第 48 卷 第 4 期 天 文 学 报 Vol.48 No.4
2007 年 10 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Oct., 2007

形变地球对不同驱动力的响应*

张捍卫 [1,2†] 铁琼仙 [2] 杨 磊 [2]

(1 河南理工大学测绘与国土信息工程学院 河南焦作 454003)
(2 中国科学院国家天文台 / 云南天文台 昆明 650011)

摘要 地球形变位移场和重力场的时空变化无论在基础理论研究，还是在地理空间信息建设中都具有重要的意义. 地球在各种力学机制的作用下产生了形变，形变又导致地球引力位的变化，即形变附加位或 Euler 引力位增量. 基于矢量球函数的基本理论，讨论了引潮力、负载力和地表应力对地球形变和引力位增量的影响，给出了均匀不可压缩地球模型的 Euler 引力位增量的具体表达式和 Love 数的理论关系. 可为地球形变的理论研究提供参考和依据.

关键词 太阳系：地球，物理数据与过程：引力
中图分类号： P 183; **文献标识码**： A

1 引言

根据高精度的人造地球卫星轨道摄动的数据分析表明 [1], 地球重力场是随时间变化的，它既有周期性的成分也有非周期性的成分. 引起地球重力场变化的原因主要包括日月引潮力、地球自转离心力、负载力 (大气负载、海洋负载、地形负载 (降雨降雪、冰期后反弹和高山负载) 和 (核幔耦合等)), 以及地球表面和内部边界应力 (大气压力、风产生的应力、地震应力和地球动力学参数的变化) 等 [2]. 文 [3] 在理论上研究了形变天体引力场的时空变化，给出了引力场增量方程的特解，对于球对称地球模型研究了地球引力场对内外体力和应力的响应，给出了形变地球的位和位移 Love 数之间的理论关系. 许厚泽 [4,5] 和李国营 [6,7] 利用扰动位展开法建立了较完善的横向不均匀、各向异性非旋转球形地球模型的潮汐模拟理论，其工作受到了国际上的重视. 文 [8-10] 分析了中国大陆部分地区的重复重力测量资料，表明重力变化具有明显的区域性特征，并指出开采地下流体造成的大面积地面沉降，大面积山区继承性、同步性的构造运动和地震活动等可能是造成地表重力趋势性变化的主要原因.

本文在前人工作的基础上，总结归纳了引潮力、负载力和地表应力对地球形变的影响. 并基于矢量球函数理论和 Love-shida 原理，采用文 [3] 的理论方法，讨论了形变位移对地球引力位增量的影响. 研究表明地球潮汐形变和负载形变只有球形场位移，没有环

2006-05-29 收到原稿， 2006-09-05 收到修改稿
* 云南省自然科学基金 (2005A0010R) 资助项目
† zhanwei800@163.com

形场位移. 而地表应力产生的形变既有球形场位移又有环形场位移. 同时得出了均匀不可压缩地球的位 Love 数和位移 Love 数的理论关系式, 对于负荷 Love 数来说也具有同样的关系. 本文工作可为地球形变的理论研究提供参考和依据.

2 引潮力位、负载位和地表应力

在地球内部或外部任意一点 $\boldsymbol{X}(R,\Theta,\Lambda)$ (R 、 Θ 和 Λ 是该点的地心距、余纬和经度) 的引潮力位, 由于地球质量分布的不连续性在地球表面 $\partial\Omega_X = S^2_{R+}$ 和地球内部边界 $\partial\Omega_\mu = S^2_{R\mu}$ 上的质量收缩引起的负载力位分别是 [3,11,12]:

