

# 环火卫星运动的坐标系附加摄动及相应坐标系的选择\*

刘 林<sup>1,2,3†</sup> 赵玉晖<sup>1,2</sup> 张 巍<sup>1,2</sup> 王彦荣<sup>3</sup> 王家松<sup>3</sup>

(1 南京大学天文系 南京 210093)

(2 南京大学空间环境与航天动力学研究所 南京 210093)

(3 宇航动力学国家重点实验室 西安 710043)

**摘要** 与处理地球卫星相关问题类似, 在研究和处理环火卫星 (尤其是低轨卫星) 的轨道问题时, 宜采用火心历元平赤道坐标系, 即火心天球坐标系, 其  $xy$  坐标面和  $x$  轴方向就是相应的平赤道面和平春分点方向. 与地球的岁差章动现象类似, 在该坐标系中, 火星赤道面在空间的摆动同样会引起坐标系附加摄动. 采用类似对地球岁差章动的处理方法, 在一定精度前提下, 基于 IAU2000 火星定向模型, 处理了火星赤道面摆动中的岁差效应, 并在此基础上, 研究岁差对环火卫星轨道的影响, 给出了相应的火星非球形引力位的变化及其导致的卫星轨道的坐标系附加摄动解, 其表达形式简单, 引用方便. 与高精度数值解的比对表明, 该分析解能够满足通常的精度要求. 因此, 在处理环火卫星 (即使是低轨卫星) 轨道及其相关问题时, 可以采用统一坐标系: 火心天球坐标系. 而不必像当初处理地球卫星那样, 为了避免计算坐标系附加摄动而引进一种混合型赤道坐标系, 即采用瞬时真赤道面和历元平春分点方向作为其  $xy$  坐标面和  $x$  轴方向. 在统一坐标系的选择下, 实际工作中就不会存在坐标系转换的麻烦.

**关键词** 天体力学, 参考系, 方法: 分析, 方法: 数值

**中图分类号:** P 134; **文献标识码:** A

## 1 引言

人造地球卫星以及环绕其它大行星 (包括月球之类的较大的自然卫星) 的探测器, 在环绕中心天体的运动过程中, 主要力源是中心天体的非球形引力. 因此, 在处理这类人造天体的运动及其相关问题时, 采用中心天体的质心赤道坐标系是一个很自然的选择, 赤道面就是该坐标系的基本坐标面 ( $xy$  坐标面), 相应的中心天体引力位就是在这种坐标系中建立的. 该坐标系分为两类: 基本坐标轴 ( $x$  轴) 与中心天体固连的星固坐标系和选择空间某一特定方向 (如春分点方向) 的天球坐标系. 由于中心天体的赤道面在空间摆动, 这就引起了坐标系选择的复杂性. 在处理地球卫星的轨道问题时, 曾采用两种地心赤道

2010-01-25 收到原稿, 2010-03-01 收到修改稿

\* 国家自然科学基金项目 (10673006) 和宇航动力学国家重点实验室课题资助

† lliu@nju.edu.cn

坐标系: 历元地心平赤道坐标系 (即对应上面所说的地心天球坐标系) 和混合型的轨道坐标系. 后一种坐标系是选择真赤道面和历元平春分点方向作为  $xy$  坐标面和  $x$  轴方向, 引进该坐标系是为了避免计算因地球赤道面摆动引起引力位的变化而导致坐标系附加摄动的麻烦, 但却带来了两种坐标系的不统一和转换的麻烦<sup>[1-4]</sup>. 然而, 对该问题作进一步的分析 and 处理后, 从某种角度来看, 可以放弃采用混合型的轨道坐标系, 在处理人造地球卫星运动的各类问题中, 就采用统一的历元 (J2000.0) 地心天球坐标系<sup>[5-6]</sup>.

