第 48 卷 第 1 期　　天 文 学 报　　Vol.48 No.1
2007 年 1 月　　ACTA ASTRONOMICA SINICA　　Jan., 2007

电荷屏蔽与恒星内部 β 衰变*

孙庆强 [1]　黄增光 [1]　朴红光 [1]　罗志全 [2]

(1 淮海工学院数理科学系 连云港 222005)
(2 西华师范大学物理与电子信息学院 南充 637002)

摘要　针对低能反应和 Gamow – Teller 共振跃迁，分析了在恒星内部电荷屏蔽对 β 衰变率的影响，对共振跃迁的分析是基于核的壳层模型．作为例子，详细计算了电荷屏蔽对 $^{56}C_r$ 的 β 衰变的影响．结果表明：在较低温度和高密度下，电荷屏蔽使 β 衰变率有明显地增加．这对恒星晚期演化和超新星爆发研究可能会有重要的影响．

关键词　基本粒子，中微子，核合成，恒星演化
中图分类号：P 148;　　**文献标识码**：A

1 引言

大质量的恒星晚期演化和其内部的弱相互作用密切相关，因为弱相互作用决定了超新星核心区的熵和电子的丰度：电子俘获的结果使电子数减少，而 β 衰变正好是相反的影响；同时二者都会产生中微子，中微子在密度 $\rho \leq 10^{11}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ 时逃离恒星，从而带走核心区的熵和能量．所以弱相互作用率的大小会直接影响到恒星晚期演化和核心区塌缩过程中的中子化及中微子损失率，其研究对于进一步探讨恒星晚期演化及冷却有重要意义．80 年代初，Fuller(FFN) 等 [1−3] 采用了简单壳层模型讨论了 GT 共振跃迁的共振能量和共振跃迁的强度，给出恒星内部 $21 \leq A \leq 60$ 的 226 种原子核在不同温度和密度点上的电子俘获率；90 年代，Aufderheide (AFWH) 等 [4] 扩展了 FFN 的工作，采用与文中壳层模型相似的技巧，而在跃迁几率的计算中，对子核可能的跃迁终态划分为基态附近的低能区和远离基态较高能量的共振区分别做近似处理，讨论了 $A > 60$ 的核 GT 跃迁，给出了 150 个具有较强跃迁的最丰的核素在一些较重要的温度和密度点上的 β 衰变率；Kar 等 [5] 用 β 平均强度函数讨论了前身星阶段 $A > 60$ 核素的 β 衰变率；罗志全等 [6] 讨论了在恒星高密环境下电荷屏蔽对电子俘获率的影响，结果表明这一影响是较显著的，并指出在超新星的前身星的结构中及后来核心区的坍缩等演化模式的理论研究中应考虑电荷屏蔽的影响．近年来，β 衰变的研究更加广泛和深入，Heger 等 [7] 详细地列出了一个不同质量的恒星晚期演化过程中大部分重要核素的电子俘获和 β 衰变率的表，Itoh 等 [8] 正在研究恒星高密度环境下简并电子屏蔽对电子俘获和 β 衰变率的修正，以及束缚态的 β 衰变研究，白希祥等 [9] 也取得了一些新进展．作为讨论电荷屏蔽对整个

2005-11-04 收到
* 国家自然科学基金 (10347008) 资助项目

弱相互作用影响的一部分，充分考虑了电荷屏蔽效应，讨论其对恒星内部 β 衰变率的影响，作为例子，详细计算电荷屏蔽对反应 $^{56}\mathrm{C}_r \rightarrow ^{56}\mathrm{Mn}(e^{-1},\nu_e)$ 的 β 衰变率的影响．文中能量和动量分别以 $\mathrm{m}_e c^2$ 和 $\mathrm{m}_e c$ 为单位，温度 T 以 $10^9\,\mathrm{K}$ 为单位.

