

相对论性快电子分布等离子体纵振荡的色散关系*

国洪梅[†] 刘三秋

(南昌大学物理系 南昌 330031)

摘要 在相对论性情况下, 从等离子体纵介电常数出发, 推导出无磁化、无碰撞、各向同性的快电子分布等离子体纵振荡的色散方程. 对纵振荡的色散方程进行解析分析, 得到长波支和短波支的色散关系. 由于解析色散曲线的不连续性, 直接对无量纲化的纵振荡色散方程进行数值计算, 得到相对论性快电子分布等离子体纵振荡完整的色散曲线. 对数值结果进行拟合, 得到简单的色散函数表述以便于应用. 并在极端相对论条件下, 将这种分布与经典 Maxwell 分布的色散关系进行比较, 得出两种分布情况下纵振荡的色散关系在一定的波数范围内有类似的性质.

关键词 等离子体, 相对论性过程, 方法: 诸多方面

中图分类号: P 142; **文献标识码:** A

1 引言

在宇宙中, 等离子体是物质存在的主要形式, 占宇宙中物质总量的 99% 以上, 如地球的电离层和磁层、行星际空间的太阳风、太阳的大气、某些磁变星、星际物质以及星系际物质等, 都是等离子体. 宇宙间存在各种不稳定过程, 因而在等离子体中经常会激起各种波动, 形成复杂的湍动状态. 等离子体中许多现象和过程的机制都与其中波的不稳定性有关, 而等离子体的色散关系是研究等离子体不稳定性的关键. 色散关系给出了集体扰动的频率和波矢之间的关系, 决定了波的模式, 满足色散关系的波其能量激发最大. 利用色散关系, 不但可以研究波的不稳定性问题, 还可以研究波的传播和衰减问题^[1-2], 弄清等离子体中波的色散关系可以为相互作用过程中哪些波之间能够发生相互作用, 以及具体物理过程中哪种波会起主要作用提供理论上的判据. 此外, 在波粒和波波相互作用过程中需要满足能量和动量守恒的条件, 这就为研究波粒和波波相互作用提供了理论的指导. 由此可知研究等离子体色散关系是非常有意义的.

Bergman 等^[3] 得到了玻尔兹曼分布下相对论性等离子体中线性波色散关系的解析和数值结果. 陈辉等^[4]、陈约奇等^[5] 对相对论性费米分布下简并等离子体的色散关系

2009-12-08 收到原稿, 2010-01-13 收到修改稿

* 中国科学技术部国际科技合作项目 (2009DFA02320) 及国家自然科学基金项目 (10963002) 资助

[†] sqlgroup@ncu.edu.cn

做了数值模拟. 本文研究的是无磁化、无碰撞、各向同性的相对论性快电子分布等离子体中纵振荡的色散关系. 我们称这种分布为准平衡分布或标准分布. 在宇宙等离子体的康普顿湍动反应堆和同步加速湍动反应堆中, 常会形成这种形式的幂律分布^[6]. 这种相对论性快电子的平均能量 $\varepsilon_* \gg mc^2$, m 和 c 分别为电子的静止质量和光速, 这给研究中对参数的选取提供了参考依据. 在宇宙等离子体中, 研究这种相对论性快电子分布的色散关系能为解释星系核、射电星系和类星体电磁辐射方面的问题提供理论参考.

2 等离子体纵振荡的色散方程

在等离子体中, 如果平衡温度足够高, 或者电子速度接近于光速, 这时等离子体具有明显的相对论效应. 由于电子和离子的质量相差悬殊, 此时离子可看成是处在非相对论状态, 可以忽略离子对高频现象的贡献. 对于无磁化、无碰撞的相对论性等离子体, 在研究各向同性的纵介电常数时, 假定扰动传播方向: $\mathbf{k} = k\hat{z}$, 从等离子体动力学出发, 联立相对论性 Vlasov 方程和 Maxwell 方程可得出纵介电常数 (只研究电子)^[7]

$$\varepsilon_k^l = 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v_z^2}{\omega - kv_z + i\varepsilon} \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \varepsilon}, \quad (1)$$

其中 \mathbf{k} 为波矢量, $f_{\mathbf{p}}$ 为相对论性电子在动量空间的分布函数, e 为电子的带电量, ω 为角频率.

