第 51 卷 第 1 期 天 文 学 报 Vol.51 No.1
2010 年 1 月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Jan., 2010

R-N 场中雷达回波延迟实验的后后牛顿修正*

宫衍香 †

(泰山学院物理与电子工程学院 泰安 271021)

摘要 从球对称引力场中光子在赤道面上的运动微分方程出发，采用后牛顿近似方法，讨论了 Reissner-Nordström 度规场中雷达回波延迟实验的后后牛顿修正．通过计算给出了后牛顿以及后后牛顿的修正结果，当荷电量 Q 为零时，该结果适用于电中性天体，其后牛顿部分的修正与经典文献一致．文中采用的近似展开方法同样适用于讨论更高阶的修正．雷达回波的高阶修正对目前展开的高精度空间引力试验有着重要的参考价值．

关键词 引力，太阳，地球，波，方法：解析

中图分类号： P 131; **文献标识码**： A

1 引言

由于大质量天体附近引力场的存在，使得光信号通过时所需的时间比 Newton 理论计算出的时间要长，这是一种可用雷达回波实验检测的引力效应．早期的雷达回波的延迟实验是测量雷达信号往返于地球与内行星之间时间延迟的引力实验，由 Shapiro[1−2] 提出．该试验在地球上利用雷达发射一束电磁波脉冲，这些电磁波到达其它行星之后，将发生反射，然后再回到地球，被雷达接收到．通过实验可以测出来回一次的时间，并对比两种不同的情况：一种是电磁波来回的路程远离太阳，这时太阳的影响可以不计；一种是电波来回的路程要经过太阳附近，受到引力场的作用．后者的回波要比前者延迟一些，这就是太阳引力场所造成的传播时间加长效应，或叫作雷达回波的延迟．这种效应在空间测量技术中非常重要．在行星际探测器 (例如旅行者 1 号和 2 号，先驱者 10 号和 11 号) 的测距中，由于太阳引力场的作用，引力时间延迟效应一定要被考虑进测距的数据中去，而在所有引力波的探测中，来到太阳系的引力波都会受到太阳、大行星甚至小行星引力场的影响而产生延迟．特别是在对毫秒脉冲星的计时观测中，来自毫秒脉冲星的脉冲信号传播到地球的时间因受到引力时间延迟的影响而造成偏差．由于对毫秒脉冲星的计时是目前探测超低频引力波的唯一手段，因而引力时间延迟效应对超低频引力波探测的影响也需考虑．

2009-04-15 收到原稿， 2009-05-26 收到修改稿

* 国家自然科学基金 (10674099) 和泰山学院引进人才项目 (Y05-2-12) 资助

† yxgong@sina.com

随着技术的不断发展，雷达回波实验的精度要求越来越高．第 1 次实验观测是借助麻省理工学院的 “草堆” 雷达天线 (Haystack radar antenna) 完成的，其结果和理论预测符合得很好，误差小于 5%. 其后这种实验被不断重复，并且不断取得更高的精度 [3]. 为了免受来自行星表面复杂因素的影响，后来有人提出用人造天体作为雷达信号的反射靶进行实验．例如，人们通过绕火星飞行的宇宙飞船作活动中转反射器等 [4]. 这些改进使得对这一效应的测量达到了相当高的精度． 1976 年的海盗号火星探测器将精度提高到了 0.1%[3]; 而 2003 年的卡西尼号土星探测器的实验则达到了小于 0.002% 的精度，是迄今为止精度最高的广义相对论实验验证 [5]. 关于雷达回波延迟试验的其它工作请参阅文献 [6-7]. 目前，形势又有了新的发展．本世纪初，一系列新的空间天文测量计划相继被提出，比如 LISA (Laser Interferometer Space Antenna)[8] 、 Gaia[9] 、 FAME (Full-sky Astrometric Mapping Explorer)[10] 、 ASTROD (Astrodynamical Space Test of Relativity using Optical Devices)[11] 和 Mini-ASTROD[12] 等． LISA 和 Gaia 是 ESA (European Space Agency) 的基石工程， SIM (Space Interferometry Mission) 和 FAME 已经被 NASA (National Aeronautics and Space Administration) 纳入计划，DIVA (Double Interferometer for Visual Astrometry) 计划在德国正在执行中， Mini-ASTROD 是由中国科学院紫金山天文台的倪维斗教授提出的，正处在第 1 阶段的实验研究中．由于严重制约实验精度提高的地面震动和地球引力场在空间已不复存在，与地面实验相比，在太空中进行精密物理实验可望提高 2 至 3 个数量级，因此有必要在理论上讨论引力实验的高阶修正结果，比如文献 [13-20] 的讨论．综上所述，在理论上必须把经典实验的结果考虑到后后牛顿精度，本文采用经典的后牛顿近似方法探讨了 Reissner-Nordström 度规场中雷达回波延迟实验的后后牛顿修正． Reissner-Nordström 引力场是爱因斯坦引力场方程的少数几个严格解之一，在国际单位制中可用如下形式表示 [21]

$$\mathrm{d}\tau^2 = -g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = B\left(r\right)c^2\mathrm{d}t^2 - A\left(r\right)\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{1}$$