$$\begin{aligned} V_T(R,\Theta,\Lambda,t) &= \left(\frac{R}{R^+}\right)^l \left(v^c_{lmn}\cos\omega^{lmn}t + v^s_{lmn}\sin\omega^{lmn}t\right) Y^{lm}(\Theta,\Lambda) = \\ &\left(\frac{R}{R^+}\right)^l v_{lm}(\omega,t)Y^{lm}(\Theta,\Lambda)\,, \quad R<R^+\,, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} V^{(1)}_L(R,\Theta,\Lambda,t) &= v'_{lm}(s)Y^{lm}(\Theta,\Lambda) = \\ &\begin{cases} \dfrac{4\pi(R^+)^2}{2l+1}\dfrac{(R^+)^l}{R^{l+1}}G\rho(R^+)\xi^{lm}(R^+,t)Y^{lm}(\Theta,\Lambda) & R>R^+ \\ \dfrac{4\pi(R^+)^2}{2l+1}\dfrac{R^l}{(R^+)^{l+1}}G\rho(R^+)\xi^{lm}(R^+,t)Y^{lm}(\Theta,\Lambda) & R<R^+ \end{cases}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} V^{(2)}_L(R,\Theta,\Lambda,t) &= v'_{lm}(s)Y^{lm}(\Theta,\Lambda) = \\ &\begin{cases} \dfrac{4\pi(R_\mu)^2}{2l+1}\dfrac{(R_\mu)^l}{R^{l+1}}G\rho(R_\mu)\xi^{lm}(R_\mu,t)Y^{lm}(\Theta,\Lambda) & R>R_\mu \\ \dfrac{4\pi(R_\mu)^2}{2l+1}\dfrac{R^l}{(R_\mu)^{l+1}}G\rho(R_\mu)\xi^{lm}(R_\mu,t)Y^{lm}(\Theta,\Lambda) & R<R_\mu \end{cases}. \end{aligned} \tag{3}$$

这里 $l\in\{0,1,2,\cdots,\infty\}$, $m\in\{-l,-l+1,\cdots,-1,0,1,\cdots l-1,l\}$, ω^{lmn} 是潮波角频率, v^c_{lmn} 、 v^s_{lmn} 是潮波展开的常系数 (单位是 m^2s^{-2}), R^+ 、 R_μ 、 G 和 ρ 分别是地球的平均球体半径、内部边界的平均半径、万有引力常数和质量体密度, $\xi^{lm}(R^+,t)$ 是地面负载质量点相对地面高度的球面调和展开的系数 (以米为单位), $\xi^{lm}(R_\mu,t)$ 意义相同, $Y^{lm}(\Theta,\Lambda)$ 是球面调和函数, 公式中指标相同表示求和.

地球除了受到引潮力和负载力的作用外, 还存在应力的影响. 地球表面应力的矢量球面调和函数的展开式是 [3,12]:

$$\boldsymbol{t}_{(n)} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n} = s^{\rm surface}_{lm}(R^+,t)\boldsymbol{S}^{lm}(\Theta,\Lambda) + t^{\rm surface}_{lm}(R^+,t)\boldsymbol{T}^{lm}(\Theta,\Lambda)\,, \tag{4}$$

这里 $\hat{n}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 分别是地球表面的法向单位矢量和地表的应力张量.

3 球对称地球的形变位移

根据 Love-Shida 原理, 在球对称地球模型下, 引潮力位和负载力引起的形变位移场的径向和横向分量分别是 [13,14]:

$$\begin{cases} u_R(\boldsymbol{X},t)=\Delta R=\left(\frac{R}{R^+}\right)^l h_l(R,\omega)\frac{1}{g_0}v_{lm}Y^{lm}(\Theta,\Lambda) \\ u_\Theta(\boldsymbol{X},t)=R\cdot\Delta\Theta=\left(\dfrac{R}{R^+}\right)^l l_l(R,\omega)\dfrac{1}{g_0}v_{lm}\dfrac{\partial}{\partial\Theta}Y^{lm}(\Theta,\Lambda) \\ u_\Lambda(\boldsymbol{X},t)=R\cdot\Delta\Lambda\sin\Theta=\left(\dfrac{R}{R^+}\right)^l l_l(R,\omega)\dfrac{1}{g_0\sin\Theta}v_{lm}\dfrac{\partial}{\partial\Lambda}Y^{lm}(\Theta,\Lambda) \end{cases}, \tag{5}$$

