第 51 卷 第 1 期　　天 文 学 报　　Vol.51 No.1
2010 年 1 月　　ACTA ASTRONOMICA SINICA　　Jan., 2010

# 近地卫星运动的坐标系附加摄动在拟平均根数法中的处理*

汤靖师 [1,2†]　刘 林 [1,2]

(1 南京大学天文系 南京 210093)
(2 南京大学空间环境与航天动力学研究所 南京 210093)

**摘要**　在常用的历元地心天球坐标系中研究和处理近地卫星的轨道问题，就必须考虑由于地球赤道面摆动所引起的坐标系附加摄动，正因为如此，给实际工作带来一些麻烦. 关于这一问题，曾提出了一种针对瞬根数和平根数之间的转换 (仅与坐标系附加摄动的短周期项有关) 的解决途径，但并未涉及采用分析法进行轨道外推的有关问题 (这与坐标系附加摄动的长期和长周期项有关), 这对处理近地卫星的轨道问题而言显然是不完整的. 这里结合拟平均根数法进一步改进原提出的方法，较完善地解决这一坐标系附加摄动的计算问题. 在此前提下，对于卫星定轨和预报及其相关工作，无论是采用数值法还是分析法，均可采用同一坐标系，即历元 (目前是 J2000.0) 地心天球坐标系.

**关键词**　**天体力学，参考系，方法：分析**
**中图分类号**：P 133;　　**文献标识码**：A

## 1 引言

在地球卫星动力学中 (特别是近地卫星), 无论是轨道分析还是具体的定轨或预报，考虑到地球赤道面的空间摆动 (即岁差章动现象), 都习惯采用历元 (当前是 J2000.0) 地心天球坐标系，即坐标原点是地球质心 (简称地心), 基本坐标面 ($xy$ 面) 和坐标轴 ($x$ 轴) 取为历元平赤道面和相应的平春分点. 但对近地卫星运动而言，最重要的外力源是地球引力，而地球引力位却是在地固坐标系 (对应真赤道面) 中定义的，这就导致在历元地心天球坐标系 (对讨论地球卫星的运动问题，历元又是确定的，故常简称为天球坐标系) 中处理卫星运动问题时，必须考虑地球引力位的变化对卫星轨道的影响，这对建立摄动分析解带来麻烦.

上世纪六七十年代， Kozai, Lambeck 等人为了简化上述问题，在建立摄动分析解时，提出了一种混合形式的轨道坐标系 [1−3]. 其坐标原点仍是地心， $xy$ 坐标面是 $t$ 时刻的瞬时赤道面，而 $x$ 轴方向却是历元 (当时取 J1950.0) 平春分点方向. 在这种坐标系中，地球引力位无变化，其实际影响转化为运动坐标系的 “惯性力” 影响，但其影响较小，在

2009-02-21 收到原稿， 2009-06-05 收到修改稿
* 国家自然科学基金项目 (10673006) 和空间碎片监测预警工程项目 (KJSP06103) 资助
† jstang@nju.edu.cn

一定精度要求的前提下可忽略. 故这种坐标系一直沿用至今, 特别在空间目标监视中, 如美国所公开发布的 TLE 根数 (两行轨道根数) 即为这种坐标系. 然而在地面测控系统以及通常的卫星定轨和预报中又习惯采用上述历元地心天球坐标系, 特别是高精度的数值法定轨和预报工作. 这种坐标系是统一不变的, 使用方便, 不同时刻的轨道可直接比较. 但在很多问题中又需要引用平根数, 它是在分析法定轨中所产生的, 而高精度的数值法定轨只能提供瞬根数, 它们之间的转换又必需由轨道分析解中相应的计算公式来解决, 这就又涉及到轨道坐标系, 从而引起转换之间的麻烦. 针对这一转换问题, 我们曾提出过一种解决方法 [4]. 本文将针对在统一的历元地心天球坐标系中去处理轨道运动的各种问题, 在无奇点的拟平均根数法前提下, 较完善地提供坐标系附加摄动的计算方法, 使坐标系的选择获得统一, 即采用单一的历元地心天球坐标系即可.