其中

$$B\left(r\right) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{8\pi\varepsilon_0 c^4 r^2}, \tag{2}$$

$$A\left(r\right) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{8\pi\varepsilon_0 c^4 r^2}\right)^{-1}. \tag{3}$$

(1) 式中的 $\mathrm{d}\tau$ 为时空间隔， $g_{\mu\nu}$ 为度规张量， x^μ 和 x^ν 为四维时空坐标， μ 和 ν 为张量指标，取 1 到 4 (其中 $x^1 = ct$, $x^2 = r$, $x^3 = \theta$, $x^4 = \varphi$). (2) 式和 (3) 式中的 M 为天体的质量， Q 为天体的荷电量， G 为万有引力常数， c 为光速．最后指出，在后牛顿近似计算中，关键是要搞清楚每个量的数量级以及计算到的近似程度．此类近似方法中常用 $O(c^{-n})$ 或 $O(n)$ 表示 n 阶小量，这样做的好处是在运算中可以清楚地看出每一项的数量级．

2　雷达回波的后后牛顿修正

要讨论球对称引力场中的时间延迟效应必须先要给出光子 (或电磁波) 的径向运动微分方程 ($c \neq 1$ 单位制). 在引力场中，光子运动必须满足如下基本方程 [3]

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = 0\,, \tag{4}$$

其中，克式记号 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}\cdot(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu})/2$, α 、 β 和 λ 同样为张量指标，取值从 1 到 4. 由 (1) 式，经过繁琐计算， (4) 式可以具体写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\lambda^2} + \frac{A'}{2A}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 - \frac{r}{A}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 - r\frac{\sin^2\theta}{A}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \frac{B'c^2}{2A}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 = 0\,, \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\lambda^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 = 0\,, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\lambda^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} + 2\cot\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = 0\,, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\lambda^2} + \frac{B'}{B}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = 0\,. \tag{8}$$

上式中撇号表示对 r 的微商. 不失一般性，可以取质点的初始位置及速度在赤道平面上，即取

$$\theta = \frac{\pi}{2},\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = 0\,. \tag{9}$$

利用 (5)∼(8) 式，同时注意 (9) 式的条件可得光子在引力场赤道面上的轨道微分方程和 $r(t)$ 满足的微分方程

$$\frac{A}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{J^2 B} = -\frac{E}{J^2}\,, \tag{10}$$

$$\frac{A}{B^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{c^2}{B} = -E\,. \tag{11}$$

E 和 J 为两个运动积分.

考虑光子从距离引力中心无穷远处入射到引力场中. 在无穷远处，度规应为平直空间的 Minkowski 度规，即有

$$A(\infty) = B(\infty) = 1\,. \tag{12}$$

上式表明不受引力影响时，信号沿直线传播. 如图 1, 设入射方向为 φ_∞, 不受引力场影响时，信号沿图中的直线传播，受引力场影响时沿弯曲轨道传播，由图可知

$$c \approx -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{r\cos\left[\varphi_\infty - \varphi(r)\right]\right\} \approx -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,. \tag{13}$$

把 (12) 式和 (13) 式代入 (11) 式，并利用 $A(\infty)=B(\infty)=1$ 可以定出

$$E=0\,. \tag{14}$$

对于另一个积分常数 J 用引力场中心到信号轨道的最近距离 r_0 来表示比较方便，因有

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{r=r_0}=0\,, \tag{15}$$

把 (15) 式代入 (10) 式，则有

$$\frac{1}{r_0^2}-\frac{c^2}{J^2B(r_0)}=0\,, \tag{16}$$

即有

$$J=\frac{r_0c}{\sqrt{B(r_0)}}\,. \tag{17}$$

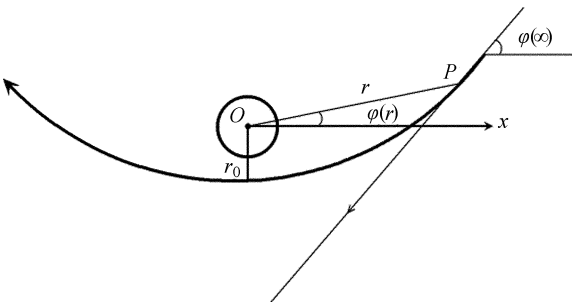

图 1 雷达信号受引力场影响示意图

Fig. 1 The sketch of the radar signal influenced by the gravitational field

把 (14) 式和 (17) 式代入 (11) 式即得光子的运动微分方程为

$$\frac{A(r)}{B^2(r)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{1}{B(r_0)}\left(\frac{r_0c}{r}\right)^2-\frac{c^2}{B(r)}=0\,. \tag{18}$$