$$\begin{cases} u_R(\boldsymbol{X},t)=\Delta R=h'_l(R,s)\dfrac{1}{g_0}v'_{lm}(s)Y^{lm}(\Theta,\Lambda) \\ u_\Theta(\mathrm{X},t)=R\cdot\Delta\Theta=l'_l(R,s)\dfrac{1}{g_0}v'_{lm}(s)\dfrac{\partial}{\partial\Theta}Y^{lm}(\Theta,\Lambda) \\ u_\Lambda(\boldsymbol{X},t)=R\cdot\Delta\Lambda\sin\Theta=l'_l(R,s)\dfrac{1}{g_0\sin\Theta}v'_{lm}(s)\dfrac{\partial}{\partial\Lambda}Y^{lm}(\Theta,\Lambda) \end{cases}. \tag{6}$$

这里 $h_l(R,\omega)$, $l_l(R,\omega)$ 称为潮汐位移 Love 数， $h'_l(R,s)$, $l'_l(R,s)$ 是负载位移 Love 数， g_0 是地球表面的平均重力值.

地表应力球形场和环形场引起的位移表达式为 [3,12]:

$$\begin{cases} u_R(\boldsymbol{X},t)=\Delta R=h''_l\dfrac{(R^+)^3}{g_0M}s^{\mathrm{surface}}_{lm}\dfrac{1}{\sqrt{l(l+1)}}Y^{lm}(\Theta,\Lambda) \\ u_\Theta(\boldsymbol{X},t)=R\cdot\Delta\Theta=l''_l\dfrac{(R^+)^3}{g_0M}s^{\mathrm{surface}}_{lm}\dfrac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\dfrac{\partial}{\partial\Theta}Y^{lm}(\Theta,\Lambda) \\ u_\Lambda(\boldsymbol{X},t)=R\cdot\Delta\Lambda\cdot\sin\Theta=l''_l\dfrac{(R^+)^3}{g_0M}s^{\mathrm{surface}}_{lm}\dfrac{1}{\sqrt{l(l+1)}\sin\Theta}\dfrac{\partial}{\partial\Lambda}Y^{lm}(\Theta,\Lambda) \end{cases}, \tag{7}$$

$$\begin{cases} u_R(\boldsymbol{X},t)=\Delta R=0 \\ u_\Theta(\boldsymbol{X},t)=R\cdot\Delta\Theta=l'''_l\dfrac{(R^+)^3}{g_0M}t^{\mathrm{surface}}_{lm}\dfrac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\dfrac{\partial}{\sin\Theta\partial\Lambda}Y^{lm}(\Theta,\Lambda) \\ u_\Lambda(\boldsymbol{X},t)=R\cdot\Delta\Lambda\cdot\sin\Theta=-l'''_l\dfrac{(R^+)^3}{g_0M}t^{\mathrm{surface}}_{lm}\dfrac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\dfrac{\partial}{\partial\Theta}Y^{lm}(\Theta,\Lambda) \end{cases}. \tag{8}$$

这里 h''_l, l''_l 和 h'''_l, l'''_l 是地表应力位移 Love 数， M 是地球质量.

4　潮汐形变位移的矢量球函数展开式

根据文 [3,14-16], 地球潮汐位移矢量的表达式为：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)=r^{lm}(R,t)\boldsymbol{R}_{lm}(\Theta,\Lambda)+s^{lm}(R,t)\boldsymbol{S}_{lm}(\Theta,\Lambda)+t^{lm}(R,t)\boldsymbol{T}_{lm}(\Theta,\Lambda). \tag{9}$$

同时，位移矢量在球坐标系下的表达式是：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t) &= u_R\hat{e}_R+u_\Theta\hat{e}_\Theta+u_\Lambda\hat{e}_\Lambda= \\ & r^{lm}Y^{lm}\hat{e}_R+\left[s^{lm}\frac{\partial Y^{lm}}{\partial\Theta}+t^{lm}\frac{\partial Y^{lm}}{\sin\Theta\partial\Lambda}\right]\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\hat{e}_\Theta+ \end{aligned}$$

$$\left[-t^{lm}\frac{\partial Y^{lm}}{\partial\Theta}+s^{lm}\frac{\partial Y^{lm}}{\sin\Theta\partial\Lambda}\right]\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\hat{e}_\Lambda\,. \tag{10}$$