在研究和处理环火卫星的轨道问题时, 对于低轨 (包括距离不太远的高轨) 问题, 同样应当选取火心赤道坐标系. 与地球类似, 火星赤道面在空间也有摆动, 即存在岁差、章动现象. IAU2000 火星定向模型基于火心 J2000.0 地球平赤道坐标系给出了火星赤道面在空间摆动的长周期项, 即岁差项. Pathfinder 火星定向模型基于火心 J1980.0 平轨道给出了火星赤道面在空间摆动的岁差、章动项. 本文采用 IAU2000 的定向模型, 在此基础上构造了火心天球坐标系中卫星运动所承受的坐标系附加摄动分析解, 并通过与高精度数值解的比对证实它能满足有关火星探测的精度要求. 那么, 在开展火星探测的各相关航天任务中, 就选择统一的空间坐标系: 目前采用历元 J2000.0 的火心平赤道坐标系, 简称火心天球坐标系.

注意, 这里提到两个赤道坐标系: 火心 J2000.0 地球平赤道坐标系和历元 J2000.0 的火心平赤道坐标系, 读者从下面第 2 节中的图 1 即可分清, 前者是将通常所说的历元 J2000.0 的地心平赤道坐标系中的坐标原点地心平移至火心 (火星质心), 引进它的必要性不再解释, 而后者才是处理环火卫星的轨道问题直接采用的空间坐标系.

## 2 火星定向模型及岁差现象

火星是一颗类地行星, 在许多方面有着与地球类似的性质. 火星有两颗自然卫星: 火卫一和火卫二. 对火星定向模型的研究, 可以将对地球的定向模型研究由地球延伸到火星. 同样由于太阳系其他天体的引力影响, 火星的赤道面在空间摆动, 这种摆动包括周期较长的岁差现象和周期较短的章动现象. 火星的岁差类似于地球岁差, 由于太阳和火星卫星对火星赤道隆起部分的引力产生的火星“日月岁差”可以基于地面或者空间探测器的观测获得; 而由于太阳系其他大行星对火星公转运动的摄动而产生的火星“行星岁差”则相对小很多.

岁差速率是指由岁差引起的火星自转轴在天球上指向的变化率, 其值由理论模型计算和观测资料得到<sup>[7]</sup>. 由于火星极惯量矩系数的不确定, 至今火星岁差速率的理论值仍不确定. Yoder 等<sup>[8]</sup>在 1997 年基于 Viking 火星探测器的观测资料给出火星岁差速率值为  $-7.83 \pm 0.30$  arcsec/yr, 同一年 Folkner 等<sup>[9]</sup>基于 Mars Pathfinder 的观测资料给出火星岁差速率值为  $-7.576 \pm 0.053$  arcsec/yr. 与地球的卫星 (月球) 相比, 火星的两颗卫星火卫一和火卫二的质量相对很小, 其轨道面非常接近火星赤道面<sup>[10]</sup>, 引起的火星岁差项相比地球自然卫星 (月球) 引起的地球岁差项小很多.

火星章动最大项是由太阳引起的, 其摆幅的大小只有  $1''$ , 在 IAU2000 规范中也没有包括章动项. 根据章动项的大小及其对卫星轨道的影响性质<sup>[4]</sup>, 对于本文所论述的问

题以及相应的实际应用中可不必考虑章动效应. 因此, 下文中不再提及章动问题, 并在 IAU2000 火星定向模型的基础上构造坐标系附加摄动分析解.

IAU2000 火星定向模型相对 ICRF (International Celestial Reference Frame) 系统给出, 原点位于火星质心, 基本平面为火星瞬时平赤道面, 基本方向  $B$  为火星本初子午线 (或称主子午线) 与火星瞬时平赤道的交点 (见图 1), 其位置由火星瞬时平赤道与 J2000.0 地球平赤道的升交点起始计量, 即自  $Q$  沿火星赤道向东计量至  $B$  的弧长  $W$ , 计算公式如下:

$$W = 176.630^\circ + 350.89198226^\circ d, \quad (1)$$

其中,  $d$  为自 J2000.0 起算的儒略日. 角度  $W$  可看作火星上的“恒星时”, 相应的火星自转矩阵即为

$$R_{\text{IAU}}(t) = R_z(W). \quad (2)$$

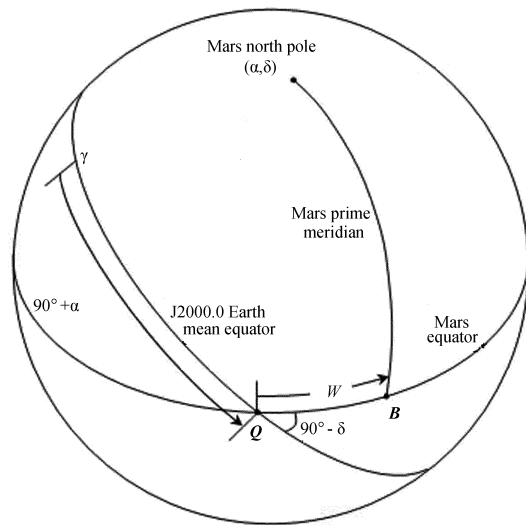


图 1 IAU 火星定向模型

Fig. 1 IAU Mars orientation model

IAU2000 火星定向模型给出因岁差原因火星平天极在火心天球坐标系中赤经、赤纬 (见图 1) 的变化关系<sup>[11]</sup> 为

$$\begin{aligned} \alpha &= 317.68143^\circ - 0.1061^\circ T \\ \delta &= 52.88650^\circ - 0.0609^\circ T \end{aligned} \quad (3)$$

$T$  为自 J2000.0 起算的儒略世纪数, (3) 式给出类似的地球岁差的长期 (长周期) 变化. 对于历元 J2000.0, 有

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 317.68143^\circ \\ \delta_0 &= 52.88650^\circ \end{aligned} \quad (4)$$

在 IAU2000 定向模型下, 瞬时火星平赤道坐标系即为瞬时火星真赤道坐标系. 由于不考虑章动项, 那么下文中将不再区分火星的真赤道面与平赤道面, 只有历元 (J2000.0) 赤道面与瞬时赤道面之分. 它们之间的差别即岁差, 空间相对几何关系见图 2.

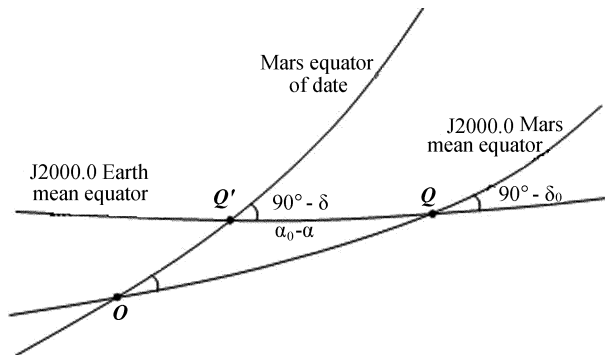


图 2 IAU2000 火星定向模型给出的火星平赤道变化示意图

Fig. 2 Movement of Mars mean equator based on IAU2000 Mars orientation model

### 3 火固坐标系与火心天球坐标系之间转换关系

对于距离火星不太远的火星卫星, 其受到的主要摄动是火星非球形引力摄动. 火星非球形引力位是在火固坐标系中建立的, 而对于火星探测的有关问题, 需要在火心天球坐标系中构造卫星轨道分析解. 在该坐标系中, 火星的岁差章动会引起火星非球形引力位的相应变化, 这就必须考虑此变化导致的卫星轨道所承受的坐标系附加摄动影响.

对于坐标系附加摄动问题, 要涉及到火固坐标系与火心平赤道坐标系之间的转换, 两个坐标系之间的差异是由岁差、章动、极移和火星自转引起的. 但章动和极移量相对较小, 且对轨道的影响又无累积效应, 对于一般精度要求, 可不考虑. 而岁差这一长周期项效应, 10 yr 时间的变化可达到  $10^{-4}$ , 那么通过  $J_2$  项引起的坐标系附加摄动量级可达  $10^{-6} \sim 10^{-7}$ , 由于该摄动影响的特征, 对环火卫星轨道的影响是长周期效应, 在相关问题中必须予以考虑. 因此在本文要解决的坐标系附加摄动问题中, 只要考虑  $t$  时刻的火心瞬时平赤道坐标系与历元火心平赤道坐标系之间的转换关系.