由上式，光子从轨道上向径为 r_0 的点传到向径为 r 的点，或从向径为 r 的点传到向径为 r_0 的点所需要的时间为

$$t(r,r_0)=\frac{1}{c}\int_{r_0}^{r}\left\{A(r)B^{-1}(r)\Big/\left[1-\frac{B(r)}{B(r_0)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]\right\}^{1/2}\mathrm{d}r\,. \tag{19}$$

由图 1 可见，设 $\varphi(r)$ 为信号到达处 r 的角坐标，则当 $|\varphi_1-\varphi_2|>\pi/2$ 时，光子从 r_1 传到 r_2 的时间应为

$$t_{12}=t(r_1,r_0)+t(r_2,r_0)\,, \tag{20}$$

若对于 $|\varphi_1-\varphi_2|<\pi/2$ ，则 t_{12} 为二者时间之差.

在后牛顿引力理论中，把包含 $O(c^{-n})$ 的项视为高阶小量，为了采用近似计算方法，把 (2) 式和 (3) 式改写为

$$B(r)=1-\frac{2GM}{c^2r}+\frac{GQ^2}{8\pi\varepsilon_0c^4r^2}+\cdots\,, \tag{21}$$

$$A(r)=1+\frac{2GM}{c^2r}-\frac{GQ^2}{8\pi\varepsilon_0c^4r^2}+\frac{4G^2M^2}{c^4r^2}\cdots. \tag{22}$$

考虑到后后牛顿精度，令

$$\frac{B(r)}{B(r_0)}=1+O(2)+O(4)+\cdots, \tag{23}$$

或

$$B(r)=B(r_0)\left[1+O(2)+O(4)+\cdots\right]. \tag{24}$$

令 (24) 式两边 $O(c^{-n})$ 的同次幂项相等，可定出 $O(2)$ 和 $O(4)$, 最后得

$$\frac{B(r)}{B(r_0)}=1+\frac{2GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)+\frac{GQ^2}{8\pi\varepsilon_0c^4}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_0^2}\right)+\frac{4G^2M^2}{c^4r_0}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)+\cdots, \tag{25}$$

$$1-\frac{B(r)}{B(r_0)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2=\left[1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]\left[1-\frac{2GMr_0}{r(r_0+r)c^2}+\frac{GQ^2}{8\pi\varepsilon_0r^2c^4}-\frac{4G^2M^2}{r(r_0+r)c^4}+\cdots\right]. \tag{26}$$

把 (26) 式代回 (19) 式，利用级数

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots, \tag{27}$$

被积函数的每个乘积项分别展开后再相乘，保留到后后牛顿精度则有

$$t(r,r_0)=\frac{1}{c}\int_{r_0}^{r}\left[1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]^{-1/2}\left[1+\frac{2GM}{c^2r}+\frac{GMr_0}{c^2r(r_0+r)}+\frac{4G^2M^2}{c^4r^2}+\frac{2G^2M^2}{c^4r(r_0+r)}+\right.$$
$$\left.\frac{2G^2M^2r_0}{c^4r^2(r_0+r)}+\frac{3}{2}\frac{G^2M^2r_0^2}{c^4r^2(r_0+r)^2}-\frac{3GQ^2}{16\pi\varepsilon_0c^4r^2}\right]\mathrm{d}r. \tag{28}$$

被积函数逐项积分，可得

$$t(r,r_0)=\frac{1}{c}\left\{\left(r^2-r_0^2\right)^{1/2}+\frac{2GM}{c^2}\ln\frac{r+\left(r^2-r_0^2\right)^{1/2}}{r_0}+\frac{GM}{c^2}\left(\frac{r-r_0}{r+r_0}\right)^{1/2}+\right.$$
$$\frac{2G^2M^2}{c^4r_0}\left(\frac{r-r_0}{r+r_0}\right)^{1/2}-\frac{4G^2M^2}{c^4r_0}\left[\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right)-\frac{\pi}{2}\right]+$$
$$\frac{2G^2M^2}{c^4r_0}\left[1+\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right)-\frac{2}{1+\tan\left[\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right)/2\right]}\right]+$$
$$\frac{3}{2}\frac{G^2M^2}{c^4r_0}\left[\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right)-\frac{2}{1+\tan\left[\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right)/2\right]}-\right.$$
$$\left.\frac{2}{\left\{1+\tan\left[\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right)/2\right]\right\}^2}+\frac{4}{3}\frac{1}{\left\{1+\tan\left[\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right)/2\right]\right\}^3}\right]+$$
$$\left.\frac{3GQ^2}{16\pi\varepsilon_0c^4r_0}\left[\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right)-\frac{\pi}{2}\right]\right\}. \tag{29}$$

把 (29) 式代入 (20) 式便可讨论时间延迟实验的理论结果.