这里 $\hat{e}_R$ 、 $\hat{e}_\Theta$ 和 $\hat{e}_\Lambda$ 分别是径向、余纬和经度方向的单位矢量. 分别对 (10) 式与 (5)—(8) 式进行比较可得到 (9) 式矢量球函数展开式中的系数. 对于引潮力：

$$\begin{cases} r^{lm}(R,\omega)=(R/R^+)^l h_l(R,\omega)(g_0)^{-1}v_{lm}(\omega)\\ s^{lm}(R,\omega)=(R/R^+)^l l_l(R,\omega)\sqrt{l(l+1)}(g_0)^{-1}v_{lm}(\omega)\\ t^{lm}(R,\omega)=0 \end{cases}. \tag{11}$$

对于负载力：

$$\begin{cases} r^{lm}(R,s)=h'_l(R,s)(g_0)^{-1}v'_{lm}(s)\\ s^{lm}(R,s)=l'_l(R,s)\sqrt{l(l+1)}(g_0)^{-1}v'_{lm}(s)\\ t^{lm}(R,s)=0 \end{cases}. \tag{12}$$

对于地表应力的球形场和环形场分别有：

$$\begin{cases} r^{lm}=h''_l\dfrac{(R^+)^3}{g_0M}\dfrac{s^{\rm surface}_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}}\\ s^{lm}=l''_l\dfrac{(R^+)^3}{g_0M}s^{\rm surface}_{lm}\\ t^{lm}=0 \end{cases},\qquad \begin{cases} r^{lm}=0\\ s^{lm}=0\\ t^{lm}=l'''_l\dfrac{(R^+)^3}{g_0M}t^{\rm surface}_{lm} \end{cases}. \tag{13}$$

其中在 (11)—(13) 式中隐含了时间变量 t, 注意这里不对重复指标求和. 同时看到在 Love-shida 假定下, 地球潮汐形变和负载形变只有球形场位移, 而没有环形场位移. 地表应力产生的形变既有球形场位移又有环形场位移.

5 质量均匀且不可压缩形变地球的 Euler 引力位增量

形变地球在地球内部或外部任意一点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(r,\theta,\lambda)$ (r 、 θ 和 λ 是该点的地心距、余纬和经度) 的 Euler 引力位增量是 [3]:

$$\begin{aligned}\phi_1^E(\boldsymbol{x},t) &= \phi_1^E(\boldsymbol{x},t)_1+\phi_1^E(\boldsymbol{x},t)_2+\phi_1^E(\boldsymbol{x},t)_3+\phi_1^E(\boldsymbol{x},t)_4=\\ &\quad G(R_{pq}+S_{pq}+T_{pq})\left(\frac{R^+}{r}\right)^{p+1}Y^{pq}(\theta,\lambda)\,,\end{aligned} \tag{14}$$

$$R_{pq}=R^1_{pq}+R^2_{pq}+R^3_{pq}+\sum_\mu R^4_{\mu pq}\,,S_{pq}=S^1_{pq}+S^2_{pq}\,,T_{pq}=T^2_{pq}\,, \tag{15}$$

其中 $p\in\{0,1,2,\cdots,\infty\}$, $q\in\{-p,-p+1,\cdots,-1,0,1,\cdots p-1,p\}$. 假定地球初始密度是均匀的, 即 $\rho(\boldsymbol{X},t_0)=\rho_0$, 则

$$R^2_{pq}=0,\quad S^2_{pq}=0,\quad T^2_{pq}=0,\quad R^4_{\mu pq}=0\,. \tag{16}$$