## 2 关于坐标系附加摄动的引进与摄动解的构造

在历元地心天球坐标系中, 由于地球赤道面摆动引起的地球非球形引力位的变化, 在最大的 $J_2$ 项上的反应为 $\Delta V(J_2)$, 其值的量级为 [5]

$$\Delta V(J_2) = O(J_2\theta) = J_2 \times 2004'' t\,. \tag{1}$$

$t$ 为从历元 (如 J2000.0) 起算的世纪数, 即

$$t = \frac{\mathrm{JD}(t) - \mathrm{JD(J2000.0)}}{36525}\,. \tag{2}$$

这一引力位的变化将会转化为对卫星轨道的摄动影响, 此即坐标系附加摄动. 这种摄动效应将会出现混合形式的长周期项, 随着时刻 $t$ 离标准历元的增大而增大, 不可忽视. 而在轨道坐标系中, 由于坐标平面 ($xy$ 坐标面) 随赤道面摆动, 地球引力位不变, 无此形式的坐标系附加摄动. 但赤道面的摆动将转化为惯性力摄动, 不过其影响较小, 所引起的摄动效应为二阶 (即 $J_2^2$ 量级) 长周期项和三阶 ($J_2^3$) 短周期项, 在一定精度要求的前提下无需考虑.

根据天文资料处理的规定, 标准历元每 50 年换一次, 如 J1950.0, J2000.0, $\cdots$, 那么 (1) 式中的 $t$ 充其量涉及 25 年的长度, 即 $t \leq 1/4$, 有

$$\begin{cases} \Delta V(J_2) = O(J_2\theta) \leq J_2 \times 500'', J_2 \times 500'' \geq 10^{-6} \\ \Delta V(J_l, l \geq 3; J_{lm}, l \geq 2, m \neq 0) = 10^{-9} \end{cases}\,. \tag{3}$$

对于低轨卫星, 无论是定轨还是预报, 如果采用分析方法 (即受摄星历的计算采用摄动分析解), 通常要求达到的精度为 100 m 量级, 充其量再高 1 个量级, 即 10 m 量级. 如果精度要求还要提高, 除力学模型 (如大气等摄动因素) 不可能满足分析法的要求外, 对于引力摄动部分亦无法 (或相当困难) 构造相应的极其复杂的摄动解, 似乎也没有这种需求. 高精度要求, 往往是那些具体定量问题, 显然是采用数值方法去解决为宜, 实际工作中确实如此. 鉴于这种实际状况, 对于当今的各种轨道问题, 在必须采用分析方法时, 通常不会有比 10 m 量级精度更高的要求. 那么, 只要在历元地心天球坐标系中, 能

直接给出 $J_2$ 项对应的坐标系附加摄动 (包括一阶长周期项和有可能影响到 10 m 量级的二阶短周期项) 即可，不必为了避免这种坐标系附加摄动而去采用区别于历元地心天球坐标系的混合形式的轨道坐标系. 由此，在定轨和预报中，无论是采用分析方法还是数值方法，根数转换还是摄动外推，就可在同一坐标系中去处理各种问题，不会再出现两种坐标系之间的不必要的转换过程.

文献 [5] 曾给出一种通过数值解中常用的考虑岁差和章动的坐标转换公式，导出了历元地心天球坐标系中地球引力位的变化，这样可使数值法与分析法在相应问题中达到统一. 引力位变化中只考虑到岁差和章动量的一次项时的结果，记作 $\Delta V_1(J_2)$, 有

$$\begin{aligned}\Delta V_1\left(J_2\right)=&\left(\frac{3J_2}{2a^3}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin i\left\{\cos i\left[(\theta_A+\Delta\theta)\sin\Omega-\Delta\varepsilon\cos\Omega\right]\right\}\\&-\left(\frac{3J_2}{2a^3}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin i\left\{\left[(\theta_A+\Delta\theta)\cos\Omega+\Delta\varepsilon\sin\Omega\right]\sin 2u\right.\\&\left.+\cos i\left[(\theta_A+\Delta\theta)\sin\Omega-\Delta\varepsilon\cos\Omega\right]\cos 2u\right\},\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $r$ 、 $a$ 、 $i$ 、 $\Omega$ 及 $u=f+\omega$ 是卫星的地心距和轨道根数， $f$ 是卫星的真近点角，而 $\theta_A$ 、 $\Delta\theta$ 及 $\Delta\epsilon$ 即岁差章动量，根据国际天文界有关参考系的规范，其数值为

$$\begin{cases}\theta_A=2004.3109''t\\ \Delta\theta=-6.84''\sin\Omega'\\ \Delta\varepsilon=9.20''\cos\Omega'\end{cases}.\tag{5}$$