引进约化速度 $\mathbf{u} = \mathbf{p}/mc = \gamma\mathbf{v}/c$; 相对论因子 $\gamma = \sqrt{1+u^2}$. 以 $(\mathbf{u}, \theta, \varphi)$ 组成球坐标, 这时 $v_z = cu \cos\theta/\gamma$, 而且 $d\mathbf{p} = (mc)^3 u^2 du (-d\cos\theta)d\varphi$. 因此 (1) 式化为

$$\varepsilon_k^l = 1 - \frac{8\pi^2 e^2 c}{\omega k} (mc)^3 \int_0^\infty du \frac{u^3}{\gamma} \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \varepsilon} \int_{-1}^1 \frac{x^2}{x - \frac{\gamma}{u} v_p - i\varepsilon} dx, \quad (2)$$

其中 $v_p \equiv \omega/kc$, $x = \cos\theta$.

3 相对论性快电子的分布函数

当相对论粒子碰撞很少时, 这种粒子在宇宙条件下就不服从 Maxwell 分布. 大量观测资料表明, 在高能区相对论电子的分布函数几乎总是按幂律形式随能量增加而减小:

$$f_\varepsilon \propto \varepsilon^{-a_0}, \quad (3)$$

其中 a_0 为常数, 近似为 2.6. 在低能区, 很难观测到 f_ε , 自然可以预期在某个能值 ε_* 处函数 f_ε 达到极大, 然后随能量减小而减小. 那么在小能量情况下, 就应该有

$$f_\varepsilon \propto \varepsilon^2, \quad (4)$$

这里依然假定 $\varepsilon_* \gg mc^2$.

相对论性快电子的能量分布函数近似为如下公式^[6]:

$$f_\varepsilon = \frac{a_0(a_0^2 - 1)n_0\varepsilon_*^{a_0-1}\varepsilon^2}{2(\varepsilon_* + \varepsilon)^{a_0+2}}, \quad (5)$$

n_0 为相对论电子的数密度, 分布函数 f_ε 满足归一化条件 $\int_0^\infty f_\varepsilon d\varepsilon = n_0$. 满足这种快电子分布的电子, 其吸收总是超过受激辐射的, 故对所有天体物理的估计 (5) 式有足够的精确度. 分布函数 f_ε 的性质如图 1 所示.

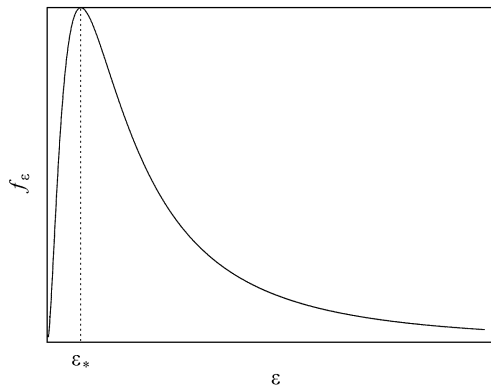


图 1 快电子的能量分布函数

Fig. 1 Energy distribution function of fast electrons

从图 1 可知, 相对论性快电子的分布函数是正态的, 即能量越大的地方, 粒子数密度越小. 当 $\varepsilon \gg \varepsilon_*$ 时, 这个函数的性质与 (3) 式相同, 而当 $\varepsilon \ll \varepsilon_*$ 时, 则与 (4) 式性质相同.