采用 IAU2000 火星定向模型, 类似处理地球卫星的坐标系附加摄动问题, 引进符号  $\vec{R}$  和  $\vec{r}$  分别表示在火固坐标系和火心天球坐标系中卫星的位置矢量, 在不考虑章动和极移的情况下, 它们之间的转换关系如下:

$$\vec{R} = (MP)\vec{r} = (MR)(PR)\vec{r}, \quad (5)$$

其中  $(MR)$  是火星自转矩阵  $R_{\text{IAU}}(t)$ , 见 (2) 式,  $(PR)$  是火星岁差矩阵.

如图 1 示意的 IAU2000 定向模型, 基于火心地球历元平赤道坐标系给出火星自转轴在空间的摆动, 相应的岁差矩阵可以表示为下列形式:

$$(PR) = R_x(90^\circ - \delta)R_z(-(\alpha_0 - \alpha))R_x(\delta_0 - 90^\circ), \quad (6)$$

在求解火星卫星轨道的坐标系附加摄动时, 可借鉴地球卫星轨道坐标系附加摄动对上述转换矩阵的处理方法, 在满足一定精度前提下作合理简化. 根据 (3) 式可知, 在 50 yr 间, 火星平天极的变化较小, 可考虑保留到赤经岁差  $\Delta\alpha = (\alpha - \alpha_0)$  和赤纬岁差  $\Delta\delta = (\delta - \delta_0)$

的一阶量. 为此, 将 (6) 式表达的岁差矩阵改写成下列形式:

$$(PR) = R_x(\theta + \Delta\theta)R_z(-\Delta\mu)R_x(-\theta), \quad (7)$$

其中

$$\theta = 37.11350^\circ, \quad (8)$$

$$\Delta\theta = 0.0609^\circ T, \quad \Delta\mu = 0.1061^\circ T. \quad (9)$$

利用上述火星自转矩阵 ( $MR$ ) 和岁差矩阵 ( $PR$ ), 准确到一阶岁差量时, 容易给出火星固坐标系和火心天球坐标系中卫星位置矢量  $\vec{R}$  与  $\vec{r}$  之间的简单转换关系. 略去推导过程, 直接列出转换关系 (5) 式的简化形式如下:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (MP)\vec{r} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ z - (\Delta\mu \sin \theta)x - (\Delta\theta)y \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x \cos W + y \sin W) + \cos W [ -(\Delta\mu \cos \theta)y + (\Delta\mu \sin \theta)z ] \\ \quad + \sin W [ (\Delta\mu \cos \theta)y + (\Delta\theta)z ] \\ (-x \sin W + y \cos W) - \sin W [ -(\Delta\mu \cos \theta)y + (\Delta\mu \sin \theta)z ] \\ \quad + \cos W [ (\Delta\mu \cos \theta)y + (\Delta\theta)z ] \end{pmatrix}, \quad (11)$$

这一转换关系就是本文要给出火星轨道坐标系附加摄动分析解的依据. 火星非球形引力位中带谐项  $J_l$  ( $l \geq 2$ ) 的附加摄动与火星自转无关, 仅涉及上述  $Z$  分量, 有

$$Z = z - [(\Delta\mu \sin \theta)x + (\Delta\theta)y], \quad (12)$$

其中

$$\Delta\mu \sin \theta = 0.0640^\circ T, \quad \Delta\theta = 0.0609^\circ T, \quad (13)$$

上述关系式 (10)~(13), 就是用来建立因赤道面摆动而引起的火星非球形引力附加位的基本关系式.

