第 48 卷 第 4 期 天 文 学 报 Vol.48 No.4
2007 年 10 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Oct., 2007

地月系潮汐演化长期趋势的估计*

高 懿 萧耐园 †

(南京大学天文系 南京 2100930)

摘要 根据角动量守恒原理，计算了地月系经潮汐演化到达平衡状态时的旋转周期和地月距离. 并根据当前与平衡状态时地月系的总能量差，计算了到达平衡状态的时间. 进而估计了地月距离变化和地球自转速率变化的长期趋势.

关键词 太阳系：地球，太阳系：月亮，天体力学：潮汐理论

中图分类号： P 183; **文献标识码**： A

1 引言

自从 1695 年哈雷发现月球长期加速以来，人们应用多种方法和资料研究地月系的长期演化. 所用的资料若以时间尺度划分可大致分为 3 类：

(1) 地质时期的资料，主要是古珊瑚和双壳类等的化石，用于研究数亿年乃至十几亿年以来地球自转的长期变化 [1,2];

(2) 历史时期的资料，主要是两千年以来的古日、月食记录、古代的月掩星和行星运动等的记录，用于研究几千年或几百年来的变化 [3,4];

(3) 当代以各种测量地球自转的新技术 (包括 VLBI 、 LLR 、 SLR 和 GPS 等) 直接测量 UT1, 从而导出日长 [5].

人们应用这些资料，研究地月系潮汐演化，取得了许多成果 [6]. 这些研究主要着眼于过去的演化. 本文拟对地月系潮汐演化今后的长期趋势作大致估计.

当前月球由于长期潮汐演化已达到了一种状态，即它的自转周期与它绕地月系质心的公转周期相等，它始终以同一面朝向地球. 这种演化仍在继续之中. 由于潮汐摩擦，地球自转速率在不断减少 (导致日长变长), 摩擦消耗着地球自转的动能，同时地月距离日益增大. 地球和月球两个天体的转动动能均减少，但整个系统的势能却增加，总能量则在减少. 若把地月系看作一个孤立体系，则演化的趋势是达到 “最终的” 平衡状态. 那时，不仅月球仍继续保持它的上述状态，而地球也将达到这一状态，即地球自转周期与它绕地月系质心的公转周期相等，地球也以同一面朝向月球. 在这一平衡状态中，地球和月球绕地月系质心的公转周期与它们各自自转周期的各个值将完全相等. 不过，由于太阳系其他天体的潮汐作用，特别是太阳的影响，这种平衡状态必然瓦解，之后将向新

2006-06-20 收到原稿， 2006-12-14 收到修改稿

* 国家自然科学基金 (10133010) 资助

†nyxiao@nju.edu.cn

的方向演化. 为简化讨论, 本文将把地月系看作一个孤立体系, 从现在的状态出发, 探讨到达平衡状态时地月系的旋转周期、地月距离、经历的时间和变化趋势.

2　地月系的角动量守恒

根据文 [1] 的论证, 月球的潮汐摩擦是地球自转速率长期变慢的主要原因, 忽略地球主惯量矩变化和太阳潮汐对地球自转速率变化的贡献, 应是一个良好的近似, 何况两者的贡献在量级上相同而方向相反. 至于其他行星的潮汐影响, 即以木星而论仅太阳潮汐的 10 万分之 7, 故完全可以忽略. 这样就可以近似地把地月系看作一孤立体系.

令地球的质量和半径为 M 和 R, 月球的为 m 和 r. 当前地球自转角速度为 ω, 地月距离为 D_0, 月球 (绕地月系质心) 公转角速度为 Ω_0, 公转周期为 P_0; 当地月系到达平衡状态时地月距离为 D, 地球自转角速度, 即地月系旋转角速度, 即月球自转角速度为 Ω, 相应的周期为 P, 则有:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{P_0}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{P}\,. \tag{1}$$

根据开普勒行星运动第三定律有:

$$\frac{D^3}{P^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2} = GM\frac{1+\mu}{4\pi^2}\,, \tag{2}$$

其中 $\mu = 1/81.30$ 为月地质量比, G 为万有引力常数. 由 (2) 式得:

$$D = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}(1+\mu)P^2}\,. \tag{3}$$