$\Omega'$ 是月球轨道 (白道) 升交点平黄经. 为了进一步分析问题，这里再补充给出岁差和章动量二次项的主要部分，记作 $\Delta V_2(J_2)$, 由下式表达

$$\begin{aligned}\Delta V_2\left(J_2\right)=&-\left(\frac{3J_2}{2a^3}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3\left\{\frac{1}{4}\theta_A^2\left[\left(1+\cos^2 i\right)+\sin^2 i\cos 2\Omega\right]-\left(\xi_A\theta_A\right)\sin i\left[(\cos i)\cos\Omega\right]\right\}\\&-\left(\frac{3J_2}{2a^3}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3\left\{\frac{1}{4}\theta_A^2\left[\left(\sin^2 i+\left(1+\cos^2 i\right)\cos 2\Omega\right)\cos 2u+\left(2\cos i\sin 2\Omega\right)\sin 2u\right]\right.\\&\left.-\left(\xi_A\theta_A\right)\sin i\left[(\sin\Omega)\sin 2u-(\cos i\cos\Omega)\cos 2u\right]\right\},\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $\xi_A$ 亦为岁差量，有

$$\xi_A=2006.2181''t\,.\tag{7}$$

当 $t$ 距标准历元 20 年时 (即 2020 年), 在常用的无量纲单位下，有

$$\begin{cases}\theta_A^2=0.3776\times10^{-5}\\ \xi_A\theta_A=0.4346\times10^{-5}\end{cases}.\tag{8}$$

对低轨卫星，考虑 $1\sim3$ d 的弧段，该摄动项的影响量级不会超过 $10^{-6}$, 即不影响 10 m 量级精度，本文将会对其作进一步分析并用数值检验来证实.

考虑上述两部分如下

$$\Delta V(J_2)=\Delta V_1(J_2)+\Delta V_2(J_2)\,,\tag{9}$$

这就是地球赤道面摆动, 通过非球形引力位中最重要的动力学扁率 $J_2$ 项反映出的附加引力位, 即摄动函数. 相对 $J2$ 项本身的摄动量级为二阶量和三阶量, 即 $O(J_2^2)$ 和 $O(J_2^3)$, 记作 $R_2$ 和 $R_3$. 用求平均值的方法 [6], 容易将其分解成长期、长周期和短周期 3 个部分 (分别用下标 $c$ 、 $l$ 和 $s$ 来表示), 即 (以下各式中各物理量的单位均是常用的无量纲单位)

$$\begin{array}{l} R_2 = R_{2l} + R_{2s} \\ R_3 = R_{3c} + R_{3l} + R_{3s} \end{array} , \tag{10}$$

$$R_{2l} = \left(\frac{3J_2}{2a^3}\right)\left(1-e^2\right)^{-3/2}\sin i\left\{\cos i\left[(\theta_A+\Delta\theta)\sin\Omega - \Delta\varepsilon\cos\Omega\right]\right\} , \tag{11}$$

$$\begin{aligned} R_{2s} = \left(\frac{3J_2}{2a^3}\right)\sin i\Bigg\{&\cos i\left[(\theta_A+\Delta\theta)\sin\Omega-\Delta\varepsilon\cos\Omega\right]\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3(1-\cos 2u)-\left(1-e^2\right)^{-3/2}\right] \\ &-\left[(\theta_A+\Delta\theta)\cos\Omega+\Delta\varepsilon\sin\Omega\right]\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2u\Bigg\} , \end{aligned} \tag{12}$$

$$R_{3c} = -\left(\frac{3J_2}{2a^3}\right)\left(1-e^2\right)^{-3/2}\left(\frac{1}{4}\theta_A^2\right)\left(1+\cos^2 i\right) , \tag{13}$$

$$R_{3l} = -\left(\frac{3J_2}{2a^3}\right)\left(1-e^2\right)^{-3/2}\sin i\left[\left(\frac{1}{4}\theta_A^2\right)\sin i\cos 2\Omega-(\xi_A\theta_A)\cos i\cos\Omega\right] , \tag{14}$$