#### 4 火星非球形引力位中主要项的附加摄动位

在对火星天球坐标系附加摄动的求解中, 为了便于讨论问题和对各物理量相对大小的比较, 文章中全部公式表达均以无量纲形式给出, 这里采用通常选择的归一化单位: 长度单位  $[L]$ 、质量单位  $[M]$  和时间单位  $[T]$  分别为

$$\begin{cases} [L] = a_e & (a_e \text{ 是火星参考椭球体的赤道半径}) \\ [M] = M & (M \text{ 是火星质量, 其数值由 } GM \text{ 值给出}) \\ [T] = (a_e^3/GM)^{\frac{1}{2}} \end{cases}, \quad (14)$$

在此计算单位中, 引力常数  $G = 1$ , 火星引力常数  $\mu = GM = 1$ . 若采用基于 IAU2000 火星定向模型给出的美国哥达德火星引力场模型 GMM-2B, 则有

$$\begin{cases} a_e = 3397.0 \text{ km} \\ GM = 42828.3719 \text{ km}^3/\text{s}^2 \\ [T] = 15.945064755181 \text{ min} \end{cases}, \quad (15)$$

这仅是一种计算单位的选择, 并不涉及具体精度问题. 不过, 即使改用火星的其他引力场模型, 上述标准单位具体值的差别也很小, 不会改变各物理量的量级, 对分析问题毫无影响. 至于在具体问题中到底采用何种引力场模型, 将不会改变这篇文章的结论.

由于火星的岁差量级不大, 对于环火卫星轨道的坐标系附加摄动, 只需要给出非球形引力位中主要带谐项  $J_2$  项的附加摄动即可. 相应的非球形引力位的表达式如下:

$$V(J_2) = \left(-\frac{J_2}{a^3}\right) (a/R)^3 \left[\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{Z}{R}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\right], \quad (16)$$

不难看出  $R = r$ , 因此在本文涉及的问题中, 上述火固坐标系与火心天球坐标系之间的转换, 除忽略掉极移和章动两个因素外, 与火星自转无关. 代替严格转换关系的 (12) 式就是我们构造  $J_2$  项坐标系附加摄动解所需要的转换关系.

将 (12) 式代入  $J_2$  项的引力位 (16) 式, 给出

$$\begin{aligned} V(J_2) = & \left(-\frac{J_2}{a^3}\right) \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left[\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{z}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\right] + \\ & 3 \left(\frac{J_2}{a^3}\right) \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(\frac{z}{r}\right) \left[(\Delta\mu \sin \theta) \left(\frac{x}{r}\right) + (\Delta\theta) \left(\frac{y}{r}\right)\right], \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{cases} (z/r) = \sin i \sin u \\ (x/r) = \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i \\ (y/r) = \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i \end{cases}, \quad (18)$$

这里  $u = f + w$ ,  $a, i, \Omega, \omega, f$  等均为卫星轨道根数 (Kepler 椭圆根数) 的常用符号. 由此可以得到火心天球坐标系中附加摄动位的表达式如下:

$$\begin{aligned} \Delta V(J_2) = & (3J_2/2a^3) (a/r)^3 \sin i \{ \cos i [(\Delta\theta) \cos \Omega - (\Delta\mu \sin \theta) \sin \Omega] + \\ & [(\Delta\mu \sin \theta) \cos \Omega + (\Delta\theta) \sin \Omega] \sin 2u + \\ & \cos i [(\Delta\mu \sin \theta) \sin \Omega - (\Delta\theta) \cos \Omega] \cos 2u \}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中岁差量距离标准历元 (J2000.0) 10~20 yr 时会达到  $10^{-4}$  的量级 (见 (13) 式). 由此可知  $J_2$  项坐标系附加摄动的量级为  $10^{-7}$ . 另一主要带谐项  $J_{2,2}$  的坐标系附加摄动, 其影响至少比  $J_2$  项的上述影响小一个量级, 通常可不考虑, 如果在某些有高精度要求的问题中需要给出这一影响, 所涉及的  $(X, Y)$  与  $(x, y)$  的转换关系已由 (11) 式给出, 不再论述.