假定地球是不可压缩的，则

$$R^1_{pq} + S^1_{pq} = 0\,. \tag{17}$$

这样形变地球的 Euler 引力位增量是 [3]:

$$\phi^E_1(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} \dfrac{4\pi G\rho_0 R^+}{2p+1}\left(\dfrac{R^+}{r}\right)^{p+1} r^{pq}(R^+,t)Y^{pq}(\theta,\lambda) & r > R^+ \\ \dfrac{4\pi G\rho_0 R^+}{2p+1}\left(\dfrac{r}{R^+}\right)^{p} r^{pq}(R^+,t)Y^{pq}(\theta,\lambda) & r \le R^+ \end{cases}. \tag{18}$$

5.1 引潮力位引起的 Euler 引力位增量

引潮力引起的形变位移通过 (11) 式表示. 考虑到 (18) 式，则只是用了 (11) 式的第一式，即

$$\begin{aligned} r^{pq}(R^+,\omega) &= h_p(R^+,\omega)\frac{1}{g_0}v_{pq}(\omega) = h_p(R^+,\omega)\frac{1}{GM/(R^+)^2}v_{pq}(\omega) = \\ & h_p(R^+,\omega)\frac{3v_{pq}(\omega)}{4\pi G\rho_0 R^+}\,. \end{aligned} \tag{19}$$

把 (19) 式代入 (18) 式后，可得

$$\phi^E_1(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} \dfrac{3}{2p+1}\left(\dfrac{R^+}{r}\right)^{p+1} h_p(R^+,\omega)v_{pq}(\omega)Y^{pq}(\theta,\lambda) & r > R^+ \\ \dfrac{3}{2p+1}\left(\dfrac{r}{R^+}\right)^{p} h_p(R^+,\omega)v_{pq}(\omega)Y^{pq}(\theta,\lambda) & r \le R^+ \end{cases}. \tag{20}$$

根据 Dirichlet 原理，引潮力位 (1) 式在地球外部和内部引起的形变附加位是 [17]:

$$\phi^E_1(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} \left(\dfrac{R^+}{r}\right)^{2p+1} k_p(R^+,\omega)V_{Tpq}(r,\theta,\lambda,\omega) & r > R^+ \\ k_p(R^+,\omega)\times V_{Tpq}(r,\theta,\lambda,\omega) & r \le R^+ \end{cases}. \tag{21}$$

把 (1) 式代入上式，可得

$$\phi^E_1(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} \left(\dfrac{R^+}{r}\right)^{p+1} k_p(R^+,\omega)v_{pq}(\omega)Y^{pq}(\theta,\lambda) & r > R^+ \\ \left(\dfrac{r}{R^+}\right)^{p} k_p(R^+,\omega)v_{pq}(\omega)Y^{pq}(\theta,\lambda) & r \le R^+ \end{cases}. \tag{22}$$

比较 (20) 和 (22) 式，可得

$$k_p(R^+,\omega) = \frac{3}{2p+1}h_p(R^+,\omega)\,. \tag{23}$$

这就是密度均匀且不可压缩理想弹性形变地球的位 Love 数与位移 Love 数的关系.

5.2 地球应力引起的 Euler 引力位增量

地表应力引起的形变位移通过 (13) 式表示. 考虑到 (18) 式，则只是用了 (13) 式两式的第一式，即

$$r^{lm} = h_l'' \frac{(R^+)^3}{g_0 M} \frac{s_{lm}^{\rm surface}}{\sqrt{l(l+1)}} = h_l'' \frac{3}{4\pi \times g_0 \rho_0} \frac{s_{lm}^{\rm surface}}{\sqrt{l(l+1)}}\,, \tag{24}$$

代入 (18) 式后，得到

$$\phi_1^E(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} \dfrac{3GR^+}{2p+1}\left(\dfrac{R^+}{r}\right)^{p+1} \dfrac{1}{g_0} h_p'' \dfrac{s_{lm}^{\rm surface}}{\sqrt{p(p+1)}} Y^{pq}(\theta,\lambda) & r > R^+ \\ \dfrac{3GR^+}{2p+1}\left(\dfrac{r}{R^+}\right)^{p} \dfrac{1}{g_0} h_p'' \dfrac{s_{lm}^{\rm surface}}{\sqrt{p(p+1)}} Y^{pq}(\theta,\lambda) & r \le R^+ \end{cases}. \tag{25}$$

6 讨论和结论

在 (14) 式中，如果令 $p=1$, 则 Euler 引力位增量表示的是地球的质心运动，如果地球是球对称的，则这一项为零. 实际上，引潮力和引潮力位展开是从 $p \ge 2$ 开始的，不存在一阶项的 Euler 引力位增量，负载力和负载应力引起的零阶项 Euler 引力位增量也是非常小. 因此，实际研究都是从非零项开始.