$$\begin{aligned} R_{3s} = &-\left(\frac{3J_2}{2a^3}\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-\left(1-e^2\right)^{-3/2}\right] \\ &\times\{\frac{1}{4}\theta_A^2\left[\left(1+\cos^2 i\right)+\sin^2 i\cos 2\Omega\right]-(\xi_A\theta_A)\sin i\left[(\cos i)\cos\Omega\right]\} \\ &-\left(\frac{3J_2}{2a^3}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3 \\ &\times\{\frac{1}{4}\theta_A^2\left[\left(\sin^2 i+\left(1+\cos^2 i\right)\cos 2\Omega\right)\cos 2u-(2\cos i\sin 2\Omega)\sin 2u\right] \\ &-(\xi_A\theta_A)\sin i\left[(\sin\Omega)\sin 2u-(\cos i\cos\Omega)\cos 2u\right]\} . \end{aligned} \tag{15}$$

根据上述附加引力位的表达式和对相关参数的量级分析可以看出, 岁差和章动量二次项的引力位无异常现象, 其摄动量级确实为三阶量. 对于低轨卫星的定轨或预报 (通常是 $1\sim 3$ d 的弧段), 在优于 10 m 量级精度要求下, 只需给出坐标系附加摄动的一阶长周期项和二阶短周期项, 但在后面第 4 节的数值检验中仍旧给出相应的定量验证结果.

针对低轨卫星大多是近圆轨道, 采用拟平均根数法构造第 1 类无奇点根数的摄动解: 适用于 $0\le e<1$ 的 "封闭解", 对不同 $e$ 值不作任何近似处理. 第 1 类无奇点根数定义如下

$$\left\{\begin{array}{c} a \quad , \quad i \quad , \quad \Omega \\ \xi = e\cos\omega \ , \ \eta = e\sin\omega \ , \ \lambda = M+\omega \end{array}\right. . \tag{16}$$

用符号 $\sigma$ 表示轨道根数, 即

$$\sigma = (a\ ,\ i\ ,\ \Omega\ ,\ \xi\ ,\ \eta\ ,\ \lambda)^T , \tag{17}$$

上标 $T$ 表示转置， $\sigma$ 表示轨道根数之一，并不表示矢量 (下面的 $\delta$ 含义相同). 相应的摄动解的形式为

$$\begin{aligned}\sigma(t)=\bar{\sigma}(t_0)+(\delta n+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)(t-t_0)+\Delta\sigma_l^{(1)}+\Delta\sigma_l^{(2)}(t)\\ +\sigma_s^{(1)}(t)+\sigma_s^{(2)}(t)+\sigma_s^{(3)}(t)\end{aligned}\ , \tag{18}$$

$$\Delta\sigma^{(k)}(t)=\sigma_l^{(k)}(t)-\sigma_l^{(k)}(t_0)\,,k=1,2\,, \tag{19}$$

$$\delta=(0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1)^T\ . \tag{20}$$

上述 (18) 和 (19) 式中，有关 $J_2$ 项摄动及其岁差和章动量一次项的附加摄动部分包括各符号的含义，这里不再列出，请见文献 [4] 和 [6]. 下面也仅列出岁差和章动量二次项附加摄动的主要部分，即有代表性的根数 $a$ 和 $\lambda$ 相应摄动解的表达式.

### 2.1 长期项系数 $\lambda_3$

$$\lambda_3=\left(\frac{1}{4}\theta_A^2\right)\left[3\sqrt{1-e^2}\left(\frac{1}{\cos i}+\cos i\right)\right]\Omega_1\,, \tag{21}$$

$$\Omega_1=-\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)n\cos i\,,\quad n=\sqrt{\mu}a^{-3/2}\,. \tag{22}$$

### 2.2 长周期变化项 $\Delta\lambda^{(2)}(t)$

$$\Delta\lambda^{(2)}(t)=\lambda_l^{(2)}(t)-\lambda_l^{(2)}(t_0)\,, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\lambda_l^{(2)}(t)=&\left(\frac{1}{2}\theta_A^2\right)\left(\frac{3\sqrt{1-e^2}}{2\cos i}\sin^2 i-\frac{1}{2}\cos i\right)\sin 2\Omega\\ &+(2\xi_A\theta_A)\left(\frac{\cos 2i}{2\sin i}-3\sqrt{1-e^2}\sin i\right)\sin\Omega\,.\end{aligned} \tag{24}$$