2 恒星内部无电荷屏蔽时的 β 衰变率

恒星内部总的 β 衰变率，其计算时分为母核基态附近的低能区衰变率 λ_0+ 共振跃迁支配的高能区衰变率二者之和为 λ_{BGT} (文中 i,j 分别表示粒子的初态和终态)，根据文 [4] 的讨论， β 衰变率可表示为：

$$\begin{aligned}\lambda_k(\rho,T,Y_l) \approx\ & \ln 2\frac{2J_0+1}{G(Z,A,T)}\exp[-E_{\mathrm{peak}}/k_BT]\times\frac{1}{ft_{\mathrm{eff}}\xi(\rho,T,Y_e,E_{\mathrm{peak}}+Q_{00})}+\\ & \ln 2\exp\left[-\frac{E_{\mathrm{BGT}(0)}}{k_BT}\right]\frac{G(Z+1,A,T)}{G(Z,X,T)}\times\frac{\xi(\rho,T,Y_e,Q_{00}+E_{\mathrm{BGT}(0)})}{f_{t_0\rightarrow\mathrm{BGTR}(0)}}\,,\end{aligned}\tag{1}$$

式中 J_0 为母核的初态角动量， $G(Z,A,T)$ 是核配分函数：

$$G(Z,A,T)\approx(2J_0+1)+\int_0^\infty \mathrm{d}E\int_{j,\pi}\mathrm{d}J\mathrm{d}\pi(2J+1)\times\rho(E,J,\pi)\exp[-E/k_BT]\,,\tag{2}$$

$\rho(E,J,\pi)$ 为标准密度公式：

$$\rho(E,J,\pi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\frac{\sqrt{\pi}}{12a^{1/4}}\times\frac{\exp[2\sqrt{a(E-\sigma)}]}{(E-\sigma)^3}f(E,J,\pi)\,,\tag{3}$$

$$f(E,J,\pi)=\frac{1}{2}\frac{2J+1}{2\sigma^2}\exp\left[-\frac{J(J+1)}{2\sigma^2}\right]\,,\tag{4}$$

其中 $\sigma=(2m_uAR^2/5h^2)^{1/2}[E-\sigma/a]^{1/4}$, σ 是标准密度参数， R 是半径，是原子物质单位．当温度范围 $0.3\sim0.8\,\mathrm{Mev}$, 并且电子的化学势能在 $0.5\sim8\,\mathrm{Mev}$ 范围内时， E_{peak} 估算为：

$$E_{\mathrm{peak}}\approx E^0_{\mathrm{peak}}+\delta(T,\mu_e),\quad E^0_{\mathrm{peak}}=5T-Q_{00}+\mu_e\,,\tag{5}$$

μ_e 为电子的平均分子量， δ 函数为能量守恒． $\delta(T,\mu_e)$ 又可表示为：

$$\delta(T,\mu_e)=-0.6604+0.9429T-0.012119\mu_e-0.9432T\mu_e-0.0009524\mu_e^2+0.06224T\mu_e^2\,,\tag{6}$$

$f_{t_{ij}}$ 是连接 i 和 j 的比值，包含 GT 跃迁矩阵，表示为：

$$\frac{1}{f_{t_{ij}}}=\frac{|M_{ij}|^2}{10^{3.596}}\,,\tag{7}$$

M_{ij} 是 GT 跃迁矩阵元，其中：

$$f_{t_{\rm eff}} = 0.606 \times 10^4, \quad f_{t_0 \to {\rm BGETR}(0)} = \frac{10^{-3.596}}{|M_{{\rm BGT}(0)}|^2}\,, \tag{8}$$

$\xi(\rho, T, T_e, Q_{ij})$ 是 β 衰变的相空间积分，表示为 [5]:

$$\xi(\rho, T, T_e, Q_{00}) = \frac{c^3}{(m_e c^2)\int_1^{Q_{00}} dp p^2 (Q_{00} - E_e)^2} \times \frac{F(Z+1, E_e)}{1 + \exp[(E_e - u_e)/k_B T]}\,, \tag{9}$$

这里 dp 是单位能量间状态数， m_e 为电子静止质量. 令 $G(Z+1, E_e) = F(Z+1, E_e)p/E_e$ (9) 式可进一步表示为：

$$\xi(\rho, T, T_e, Q_{00}) = \frac{c^3}{(m_e c^2)\int_1^{Q_{00}} dE_e E_e^2 (Q_{00} - E_e)^2} \times \frac{G(Z+1, E_e)}{1 + \exp[(E_e - u_e)/k_B T]} \tag{10}$$

式中 $k_B T$ 为电子的热运动能量，本文单位制为 $0.1688 T_9$ (T_9 是以 10^9 k 为单位的温度). u_e 为电子的化学势，其值满足下式 [10]:

$$\rho/\mu_e = 1/(\pi^2 N_A \lambda_e^3) \int_0^\infty \{\frac{1}{1 + \exp[(E_e - u_e)/k_B T]} - \frac{1}{1 + \exp[(E_e + u_e + 2)/k_B T]}\} p^2 {\rm d}p \tag{11}$$