## 5 $J_2$ 项坐标系附加摄动解

将坐标系附加摄动位  $\Delta V(J_2)$  分解, 分离出长、短周期部分  $\Delta V_l$  和  $\Delta V_s$ , 有

$$\Delta V(J_2) = \Delta V_l + \Delta V_s, \quad (20)$$

其中长、短周期部分的具体表达形式如下:

$$\Delta V_l = \left( \frac{3J_2}{2a^3} \right) (1 - e^2)^{-3/2} \sin i \cos i [(\Delta y \cos \theta_0) \cos \Omega - (\Delta y \sin \theta_0) \sin \Omega], \quad (21)$$

$$\Delta V_s = \Delta V(J_2) - \Delta V_l. \quad (22)$$

根据上述附加摄动位  $\Delta V_l$  和  $\Delta V_s$  可知, 火星  $J_2$  项坐标系附加摄动对环火卫星运动轨道只有长、短周期影响. 不过, 这里的长周期项  $\Delta V_l$  由于岁差量  $\Delta y$  的变化, 实质上是混合型的泊松项, 但是  $\Delta y$  的变化很缓慢, 对于任一时刻  $t$  的卫星轨道问题, 完全可以将该  $t$  时刻  $\Delta y$  的相应值作为不变量来处理. 就短周期项而言, 只需考虑对轨道半长径的影响, 有

$$a_s(t) = 2a^2 \Delta V_s, \quad (23)$$

采用第一类无奇点根数

$$a, i, \Omega, \xi = e \cos \omega, \eta = e \sin \omega, \lambda = \omega + M. \quad (24)$$

用拟平均根数法构造摄动解, 略去推导过程, 直接给出  $J_2$  项坐标系附加摄动的长周期变化项  $\Delta \sigma(t) = \sigma_l(t) - \sigma_l(t_0)$ ,  $\sigma_l(t)$  的具体形式比较简单, 即

$$a_l(t) = 0, \quad (25)$$

$$i_l(t) = I, \quad (26)$$

$$\Omega_l(t) = (-2 \cot 2i) H, \quad (27)$$

$$\xi_l(t) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1 - 5 \sin^2 i}{\sin i} \right) [(\xi I + \eta H) / \alpha_1 - (\xi I - \eta H) / \alpha_2], \quad (28)$$

$$\eta_l(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - 5 \sin^2 i}{\sin i} \right) [(\xi H - \eta I) / \alpha_1 + (\xi H + \eta I) / \alpha_2], \quad (29)$$

$$\lambda_l(t) = \left( \frac{1}{\sin i} - (5 + 3\sqrt{1 - e^2}) \sin i \right) H, \quad (30)$$

其中

$$I = [(\Delta \theta) \cos \Omega - (\Delta \mu \sin \theta) \sin \Omega], \quad (31)$$

$$H = [(\Delta \mu \sin \theta) \cos \Omega + (\Delta \theta) \sin \Omega], \quad (32)$$

$$\alpha_1 = 1 - \omega_1/\Omega_1, \quad \alpha_2 = 1 + \omega_1/\Omega_1. \quad (33)$$

这里出现的  $\omega_1$  和  $\Omega_1$  就是  $J_2$  项摄动中轨道根数  $\omega$  和  $\Omega$  长期变化的一阶变率, 其具体形式为

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{3J_2}{2p^2}n \left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right), \quad \Omega_1 = -\frac{3J_2}{2p^2}n \cos i, \\ n &= a^{-3/2}, \quad p = a(1 - e^2). \end{aligned} \quad (34)$$

上述各式右端出现的轨道根数  $a, i, \Omega, \xi, \eta, e^2 = \xi^2 + \eta^2$ , 均为消除短周期变化项的拟平均根数  $\bar{\sigma}(t) = \sigma_l(t) - \sigma_s(t)$ , 正因为如此, 除上述长周期变化项外, 还有拟平均根数法特有的“间接”附加项, 主要表现在  $\Omega$  和  $\lambda$  两个根数上, 以长期项的形式出现, 即

$$\Delta\Omega_c(t) = -\frac{1}{2}H \sin i \left[ \left( \frac{3J_2}{2p^2}n(t-t_0) \right) \Omega_1(t-t_0) \right], \quad (35)$$

$$\Delta\lambda_c(t) = \frac{1}{2}H \left(5 + 3\sqrt{1-e^2}\right) \sin i \cos i \left[ \left( \frac{3J_2}{2p^2}n(t-t_0) \right) \Omega_1(t-t_0) \right]. \quad (36)$$