### 2.3 短周期项 $a_s^{(3)}(t)$

$$\begin{aligned}a_s^{(3)}(t)=&-\left(\frac{3J_2}{2a}\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-\left(1-e^2\right)^{-3/2}\right]\\ &\times\left\{\left(\frac{1}{2}\theta_A^2\right)\left[\left(1+\cos^2 i\right)+\sin^2 i\cos 2\Omega\right]-(2\xi_A\theta_A)\left[\sin i\cos i\cos\Omega\right]\right\}\\ &-\left(\frac{3J_2}{2a}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3\\ &\times\left\{\left(\frac{1}{2}\theta_A^2\right)\left[\left(\sin^2 i+\left(1+\cos^2 i\right)\cos 2\Omega\right)\cos 2u-(2\cos i\sin 2\Omega)\sin 2u\right]\right.\\ &\left.-(2\xi_A\theta_A)\sin i\left[(\sin\Omega)\sin 2u-(\cos i\cos\Omega)\cos 2u\right]\right\}.\end{aligned} \tag{25}$$

## 3 数值验证

对于上述坐标系附加摄动解的正确性，在文献 [4] 中已用实例证实，无需通过轨道坐标系去避开坐标系附加摄动的计算进行瞬根数与平根数的转换．为了系统说明问题，本文还是尽量用很小篇幅列出该结果.

由数值法定轨给出历元 $t_0$ =2006-08-25T0:0:0.0 时刻的两组瞬时根数如下

$$\begin{cases} a = 7078.1363 \text{ km} \ , \ e = 0.001, 0.1 \ , \ i = 45.0^\circ \\ \Omega = 45.0^\circ \qquad\quad , \ \omega = 45.0^\circ \qquad , \ M = 0.0^\circ \end{cases} . \tag{26}$$

用两种方法进行转换，即一种是直接在历元 (J2000.0) 地心天球坐标系中进行转换，转换中只考虑上述岁差和章动量一次项的附加摄动，而另一种是比较复杂的过程，即目前常用的通过 J2000.0 的轨道坐标系来进行转换．为了便于比较，将最后的转换结果一并转入 J2000.0 轨道坐标系中去比较，列入表 1.

**表 1 两种转换结果的比较**

**Table 1 Comparison between two conversions**

| Method | $e_0$ | $a$(km) | $e$ | $i(^\circ)$ | $\Omega(^\circ)$ | $\omega(^\circ)$ | $\lambda(^\circ)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.001 | 7078.1432 | 0.00070495 | 44.975535 | 44.945044 | 26.839696 | 45.030421 |
| 2 | 0.001 | 7078.1432 | 0.00070482 | 44.975547 | 44.945043 | 26.852219 | 45.030446 |
| 1 | 0.1 | 7077.5947 | 0.09959562 | 44.975537 | 44.940833 | 44.886685 | 45.028280 |
| 2 | 0.1 | 7077.5948 | 0.09959558 | 44.975551 | 44.940833 | 44.866835 | 45.028309 |

从表 1 中可以看出，瞬根数与平根数的转换，完全不必通过轨道坐标系来实现．但是，这并不能表明在轨道外推中也能达到这一效果，因为这种转换只涉及到短周期项．而文献 [4] 引用拟平均根数法构造的摄动解是否还有不足之处？为了使我们的工作更加完善，必须进一步考察这一效果．为此，下面再给出相应的算例，计算采用的初始轨道根数如下

$$\begin{cases} a = 7\ 078.137\ 0 \text{ km} \ , \ e = 0.01 \quad , \ i = 20.0^\circ \\ \Omega = 20.0^\circ \qquad\quad , \ \omega = 20.0^\circ \ , \ M = 20.0^\circ \end{cases} \tag{27}$$

相应的历元分别取为 2000-01-31 、 2008-01-31 和 2020-01-31, 这是为了呈现岁差项的摄动影响随时间增长的趋势．相应的轨道周期为 $T_s$=98.7730 min, 对 3 条轨道各外推 10 圈 (弧段在上述前提的范围内), 计算结果分别列于表 2∼4.