地月系的全部角动量由地球自转角动量 H_1 、地球 (绕地月系质心) 公转角动量 H_2 、月球公转角动量 H_3 和月球自转角动量 H_4 构成. 顾及求有形物体转动惯量的平行轴定律容易对当前的地球和月球的旋转运动求得以下各量:

$$H_1 = \frac{2}{5}MR^2\omega\,,$$

$$H_2 = (\frac{2}{5}MR^2 + \frac{\mu^2}{(1+\mu)^2}MD_0^2)\Omega_0\,,$$

$$H_3 = (\frac{2}{5}\mu Mr^2 + \frac{\mu}{(1+\mu)^2}MD_0^2)\Omega_0\,,$$

$$H_4 = \frac{2}{5}\mu Mr^2\Omega_0\,.$$

取地球和月球绕地月系质心公转的轨道平面 (即白道面) 为参考平面. 地球赤道面与白道面之间的交角并非常量. 由于白道面相对于黄道面相当迅速地旋转 (周期 18.6 年相对于漫长的地月系演化而言是迅速的) 可看作在平均上白道面与黄道面重合 (实际上两者的交角仅 $5^\circ\,9'$). 根据角动量守恒可以写出:

$$H_1\cos\epsilon + H_2 + H_3 + H_4\cos I = H(\text{Constant})\,,$$

其中 $\epsilon = 23^\circ 26'$ 为黄赤交角的当前值， $I = 1^\circ 32'$ 为月球赤道面对于白道面的交角. 于是得:

$$\frac{2}{5}MR^2\omega\cos\epsilon + \frac{2}{5}MR^2\Omega_0 + \frac{\mu}{1+\mu}MD_0^2\Omega_0 + \frac{2}{5}(1+\cos I)\mu Mr^2\Omega_0 = H\,. \tag{4}$$

同理对于平衡时的地月系可写出:

$$\frac{2}{5}(1+\cos\epsilon)MR^2\Omega + \frac{\mu}{1+\mu}MD^2\Omega + \frac{2}{5}(1+\cos I)\mu Mr^2\Omega = H\,. \tag{5}$$

由 (4) 式可求得 H 值. 根据角动量守恒的假设把 (1) 和 (3) 式代入 (5) 式可导出下列方程:

$$\frac{4\pi}{5}(1+\cos\epsilon)MR^2P^{-1} + (2\pi)^{-1/3}\frac{\mu}{1+\mu}[GM(1+\mu)]^{2/3}MP^{-1/3} + \frac{4\pi}{5}(1+\cos I)\mu Mr^2P^{-1} = H\,. \tag{6}$$

上式中令各项系数:

$$a = \frac{4\pi}{5}(1+\cos\epsilon)MR^2\,,$$

$$b = (2\pi)^{-1/3}(GM)^{2/3}(1+\mu)^{-1/3}\mu M\,,$$

$$c = \frac{4\pi}{5}(1+\cos I)\mu Mr^2\,.$$

以上各式代入 (6) 式化得如下关于周期 P 的一元四次方程:

$$b^3P^4 - H^3P^3 + 3H^2(a+c)P^2 - 3H(a+c)^2P + (a+c)^3 = 0$$

将相关的数值代入计算化得如下标准形式的一元四次数值方程，式中 P 的单位为天:

$$P^4 - 51.3582P^3 + 59.0948P^2 - 22.6656P + 2.8978 = 0\,,$$

解此一元四次方程得:

$$P = 50.19\,\mathrm{d}\,. \tag{7}$$

这是当地月系达到平衡状态时地球自转、地球公转、月球公转和月球自转的共同周期. 将解得的 P 代入 (3) 得:

$$D = 5.771\times10^5\,\mathrm{km} \tag{8}$$

这是当地月系达到平衡状态时地球和月球两个天体之间的距离.

3 耗散能量的计算

达到平衡位置时地月系的总能量即动能 (主要是转动动能) 与势能之和比当前地月系的总能量要小. 如上所述这是由于地球自转动能因潮汐摩擦而耗散的结果.

为简化计算，取参考系中心为地球质心，对于地球的自转轴，由于角动量守恒有:

$$I_E\omega + \mu MD^2\Omega = C\,, \tag{9}$$

式中： I_E 是地球的转动惯量， Ω 是月球绕地球公转的角速度， (9) 式对时间 t 求导得：

$$I_E\dot{\omega}+\mu M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D^2\Omega)=0\,. \tag{10}$$

月球绕地球作圆周运动，由于离心力与引力平衡，得：

$$G\frac{\mu M^2}{D^2}=\mu MD\Omega^2 \tag{11}$$

即：

$$\Omega=[\frac{GM(1+\mu)}{D^3}]^{1/2}\,. \tag{12}$$

(12) 式代入 (10) 式得：

$$I_E\dot{\omega}+\mu M\sqrt{GM}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D^{1/2})=0\,,$$

即：

$$\frac{1}{2}D^{-1/2}\dot{D}=-\frac{I_E\dot{\omega}}{\mu M\sqrt{GM}}\,,$$

所以：

$$\dot{D}=-\frac{2\sqrt{D}I_E\dot{\omega}}{\mu M\sqrt{GM}} \tag{13}$$

它表明 $\dot{\omega}$ 减少将导致 D 增大.