## 6 数值验证和结论

采用平均高度为 300 km 的火星低轨卫星, 对其轨道进行外推计算, 采用高精度的数值解(由 RKF 积分器提供)作为检验标准. 轨道外推时间为 1 个地球日(1 400 min, 约为该轨道的 13 个周期), 初始轨道根数取如下两组:

$t_0$  为 UTC 时间 2012 年 9 月 9 日 0 时 0 分 0 秒,

- (1)  $a = 3685.8362$  km,  $e = 0.00468819$ ,  $i = 92.580981^\circ$ ,  
 $\Omega = 44.995808^\circ$ ,  $\omega = 269.779851^\circ$ ,  $M = 0.321671^\circ$ ,
- (2)  $a = 3685.8362$  km,  $e = 0.00468819$ ,  $i = 42.580981^\circ$ ,  
 $\Omega = 44.995808^\circ$ ,  $\omega = 269.779851^\circ$ ,  $M = 0.321671^\circ$ .

外推时间长度 1 400 min(非整周期)和两种轨道倾角, 一是为了体现短周期摄动效应的状态, 另一是不同轨道倾角对坐标系附加摄动的影响. 两组外推结果分别列于表 1 和表 2.

表 1 数值法与分析法(拟平均根数法)结果比较(1)

Table 1 Comparison of numerical method and analytical method (quasi average element method) (1)

Method	$a$ (km)	$e$	$i$ ( $^\circ$ )	$\Omega$ ( $^\circ$ )	$\omega$ ( $^\circ$ )	$\lambda$ ( $^\circ$ )
A	3696.505	0.008006	92.57730	45.50652	273.17394	139.59795
B	3696.505	0.008010	92.57731	45.50651	273.18310	139.59700
C	3696.505	0.008006	92.57721	45.50658	273.17591	139.59790
D	3696.505	0.008010	92.57721	45.50656	273.18311	139.59700

表 2 数值法与分析法(拟平均根数法)结果比较(2)

Table 2 Comparison of numerical method and analytical method (quasi average element method) (2)

Method	$a$ (km)	$e$	$i$ ( $^{\circ}$ )	$\Omega$ ( $^{\circ}$ )	$\omega$ ( $^{\circ}$ )	$\lambda$ ( $^{\circ}$ )
A	3694.144	0.004596	42.65111	36.60267	259.08655	173.74786
B	3694.144	0.004597	42.65115	36.60278	259.17323	173.74756
C	3694.144	0.004596	42.65275	36.60277	259.08538	173.74738
D	3694.145	0.004597	42.65279	36.60291	259.17402	173.74712

表中方法 A、B、C 和 D 的含义如下:

- (A) 仅考虑火星  $J_2$  项的影响, 用数值法进行轨道外推;
- (B) 仅考虑火星  $J_2$  项的影响, 用分析法进行轨道外推;
- (C) 考虑  $J_2$  项和岁差引起的坐标系附加摄动影响, 用数值法进行轨道外推;
- (D) 考虑  $J_2$  项和岁差引起的坐标系附加摄动影响, 用分析法进行轨道外推.

由表 1~2 列出的计算结果可以看出以下几点:

(1) 在精度要求较高的前提下, 火星岁差引起的坐标系附加摄动确实应该考虑, 上述计算中, 是对应 2012 年的状况, 随着时间的推移, 其影响还会增大;

(2) 仅考虑火星非球形引力位  $J_2$  项的摄动影响, 一阶意义下的分析解确实可以达到  $10^{-5}$  的精度要求 (主要表现在沿迹量上, 见  $\lambda$  的结果);

(3) 考虑火星岁差引起的坐标系附加摄动后, 一阶意义下的分析解精度仍能保持原水平;

(4) 坐标系附加摄动主要表现在轨道平面以及沿迹量上 (见  $i$ 、 $\Omega$  和  $\lambda$  的结果), 轨道倾角的影响也有所体现, 原因可由坐标系附加摄动解的主要部分 (长周期变化项) 看出, 见附加摄动解表达式 (27)~(30) 式. 长周期变化的大小依赖于轨道根数  $\Omega$  的变化, 而其变化速率  $\dot{\Omega}$  (即 (34) 式中的  $\Omega_1$ ) 的大小就取决于轨道倾角的状况,  $i = 42.0^{\circ}$  对应的  $\dot{\Omega}$  明显大于  $i = 92.0^{\circ}$  对应的  $\dot{\Omega}$ , 这就是前面对轨道初值的选取采用两组的原因, 可以更清楚地体现坐标系附加摄动影响的细节.