3 简单讨论

显然, (29) 式的第 1 项 $\left(r^2-r_0^2\right)^{1/2}/c$ 为信号走直线所需要的时间, 后面各项为广义相对论的延迟效应. 第 2 项和第 3 项的量级为 $O(c^{-3})$, 为后牛顿修正, 这和经典文献的结果完全一致 [22]. 后面 5 项的量级为 $O(c^{-5})$, 是本文所要求的后后牛顿修正部分, 其中最后一项是由荷电量 Q 造成的. 当 $Q=0$ 时, (29) 式的结论适用于电中性天体. 对于太阳系的引力实验来说, 实际天体的带电量完全可以忽略, 因此在后后牛顿精度上只需考虑第 4 项到第 7 项的影响. 如前所述, 对于当前筹备的高精度天文测量计划如 ASTROD 和 Mini-ASTROD 中可以利用多颗人造卫星和先进的激光技术来检测延迟效应的后后牛顿修正部分, 比较上述修正与其它影响因素的差别.

参 考 文 献

[1] Shapiro I. PhRvL, 1964, 13: 789
[2] Shapiro I. PhRvL, 1968, 20: 1265
[3] Will C. Theory and Experiment in Gravitational Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1993: 142-176
[4] 张元仲, 邹振隆. 物理学报, 1981, 10: 527
[5] Bertotti B, Iess L, Tortora P. Natur, 2003, 425: 374
[6] Okun L B, Selivanov K G, Telegdi V L. UsFiN, 1999, 169: 1141
[7] Okun L B, Selivanov K G, Telegdi V L. AmJPh, 2000, 68: 115
[8] Danzmann K, Rudiger A. CQGra, 2003, 20: S1
[9] Perryman M A C, de Boer K S, Gilmore G, et al. A&A, 2001, 369: 339
[10] Triebes K I J, Gilliam L, Harris F, et al. BAAS, 1999, 31: 1505
[11] Ni W T. IJMPD, 2002, 11: 947
[12] Ni W T, Zhu J, Wu X P, et al. IJMPD, 2003, 11: 1035
[13] Xie Y, Huang T Y. PhRvD, 2008, 77: 124049
[14] Xie Y, Ni W T, Dong P, et al. AdSpR, 2007, 43: 171
[15] 宫衍香, 须重明. 天文学报, 2003, 44: 382
[16] Gong Y X, Xu C M. ChA&A, 2004, 28: 1
[17] 肖昱, 费保俊, 孙维瑾, 等. 天文学报, 2008, 49: 192
[18] Xiao Y, Fei B J, Sun W J, et al. ChA&A, 2008, 32: 423
[19] 孙维瑾, 费保俊, 肖昱, 等. 天文学报, 2008, 49: 198
[20] Sun W J, Fei B J, Xiao Y, et al. ChA&A, 2008, 32: 400
[21] 唐肇华, 刘素芸, 翁甲强. 广义相对论导论. 桂林: 广西师范大学出版社, 1997: 118-121
[22] 温伯格著, 邹振隆译. 引力论和宇宙论: 广义相对论的原理和应用. 北京: 科学出版社, 1980: 208-215

Post-post-Newtonian Amendments for Radar Echo Delay Test in the Reissner-Nordström Field

GONG Yan-xiang
(*Department of Physics and Electronics, Taishan University, Taian 271021*)

Abstract From the kinetic differential equations of the photon in the equatorial plane of the spherical symmetrical gravity field, the post-post-Newtonian amendments for radar echo delay test in the Reissner-Nordström field are discussed using the post-Newtonian approximation method. The amendatory results of post-Newtonian order and post-post-Newtonian order are deduced in this paper. When the charge Q is equal to zero, the results are applicable to neutral celestial objects. The post-Newtonian amendatory parts are consistent with the classical literature. The approximation method used in this paper can also be used to discuss the amendments with higher orders. The high-order amendments for radar echo delay test have important significances to the ongoing high-precision spatial gravitation test.

Key words gravitation, Sun, Earth, waves, methods: analytical