3 强电荷屏蔽下的 β 衰变率

当电子的 Fermi 能远大于电子的平均库仑能时，电子的分布几乎是均匀的. 这时电子对核的屏蔽为强屏蔽，通常取其条件： $\eta_e > 10^2 3Z^3$, η_e 为电子气体的数密度. 在天体物理中大多数兼并电子气体满足这个条件： $\rho/\mu_e > 5 \times 10^3\,{\rm mol/cm^3}$. 在强屏蔽下，一个 $Wenger - seiz$ 离子球总的屏蔽势为 [10]: $1.764 \times 10^{-5} Z^{5/3} (\rho/\mu_e)^{1/3}$ Mev, 故对某一核而言，平均每个电子的屏蔽势为：

$$D = 1.764 \times 10^{-5} Z^{2/3} (\rho/\mu_e)^{1/3}\,{\rm Mev}\,. \tag{12}$$

当忽略屏蔽对电子波函数的影响，仅考虑电荷屏蔽对电子能量的影响，在强屏蔽下相空间因子应修正为：

$$\xi'(\rho, T, T_e, Q_{00}) = \frac{c^3}{(m_e c^2)} \int_{1+D}^{Q'_{00}} {\rm d}E'_e {\rm d}E'^2_e (Q'_{00} - E'_e)^2 \times \frac{G(Z+1, E'_e)}{1 + \exp[(E'_e - u_e)/k_B T]} \tag{13}$$

所以强屏蔽下的 β 衰变率应为：

$$\lambda'_k(\rho, T, Y_\lambda) \approx \ln 2 \frac{2J_0 + 1}{G(Z, A, T)} \exp[-E'_{\rm peak}/k_B T] \times \frac{1}{f t_{\rm eff} \xi'(\rho, T, Y_e, E_{\rm peak} + Q_{00})} +$$

$$\ln 2 \exp\left[-\frac{E_{\mathrm{BGT}(0)}}{k_B T}\right] \frac{G(Z+1,A,T)}{G(Z,X,T)} \times \frac{\xi'(\rho,T,Y_e,Q_{00}+E_{\mathrm{BGT}(0)})}{f_{t_0\to \mathrm{BGTR}(0)}} = \lambda'_0 + \lambda'_{\mathrm{BGT}}\,, \tag{14}$$

这里 $E'_e = E_e + D$, $Q'_{00} = Q_{00} + D$, D 为电子的屏蔽势能. 为了便于讨论电荷屏蔽对 β 衰变率的影响，定义屏蔽因子：

$$C_1 = \lambda'_0/\lambda_0, \quad C_2 = \lambda'_{\mathrm{BGT}}/\lambda_{\mathrm{BGT}}, \quad C_3 = \lambda'_k/\lambda_k\,. \tag{15}$$

可以看出，C_1 反映电荷屏蔽对低能跃迁 β 衰变率的影响，C_2 反映电荷屏蔽对共振跃迁 β 衰变率的影响，而 C 的大小反映了电荷屏蔽对总 β 衰变率的影响程度.

4　$E_{\mathrm{BGT}(0)}$ 和 $M_{\mathrm{BGT}(0)}$ 的计算

为了计算 (1) 式，应求得 $E_{\mathrm{BGT}(0)}$ 和 $M_{\mathrm{BGT}(0)}$ 两个物理量，$E_{\mathrm{BGT}(0)}$ 为共振态的位置，$M_{\mathrm{BGT}(0)}$ 为共振点 GT 的跃迁矩阵元，采用壳层模型，$E_{\mathrm{BGT}(0)}$ 为 [4]:

$$E_{\mathrm{BGT}(0)} = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3\,, \tag{16}$$

其中 ΔE_1 为核的共振态和基态之间的单粒子轨道能量差，ΔE_2 为子核中的粒子 - 空穴排斥能，ΔE_3 为子核偶中子与偶质子的对能，ΔE_2 通常取 2 Mev, $\Delta E_3 = 12A^{-1/2}$, A 为核子数. 而 GT 跃迁矩阵元满足 [11]:

$$|M_{\mathrm{BGT}(0)}|^2 = \frac{1}{2} \times \frac{n_i^p n_f^h}{2j_f+1} |M^{sp}_{\mathrm{GT}}|^2_{if}\,, \tag{17}$$