**表 2　$t_0$=2000-01-31**

**Table 2　$t_0$=2000-01-31**

| Method | $a$(km) | $e$ | $i(^\circ)$ | $\Omega(^\circ)$ | $\omega(^\circ)$ | $\lambda(^\circ)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7077.6533 | 0.00991409 | 19.994860 | 15.524428 | 28.428857 | 52.301657 |
| 1 | 7077.6533 | 0.00991485 | 19.994872 | 15.524468 | 28.453132 | 52.301553 |
| Error | 0 | $7.6\times10^{-7}$ | $2.1\times10^{-7}$ | $7.0\times10^{-7}$ | - | $1.8\times10^{-6}$ |
| 2 | 7077.6533 | 0.00991485 | 19.994872 | 15.524468 | 28.453132 | 52.301553 |
| Error | 0 | $7.6\times10^{-7}$ | $2.1\times10^{-7}$ | $7.0\times10^{-7}$ | - | $1.8\times10^{-6}$ |

**表 3　$t_0$=2008-01-31**

**Table 3　$t_0$=2008-01-31**

| Method | $a$(km) | $e$ | $i(^\circ)$ | $\Omega(^\circ)$ | $\omega(^\circ)$ | $\lambda(^\circ)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7077.6541 | 0.00991425 | 19.991277 | 15.526404 | 28.427307 | 52.297796 |
| 1 | 7077.6541 | 0.00991500 | 19.991288 | 15.526485 | 28.451333 | 52.297300 |
| Error | 0 | $7.5\times10^{-7}$ | $1.9\times10^{-7}$ | $1.4\times10^{-6}$ | - | $8.7\times10^{-6}$ |
| 2 | 7077.6541 | 0.00991500 | 19.991288 | 15.526485 | 28.451333 | 52.297300 |
| Error | 0 | $7.5\times10^{-7}$ | $1.9\times10^{-7}$ | $1.4\times10^{-6}$ | - | $8.7\times10^{-6}$ |

**表 4　$t_0$=2020-01-31**

**Table 4　$t_0$=2020-01-31**

| Method | $a$(km) | $e$ | $i(^\circ)$ | $\Omega(^\circ)$ | $\omega(^\circ)$ | $\lambda(^\circ)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7077.6554 | 0.00991448 | 19.986589 | 15.530418 | 28.424744 | 52.292543 |
| 1 | 7077.6554 | 0.00991521 | 19.986598 | 15.530530 | 28.448470 | 52.291564 |
| Error | 0 | $7.3\times10^{-7}$ | $1.6\times10^{-7}$ | $2.0\times10^{-6}$ | - | $1.7\times10^{-5}$ |
| 2 | 7077.6554 | 0.00991521 | 19.986598 | 15.530530 | 28.448470 | 52.291564 |
| Error | 0 | $7.3\times10^{-7}$ | $1.6\times10^{-7}$ | $2.0\times10^{-6}$ | - | $1.7\times10^{-5}$ |

上述表中的方法 0 是高精度数值法提供的比对标准; 方法 1 是文献 [4] 给出的坐标系附加摄动计算方法; 而方法 2 是在原考虑坐标系附加摄动的基础上增加了主要的岁差二次项. 为了便于分析误差的量级和影响, 表中角度量的误差均用弧度给出. 近圆轨道卫星的近地点幅角 $\omega$ 存在一定不确定性, 故不作比较, 只比较卫星距升交点的经度 $\lambda = M+\omega$.

从表 2∼4 的数据不难看出, 具有长期变化性质的根数 $\Omega$ 和 $\lambda$ (包含了 $\omega$ 和 $M$) 的误差, 随着计算历元 $t_0$ 远离标准历元 (J2000.0) 而越来越大, 特别是沿迹根数 $\lambda$ 的误差已超出一阶分析解的 “标准”(即 $10^{-6}$ 的量级), 而达到 $10^{-5}$ 的量级. 对一个完整的轨道问题 (包括性质不同的根数之间的转换和外推) 而言, 文献 [4] 给出的解还有待进一步完善. 但这显然不是仅考虑岁差和章动一次项的后果, 上述计算方法 2 给出的结果就足以证实, 必须从拟平均根数中与岁差和章动一次项有关的摄动效应中去考虑, 下一节将作具体分析, 并给出相应的解决方法和具体计算公式.