总能量 E 包括地球自转动能、月球自转动能、月球绕地月系质心转动的动能以及引力势能，为：

$$E=\frac{1}{2}I_E\omega^2+\frac{1}{2}I_m\Omega^2+\frac{1}{2}\mu MD^2\Omega^2-G\frac{\mu M^2}{D}\,.$$

但是由于月球的质量与自转速度较地球小很多，所以月球自转动能比地球小数个量级，可在本模型中忽略，公式最终改写为：

$$E=\frac{1}{2}I_E\omega^2+\frac{1}{2}\mu MD^2\Omega^2-G\frac{\mu M^2}{D}\,. \tag{14}$$

(12) 式代入 (14) 式，可得：

$$E=\frac{1}{2}I_E\omega^2-G\frac{\mu M^2}{2D}\,. \tag{15}$$

机械能 E 随时间 t 的变化率为：

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=I_E\omega\dot{\omega}+G\frac{\mu M^2}{2D^2}\dot{D}\,,$$

把 $\dot{\omega}$ 代入得：

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{M}{2}\left[G\frac{\mu M}{D^2}-\omega\sqrt{G\frac{M}{D}}\right]\dot{D} \tag{16}$$

由 (1) 式， $\Omega=1.4489\times10^{-6}\mathrm{s}^{-1}=1.2518\times10^{-1}\mathrm{d}^{-1}$

令 ΔE 为当前至平衡状态地月系耗散的能量， E 为平衡状态地月系的能量， E_0 为当前地月系的能量，则有：

$$\Delta E = E - E_0 = (\frac{1}{2}I_E\Omega^2 - \frac{1}{2}I_E\omega^2) - (G\frac{\mu M^2}{2D^2} - G\frac{\mu M^2}{2D_0^2}) + (\frac{1}{2}\mu MV^2 - \frac{1}{2}\mu MV_0^2) = -2.5801\times 10^{29}\mathrm{J}\,, \tag{17}$$

式中 V 是平衡状态时月球绕地球公转速度， V_0 是当前情况下月球绕地球公转速度，即到平衡位置总共要损耗 $-2.5801\times 10^{29}J$ 的能量.

4 到达平衡状态的时间的估计

由以上所求得的能量差与能量耗散率的研究，我们可以对到达平衡状态所需要的时间做一个基本的估算.

由前面推导，我们可以建立以下数学模型，因为：

$$\dot{D} = -\frac{2\sqrt{D}I_E\dot{\omega}}{\mu M\sqrt{GM}} \tag{18}$$

在一级近似中取 $\dot{\omega}$ 为常量，应用文 [1] 所给的值，取 $\dot{\omega} = -6.145\times 10^{-22}\mathrm{rads}^{-2}$ 可以得到：

$$-\frac{2I_E\dot{\omega}}{\mu M\sqrt{GM}} = A = 2.193\times 10^{-10}$$

可得：

$$\dot{D} = AD^{1/2}(t=0, D=D_0)\,. \tag{19}$$

积分 (19) 式得：

$$D^{1/2} = \frac{1}{2}At + C\,,$$

其中 $C = \sqrt{D_0} = 1.961\times 10^4$.

综上，可以得出表达式：

$$\sqrt{D} = 2.193\times 10^{-10}t + 1.961\times 10^4 \tag{20}$$

代入 (16) 式，对该式积分：

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \Delta E\,, \tag{21}$$

其中 ΔE 即前面所求的能量差， $\Delta E = -2.5801\times 10^{29}\,\mathrm{J}$, T 为从现在到达平衡位置所用的时间.

把前面数值代入，用计算机迭代进行求解，可得 $T \cong 2.1760\times 10^{17}\,\mathrm{s} = 6.8956\times 10^9$ 年.

5　地球自转速率变化趋势的估计

地月距离在日渐增大，我们将对其变化趋势作一估计，并由 (13) 式估计地球自转速率的变化趋势.

根据文 [1] 的计算和 30 余年来激光测月的结果, 地月距离的增加速率可取为 $4\,\mathrm{cm/yr}$. 当前的地月距离为 $384400\,\mathrm{km}$, 由 (8) 式易得由当前至平衡状态距离之增量为：

$$\Delta D = 5.7710\times 10^5 - 3.844\times 10^5 = 1.927\times 10^5\,\mathrm{km} \tag{22}$$

作两种 “极端” 情况的估计：

(1) 假设地月距离以当前的增速匀速增大，则增大 ΔD 所需的时间为 $T_1 = 4.8175\times 10^9\,\mathrm{yr}$.