这里 n_i^p 和 n_f^h 分别是母核初始轨道上的质子数和子核终态轨道上的空穴数，j_f 为终态轨道总角动量. $|M^{5p}_{\mathrm{GT}}|^2_{if}$ 为单粒子 GT 跃迁矩阵元的平方，表 1 给出了它的数值 [2]:

表 1　单粒子 GT 跃迁矩阵元值 $|M^{sp}_{\mathrm{GT}}|^2_{if}$

Table 1　Value of single particle GT matrix element, $|M^{sp}_{\mathrm{GT}}|^2_{if}$

j_i	j_f	
	$l+1/2$	$l-1/2$
$l+1/2$	$\dfrac{l+3/2}{l+1/2}$	$\dfrac{2l}{l+1/2}$
$l-1/2$	$\dfrac{2l+2}{l+1/2}$	$\dfrac{l-1/2}{l+1/2}$

5　电荷屏蔽对 $^{56}\mathrm{Cr}\to^{56}\mathrm{Mn}(e^{-1},v_e)$ 的影响及其结论

对于 β 衰变，实质上是一个中子由 GT 跃迁转化为一个质子的过程，对母核 ^{56}Cr 而言，最外层的 4 个中子都位于 $2p_{3/2}$ 轨道上，因此满足选择定则允许的跃迁只能是跃迁到 $2p_{3/2}$ 的质子态，而子核 ^{56}Mn 的基态最外质子壳层是 $1f_{7/2}$, 故 $E_{\mathrm{BGT}(0)}$ 为：

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{BGT}(0)} &= (\varepsilon_{2p3/2} - \varepsilon_{1f7/2})\,|_n + 2.0 + 12A^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{112.6 - 94.7}{56^{1/3}} + 2.0 + \frac{12}{\sqrt{56}}\right] \mathrm{Mev} \\ &= 16.186424\,. \end{aligned} \tag{18}$$

由 (17) 式 GT 跃迁矩阵元为:

$$|M_{BGT(0)}|^2 = \frac{1}{2} \times \frac{n_i^p n_f^h}{2j_f + 1} |M_{GT}^{sp}|_{if}^2 = \frac{1}{2} \times \frac{4 \times 6}{4} \times \frac{5}{3} = 5\,, \tag{19}$$

对反应 $^{56}\mathrm{Cr}\rightarrow{}^{56}\mathrm{Mn}(e^{-1}, v_e)$ 而言，其放出 β 粒子的最大能量值 $Q_{00} = 4.2096619$.

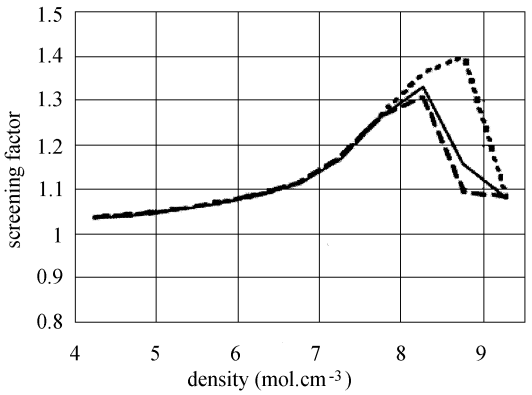

图 1 屏蔽因子 C_1 、 C_2 和 C 在同一温度下 (5×10^9 K) 随密度的变化情况 (^{56}Cr)

Fig. 1 Screening factors (C_1: solid line, C_2: dashed and C: dotted line) as a function of density at the same temperature (5×10^9 K) for (^{56}Cr)

图 1 给出了屏蔽因子 C_1 、C_2 和 C 在温度 5×10^9 k 下随密度 $\rho/\mu_e(10^4 - 10^9\,\mathrm{mol/cm^3})$ 的变化情况，其中实线、短划线和虚线分别表示 C_1 、 C_2 和 C 在同一温度下的结果. 从图中见，在低密度下，屏蔽因子趋近于 1, 即屏蔽对衰变率的影响很小，但随着密度的增加，屏蔽势越来越大，其影响使衰变率逐渐升高，就 $^{56}\mathrm{Cr}\rightarrow{}^{56}\mathrm{Mn}(e^{-1}, v_e)$ 而言，在某些温度 - 密度点上，由于屏蔽会使 β 衰变率升高近 20%, 但是在高密度下，不同温度的屏蔽因子又趋于一致，且对密度的依赖关系减小，这是由于在高密度下，电子的能量主要由其 Fermi 能决定，而与温度的关系不大. 在低密度下，总的屏蔽因子 C 与 C_1 基本一致，而在高密度下又趋近于 C_2, 这是由低能跃迁和共振跃迁的比例决定的；在低密度下，电子的 Fermi 能较低，因而低能跃迁占主导地位，所以总的屏蔽因子主要由 C_1 决定；但随着密度的增加，电子的 Fermi 能增大， GT 共振跃迁所占比例逐渐增大，甚至占绝对的主导地位，故在高密度下，总的屏蔽因子 C 又逐渐趋近于 C_2 的值.