## 4 坐标系附加摄动解在拟平均根数法中的进一步处理

首先我们要指出：在拟平均根数法中，摄动分析解的参考轨道是拟平均根数 $\bar{\sigma}$, 有

$$\bar{\sigma}\left(t\right)=\bar{\sigma}_0+\left(\delta n+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right)\left(t-t_0\right)+\Delta\sigma_l^{(1)}+\Delta\sigma_l^{(2)}\left(t\right)\,, \tag{28}$$

其中 $\bar{\sigma}_0=\bar{\sigma}_0(t_0)$ 是初始拟平均根数. 计算长期项时， $n,\sigma_1,\ldots$ 的表达式中出现的根数，都应该是拟平均根数 $\bar{\sigma}$. 例如计算根数 $\Omega$ 和 $\lambda$ 的一阶长期项 $\sigma_1(t-t_0)$ 时，相应的表达式为

$$\Omega_1=-\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)n\cos i\,, \tag{29}$$

$$\lambda_1=\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)n\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)+\sqrt{1-e^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right]\,. \tag{30}$$

在导出这两式时，对时间 $t$ 的积分过程中，右端出现的 $e=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ 和 $i$ 使用平均数代入，应分别为

$$\begin{array}{l}\bar{e}=\bar{e}_0+\left[e_l^{(1)}\left(t\right)-e_l^{(1)}\left(t_0\right)\right]\\ \bar{i}=\bar{i}_0+\left[i_l^{(1)}\left(t\right)-i_l^{(1)}\left(t_0\right)\right]\end{array}\,. \tag{31}$$

但在推导地球非球形引力摄动相应的摄动解和计算时，对于 $\Omega$ 和 $\lambda$ 通常并不需要这样考虑. 这是因为 $e$ 和 $i$ 的长周期项只与近地点幅角 $\omega$ 有关，因而必然伴有 $e$ 因子. 正由于这种特征，在轨道偏心率不大的情况下 (如 $e\leq 0.1$ 的低轨卫星), 推导地球非球形引力摄动相应的摄动解和计算时，实际上并不需要按 (30) 式那样考虑，就在相应的表达式中用 $\bar{i}_0$ 和 $\bar{e}_0$ 代替. 但是，上述坐标系附加摄动导致倾角 $i$ 出现的一阶长周期项却与 $\Omega$ 有关，不会伴有 $e$ 因子，那么就必须考察上述问题了.

这里不再更多地介绍相关原理，就在文献 [4] 的基础上补充相应的摄动效应， $\Omega$ 和 $\lambda$ 的附加长期摄动项. 略去推导过程，直接给出结果，相当于二阶长期项的补充部分，分别记作 $\Delta\Omega_2(t)$ 和 $\Delta\lambda_2(t)$, 具体表达式如下

$$\Delta\Omega_2\left(t\right)=\left(\frac{3J_2}{4p^2}n\sin i\right)\left(\theta_{\rm A}\cos\bar{\Omega}\right)\Omega_1\left(t-t_0\right)^2\,, \tag{32}$$

$$\Delta\lambda_2\left(t\right)=-8\cos i\left(\frac{3J_2}{4p^2}n\sin i\right)\left(\theta_{\rm A}\cos\bar{\Omega}\right)\Omega_1\left(t-t_0\right)^2\,, \tag{33}$$

其中 $\Omega_1$ 即由 (28) 式表达. 这两式右端出现的 $\bar{\Omega}$, 可由下式提供

$$\bar{\Omega}=\bar{\Omega}_0+\frac{1}{2}\Omega_1\left(t-t_0\right)\,, \tag{34}$$

在外推弧段不长的情况下，亦可用 $\bar{\Omega}_0$ 代替.

## 5　进一步的数值验证

对第 3 节的 3 个算例，在文献 [4] 原考虑坐标系附加摄动的基础上，补充上述二阶长期项 $\Delta\Omega_2(t)$ 和 $\Delta\lambda_2(t)$ 后，重新计算，计算结果分别列于表 5∼7.

**表 5　$t_0$=2000-01-31**

**Table 5　$t_0$=2000-01-31**

| Method | $a$(km) | $e$ | $i(^\circ)$ | $\Omega(^\circ)$ | $\omega(^\circ)$ | $\lambda(^\circ)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7077.6533 | 0.00991409 | 19.994860 | 15.524428 | 28.428857 | 52.301657 |
| 3 | 7077.6533 | 0.00991485 | 19.994872 | 15.524468 | 28.453133 | 52.301556 |
| Error | 0 | $7.6\times10^{-7}$ | $2.1\times10^{-7}$ | $7.0\times10^{-7}$ | - | $1.8\times10^{-6}$ |