(2) 假设地月距离从当前的增速出发, 以匀减速增大, 则增大 ΔD 所需的时间为 $T_2 = 9.6350\times 10^9\,\mathrm{yr}$.

上列第一种情况显然是不合理的. 因为不能设想地月距离的增大会在 T_1 时间之后突然停止. 第二种情况也不成立，因为本文根据能量变化算出的时间 T 在这两个极端值之间. 我们可以用一抛物拱形曲线的右半支拟合地月距离增大的速率 v, 见图 1. 图中纵坐标为 v, 以 $10^{-5}\,\mathrm{km/yr}$ 为单位；横坐标为时间，以 10^9 年为单位线. 曲线 (1) 表示地月距离匀速增大的变化趋势；曲线 (2) 表示地月距离匀减速增大的变化趋势；曲线 (3) 表示抛物拱形曲线 (右半支).

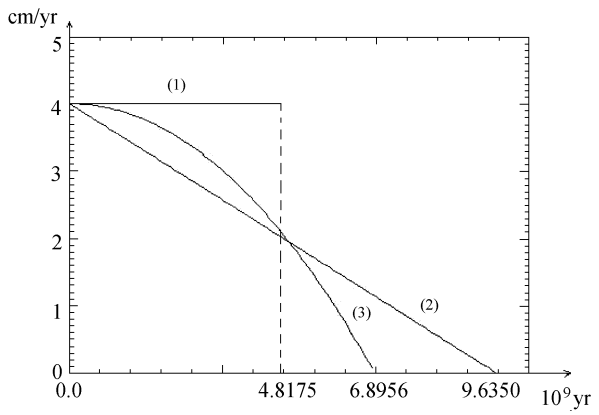

图 1　地月距离增大速率的拟合

Fig. 1　Fitting to the increasing rates of distance between the earth and the moon

距离的增加速率为 v, 设抛物拱形曲线方程为：

$$v = v_0 - \frac{v_0}{T^2}t^2\,, \tag{23}$$

其中 t 为从当前起计的时间，以 yr 为单位.

用 (23) 式拟合地月距离变化速率的可靠性可作如下检验. 图 1 中抛物线下的面积 S 是距离的增量，它应与 (22) 式的 ΔD 值相等. 积分曲线 (23) 式易得：

$$S = \frac{2}{3} v_0 T = 1.838 \times 10^5 \,\mathrm{km} \tag{24}$$

实际上，此值与 ΔD 的相对误差为 4.6%. 由此可见，本文的结果是自洽的，(23) 式不失为地月系长期变化趋势的一种估计.

通常人们在研究中取 $\dot{\omega}$ 为常数，从 (13) 式可见，$\dot{\omega}$ 和 $\dot{D}$ 与 (23) 式的 v 变化有关. 本文结果表明 v 的变化十分缓慢. 很容易从 (23) 式计算 v 的当前值变化到 90% 为 2.18×10^9 yr. 因此作为常数处理是合理的.

参 考 文 献

1 Gao Bu-xi. ChA&A, 2006, 30(1):111

2 GAO Bu-xi. AcASn, 2005, 46(3): 331 (高布锡. 天文学报, 2005, 46(3): 331)

3 Munk W H, MacDonald G J F. The Rotation of the Earth. New York: Cambridge University Press, 1960

4 Lambeck K. The Earth's Variable Rotation: Geophysical Causes and Consequences. New York: Cambridge University Press, 1980

5 高布锡. 天文地球动力学原理，北京：科学出版社, 1997

6 Morrison L V, Stephenson F R. Observations of sucular and decade changes in the Earth ' s rotation. In Earth Rotation: Solved and unsolved Problems, edited by Anny Cazenave, D Reidel Publishing Company, 1986

An Estimation on the Long-period Tendency of the Tidal Evolution of the Earth-lunar System

GAO Yi XIAO Nai-yuan

(*Department of Astronomy, Nanjing University, Nanjing* 210093)

Abstract The revolution period and the distance between the earth and the moon in the equilibrium state after tidal evolution of the earth-lunar system are calculated according to the principle of angular momentum conservation in this paper. The time for reaching to the equilibrium state is also computed on the basis of the difference between total energy of the earth-lunar system in present time and that in the equilibrium state. The long-period tendency of the variation of distance between the earth and the moon and that of the variation of the earth rotation rate are furthermore estimated.

Key words Solar System: Earth, Solar System: Moon, Celestial Mechanics: Tidal Theory