图 2 中实线和短划线分别表示 C 在温度是 5×10^9 K 和 10×10^9 K 下随密度 $\rho/\mu_e(10^4 - 10^9\,\mathrm{mol/cm^3})$ 的变化情况. 可以看出，在低温度下，屏蔽势的作用比较明显，但在温度很

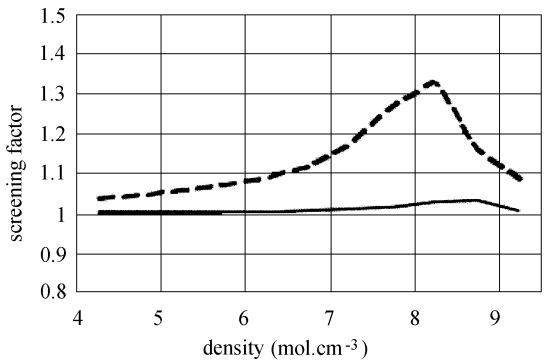

图 2　屏蔽因子 C 在不同温度下随密度的变化情况 (^{56}Cr).

Fig. 2　Screening factor(C)as a function of density at the different temperatures: solid line 5×10^9 K, dashed line 10×10^9 K

高的情况下，屏蔽势的作用反而减小. 这是不难理解的，由于温度越高，电子的平均能量越大，屏蔽势就相对降低；且在密度很低和很高的情况下，屏蔽因子都趋近于 1 的，这和图 1 中的情况是一致的.

通过上面的分析可以看出，电荷屏蔽对 β 衰变率的影响是明显的，特别是较低的温度和在一定的密度点上. 当然，其影响程度还与具体的核有关系，原则上，同样的方法可以求得每个核反应的屏蔽因子，并估计出其影响程度. 所以在较为精确讨论 β 衰变对恒星演化的影响时，考虑电荷屏蔽的影响是必需的.

参 考 文 献

1　Fuller G M, Fowler W A, Newman M J. ApJ, 1982, 252: 715
2　Fuller G M, Fowler W A, Newman M J. ApJS, 1980, 42: 447
3　Fuller G M, Fowler W A, Newman M J. ApJS, 1982, 48: 279
4　Aufderheide M B, Fushiki I, Woosley E, et al. ApJS, 1994, 91: 389
5　Kar K, Ray A, Sarkar S. ApJ, 1994, 434: 662
6　Luo Zhi-quan, Peng Qiu-he. AcASn, 1997, 38(1): 42 (罗志全，彭秋和. 天文学报， 1997, 38(1): 42)
7　Heger A, Woosley E. ApJ, 2001, 560: 307
8　Itoh N, Tomizawa N. ApJ, 2002, 579: 380
9　白希祥. 原子核物理评论. 2003, 20(1): 11
10　罗志全，彭秋和. 中国科学 (A 辑), 1996, 26(7): 665
11　Aufderheide M B, Brown G E, Kuot T S, et al. ApJ, 1990, 362: 241

The Influence of Electron Screening on β-Decay Rate in Stellar Interior

SUN Qing-qiang[1] HUANG Zeng-guang[1] PIAO Hong-guang[1] LUO Zhi-quan[2]
(1 *Department of Maths and Physics, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang* 222005)
(3 *Institute of Physics and Electronic Information, China West Normal University, Nanchong* 637002)

Abstract Aiming at the low-energy reaction and Gamow-Teller resonant transition, the influence of electron screening on the β-decay rate in stellar interior is investigated in this paper. As an example, the effects of the screening on β-decay by ^{56}Cr is calculated in particular. It is shown that the screening increases the β-decay rate evidently in lower temperatures and higher densities. The screening effects may importantly influence the study of stellar late stage evolution and supernova bursts.

Key words elementary particles, neutrinos, nucleosynthesis, stellar evolution