基于矢量球函数的形变地球位移场的展开，在 Love-shida 假定下，地球潮汐形变和负载形变只有球形场位移，没有环形场位移. 而地表应力产生的形变既有球形场位移又有和环形场位移.

均匀不可压缩地球的 Euler 引力位增量由 (18) 式给出，其中引潮力引起的引力位增量由 (20) 式给出，负载力引起的引力位增量在此没有列出，但其形式与 (20) 式完全一样，只是用 $h_p'(R^+,s)$ 和 $v_{lm}'(s)$ 分别取代 $h_p(R^+,\omega)$ 和 $v_{lm}(\omega)$ 而已. 地表应力引起的引力位增量由 (25) 式给出.

同时得出了均匀不可压缩、理想弹性形变地球的位 Love 数和位移 Love 数之间的理论关系 (23) 式，对于负荷 Love 数来说也具有同样的关系.

参 考 文 献

1 Nerem R S, Chao B F. Geophys Res Lett, 1993, 20: 595
2 叶叔华，黄□. 天文地球动力学. 济南：山东科技出版社， 2001
3 Grafarend E W, Engels J, Varga P. Journal of Geodesy, 1997, 72: 11
4 许厚泽，张赤军. 地球物理学报， 1997, 40(增刊): 192
5 许厚泽，孙和平. 地球科学进展， 1998, 13(5): 416
6 李国营. 博士论文. 中国科学院测量与地球物理研究所， 1991
7 李国营，彭龙辉. 地球物理学报， 1996, 39(5): 672
8 卢红艳，郑金涵，刘端法等. 地球物理学进展， 2004, 19(4): 887
9 华昌才，果勇，刘端法等. 地震学报， 1995, 17(3): 347
10 贾民育，郭有光，高荣胜等. 地壳形变与地震， 2001, 21(4): 52
11 Dehant V. Phys Earth Planet Inter, 1987, 49: 97
12 汪汉胜. 博士论文. 中国科学院测量与地球物理研究所， 1999
13 陈俊勇. 地面参照系的现代定向理论和地球自转运动 (M). 北京：测绘出版社， 1991.
14 郭俊义. 地球物理学基础. 北京：测绘出版社， 2001

15 高锡铭. 地壳形变与地震, 1994, 14(3): 16
16 张捍卫, 郑勇, 刘长建. 地壳形变与地震, 2000, 20(2): 1
17 高布锡. 天文地球动力学原理. 北京：科学出版社, 1997

The Response of the Deformable Earth to Different Driving Forces

ZHANG Han-wei[1,2] TIE Qiong-xian[2] YANG Lei[2]
(1 *School of surveying & Land information Engineering, Henan polytechnic university, Jiaozuo* 454003)
(2 *National Astronomical Observatories/ Yunnan Observatory, Chinese Academy of Sciences, Kunming* 650011)

Abstract The space-time variations of the earth deformation and gravitational field have important meaning, whether in basic theoretical research or building space geographical information. The earth would come into being deformation under the function of every kind of mechanical mechanisms, this deformation again induced change of gravitational potential, namely, deformable accession potential or Eulerian increments of gravitational potential. This paper had been based on the theory of vector spherical harmonic functions, discussed influences of the tidal generating force, the loading force, the surface and boundary stress on the earth deformation and the incremental gravitational potential. At one time, presented the material expressions Eulerian increment of gravitational potential and the theoretical relationship among Love numbers, for a homogeneous and incompressible deformable earth. This work could provided reference and gist for theoretical research of the earth deformation.

Key words Solar System: Earth, Physical Data and Processes: Gravitation