方法，使得推导过程简单，几何图像清晰，力学意义明确．摄动运动方程在分析法轨道确定中仍然使用，我们用更直观的方法重新推导摄动运动方程是为了更好地理解摄动运动方程，同时也为教学和科研工作提供一些有益的帮助．

参 考 文 献

1 Дубяго А Д. определение орбит. ЛЕНИНГРАД：МОСКВА， 1949
2 Brouwer D, Clemence G M. Methods of Celestial Mechanics. New York: Academic Press, 1961
3 刘林．人造地球卫星轨道力学．北京：高等教育出版社， 1992. 79
4 Joseph A Burns. American Journal of Physics. 1976, 44: 944
5 Carl D Murray, Stanley F Dermott. Solar System Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 54

A Method for Deriving the Perturbation Equation

FENG He-sheng LI Yu-qiang

(*National Astronomical Observatories/ Yunnan Observatory, Chinese Academy of Sciences, Kunming* 650011)

Abstract A method for deriving instantaneous ellipse orbital perturbation equation of motion is given. It is based on the idea of vector differentiation. Under the frame of two-body problems, the variation of orbital elements that is perturbed by disturbing force is derived directly. Therefore, no matter from the mathematics or mechanics, the method of deriving seems to be clearer. Especially, the derivation of the two orbital elements $\dot{\omega}$, $\dot{M}$ are more straightforward than the traditional method.

Key words celestial mechanics: disturbing force, orbital elements, perturbation equation