**表 6　$t_0$=2008-01-31**

**Table 6　$t_0$=2008-01-31**

| Method | $a$(km) | $e$ | $i(^\circ)$ | $\Omega(^\circ)$ | $\omega(^\circ)$ | $\lambda(^\circ)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7077.6541 | 0.00991425 | 19.991277 | 15.526404 | 28.427307 | 52.297796 |
| 3 | 7077.6541 | 0.00991500 | 19.991288 | 15.526438 | 28.451362 | 52.297646 |
| Error | 0 | $7.5\times10^{-7}$ | $1.9\times10^{-7}$ | $5.9\times10^{-7}$ | - | $2.6\times10^{-6}$ |

**表 7　$t_0$=2020-01-31**

**Table 7　$t_0$=2020-01-31**

| Method | $a$(km) | $e$ | $i(^\circ)$ | $\Omega(^\circ)$ | $\omega(^\circ)$ | $\lambda(^\circ)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7077.6554 | 0.00991448 | 19.986589 | 15.530418 | 28.424744 | 52.292543 |
| 3 | 7077.6554 | 0.00991520 | 19.986598 | 15.530412 | 28.448539 | 52.292388 |
| Error | 0 | $7.2\times10^{-7}$ | $1.6\times10^{-7}$ | $1.0\times10^{-7}$ | - | $2.7\times10^{-6}$ |

上述 3 个表中的方法 3, 即在文献 [4] 给出的坐标系附加摄动基础上，进一步考虑了与拟平均根数法有关的长周期摄动引起的附加项，是一个在一定意义下的完整方法. 上述表中的误差表示方法同表 2∼4. 从这 3 个表中的数据可以清楚地看出：根数 $\Omega$ 和 $\lambda$ 的误差随着计算历元 $t_0$ 远离标准历元 (J2000.0) 越来越大的现象消失了，而且完全符合一阶摄动解应达到的精度标准.

## 6　关于坐标系选取的一个建议

根据本文进一步的深入考虑，给出的摄动分析解不仅可以简单地处理瞬根数与平根数的转换问题，同时也能使轨道外推达到一定的精度要求. 在标准历元每 50 年换一次的前提下，对于地球引力位的附加部分，只需考虑 $\Delta V(J_2)$ 部分，相应的附加摄动解并不复杂. 因此，从这一实际现状来看，对于卫星定轨和预报工作 (包括瞬根数与平根数的转换和应用), 完全可以采用统一的坐标系，即历元 (目前是 J2000.0) 地心天球坐标系，而不必引进混合形式的轨道坐标系. 至于有些工作，需要引用美国所发布的 TLE 根数时涉及的坐标系转换，也很容易实现，不会影响上述坐标系的选择.

## 参 考 文 献

1 Kozai Y. AJ, 1960, 65: 621
2 Lambeck Y. CeMec, 1973, 7: 139
3 Kozai Y. CeMec, 1973, 7: 356
4 刘林，汤靖师．空间科学学报， 2008, 28: 164
5 张巍，刘林．飞行器测控学报， 2003, 22: 25
6 刘林．人造地球卫星轨道力学．北京：高等教育出版社， 1992

# The Application of Quasi-Mean-Element-Method to LEO under Additional Perturbation due to Change of Coordinate System

TANG Jing-shi[1,2] LIU Lin[1]
(1 *Astronomy Department, Nanjing University, Nanjing 210093*)
(2 *Institute of Space Environment and Astrodynamics, Nanjing University, Nanjing 210093*)

**Abstract** It is necessary to consider the additional perturbation caused by the oscillation of Earth's equator when working on the low earth orbit (LEO). Since 1960s, an intermediate orbit coordinate system using true equator and mean equinox (TEME) is introduced. It effectively solves the problem and has been widely used in various applications till today. But this traditional frame is purely conceptual and has always been a trouble in converting between these systems especially for those who are unfamiliar with celestial frames. As proved in a previous paper, it is possible to avoid the intermediate TEME frame and conversions between osculating elements, and mean elements can be completed in a consistent geocentric celestial coordinate system where only short-period terms are required. Here with the improved secular and long-period terms, it is further available to predict the orbit analytically with quasi-mean-element-method all in the same celestial frame, reaching the accuracy of $10^{-6}$ in Earth's radius. The results show and suggest that celestial coordinate system (J2000.0 for the time being) can be used throughout any applications without having to introduce TEME system as intermediate frame any more.

**Key words** celestial mechanics, reference systems, methods: analytical