根据上述研究和对坐标系附加摄动分析解的精度检验结果证实将来的相关航天任务, 就轨道问题而言, 拟采用单一的火心天球坐标系 (目前的历元就是 J2000.0), 没有必要像当初处理地球卫星的同类问题那样, 引进混合型的轨道坐标系.

## 参 考 文 献

- [1] Kozai Y. AJ, 1960, 65: 621
- [2] Lambeck K. CeMec, 1973, 7: 139
- [3] Kozai Y, Kinoshita H. CeMec, 1973, 7: 356
- [4] 刘林. 人造地球卫星轨道力学. 北京: 高等教育出版社, 1992
- [5] 刘林, 汤靖师. 空间科学学报, 2008, 28: 164
- [6] 汤靖师, 刘林. 天文学报, 2010, 51: 75

- [7] 夏一飞, 张承志. 天文学进展, 2002, 20: 350
- [8] Yoder C F, Standish E M. JGR, 1997, 102: 4065
- [9] Folkner W M, Yoder C F, Yuan D N, et al. Sci, 1997, 278: 1749
- [10] Murray C D, Dermott S F. Solar System Dynamics. New York: Cambridge University Press, 1999
- [11] Seidelmann P K, Archinal B A, A'Hearn M F, et al. CeMDA, 2007, 98: 155

## The Coordinate Additional Perturbations to Mars Orbiters and the Choice of Corresponding Coordinate System

LIU Lin<sup>1,2,3</sup>    ZHAO Yu-hui<sup>1,2</sup>    ZHANG Wei<sup>1,2</sup>    WANG Yan-rong<sup>3</sup>

WANG Jia-song<sup>3</sup>

(1 *Astronomy Department, Nanjing University, Nanjing 210093*)

(2 *Institute of Space Environment and Astrodynamics, Nanjing University, Nanjing 210093*)

(3 *State Key Laboratory of Astronautic Dynamics, Xi'an 710043*)

**ABSTRACT** Similar to the study of the related problems of Earth satellites, in the research of the motion of Mars orbiter especially for low orbit satellites, it is more appropriate to choose an epoch Mars-centered and Mars-equator reference system, which indeed is called the Mars-centered celestial coordinate system. In this system, the  $xy$  plane and the direction of the  $x$  axis correspond to the mean equator and mean equinox. Similar to the precession and nutation on the Earth, the wiggling of instantaneous Mars equator causes the coordinate additional perturbations in this Mars coordinate system. The paper quotes a method which is similar to the one used in dealing with the coordinate additional perturbations of Earth. According to this method, based on the IAU2000 Mars orientation model and under the precondition of a certain accuracy, we are able to figure out the precession part of the change of Mars gravitation. This lays the foundation for further study of its influence on the Mars orbiter's orbit of precession and the solution of the corresponding coordinate additional perturbations. The obtained analytical solution is easy to use. Compared with the numerical solution with higher accuracy, the result shows that the accuracy of this analytical solution could satisfy general requirements in use. Therefore, our result verifies that a unified coordinate system, the Mars-centered celestial system in which J2000.0 is chosen as its current initial epoch, could be applied to deal with the relative problems of Mars orbiters, especially for low orbit satellites. It is different from the method we previously used in dealing with the corresponding problems of Earth satellites, where we adopted the instantaneous equator and epoch (J1950.0) mean equinox as  $xy$  plane and the direction of  $x$  axis. In contrast, the coordinate transformation brings heavy workload and certain inconvenience in relative former works in which the prior system is used. If adopting the unified coordinate system, the transformation could be simply avoided and the computation load could be decreased significantly.

**Key words** celestial mechanics, reference systems, methods: analytical, methods: numerical