在相对论情况下, 电子的能量为 $\varepsilon = \sqrt{p^2 c^2 + (mc^2)^2} = \gamma mc^2$, 因此平衡分布函数有如下的关系式:

$$f_{\mathbf{p}} = \frac{c^3}{4\pi\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - m^2c^4}} f_\varepsilon. \quad (6)$$

令参数 $d = \varepsilon_*/mc^2$, $\mu = \frac{1}{2}a_0(a_0^2 - 1)d^{a_0-1}$, 将 (5) 式代入 (6) 式得到相对论性快电子在动量空间的分布函数

$$f_{\mathbf{p}} = \frac{\mu n_0}{4\pi(mc)^3} \frac{\gamma}{u(d + \gamma)^{a_0+2}}, \quad (7)$$

由上式可得到

$$\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{mc^2} \frac{\mu n_0}{4\pi(mc)^3} \left[-\frac{1}{u^3(d + \gamma)^{a_0+2}} - \frac{(a_0 + 2)\gamma}{u(d + \gamma)^{a_0+3}} \right]. \quad (8)$$

4 色散方程的求解

对透明介质的线性色散方程而言, 介电常数的虚部与其实部相比是很小的, 因此得到波的色散方程 [7] 为

$$\text{Re}\varepsilon_k^\sigma(\omega^\sigma, k) - \frac{k^2 c^2}{[\omega^\sigma(k)]^2} = 0, \quad (9)$$

其中 Re 表示取实部, σ 表示波的模式 ($\sigma = l$ 表纵波, $\sigma = t$ 表横波). 对于等离子体纵振荡,

$$\text{Re}\varepsilon_k^l = 0. \quad (10)$$

联立 (2)、(8) 和 (10) 式得到相对论性快电子分布下纵波的色散方程

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 c^2} \int_0^\infty \left[\frac{\mu}{u^3(d+\gamma)^{(a_0+2)}} + \frac{(a_0+2)\mu\gamma}{u(d+\gamma)^{(a_0+3)}} \right] Gu^2 du = 0, \quad (11)$$

$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m}}$ 是非相对论性电子等离子体频率. 式中,

$$G = 1 - \frac{1}{4} \frac{\gamma}{u} v_p \ln\left(\frac{v_p + u/\gamma}{v_p - u/\gamma}\right)^2 + \frac{i\pi}{2} \frac{\gamma}{u} v_p \theta\left(1 - \frac{\gamma}{u} v_p\right), \quad (12)$$

$\theta(\xi)$ 为阶跃函数: 当 $\xi > 0$ 时, $\theta(\xi) = 1$; $\xi < 0$ 时, $\theta(\xi) = 0$.

由于 G 函数很复杂, 相对论性快电子分布下纵波的色散方程很难进行求解. 取极端相对论条件 $u/\gamma \approx 1$, 在超光速区, 即 $v_p > 1$ 时, 由于 $\gamma v_p/u > 1$, 所以 G 函数的虚部为零, 可将 G 化简为

$$G_0 = 1 - \frac{v_p}{4} \ln\left(\frac{v_p + 1}{v_p - 1}\right)^2, \quad (13)$$

进而将 (13) 式代入方程 (11) 得到相对论性快电子分布下纵振荡的色散方程为

$$\frac{1}{\beta} \frac{k^2 c^2}{\omega_{pe}^2} = \frac{1}{3v_p^2} + \frac{1}{5v_p^4}. \quad (14)$$

参数 $\beta = M + N$, 其中 $M = \mu \int_1^\infty \frac{\gamma}{(\gamma^2 - 1)(d + \gamma)^{(a_0 + 2)}} d\gamma$, $N = \mu(a_0 + 2) \int_1^\infty \frac{\gamma^2}{(d + \gamma)^{(a_0 + 3)}} d\gamma$.

在 $v_p \gg 1$ 时, 可得到色散方程 (14) 的一级近似解

$$v_p^2 \approx \frac{\beta \omega_{pe}^2}{3 k^2 c^2}, \quad (15)$$

再将 (15) 式代入 (14) 式, 得到相对论性快电子分布下纵振荡长波支的色散关系

$$\omega^2 = \frac{\beta \omega_{pe}^2}{3} + \frac{3}{5} k^2 c^2 \quad (\omega \gg kc). \quad (16)$$

在 $v_p > 1$ 且 $v_p \approx 1$ 时, 相对论性快电子分布下纵振荡的色散方程为

$$1 + \frac{\beta \omega_{pe}^2}{k^2 c^2} \left[1 - \frac{1}{4} \ln\left(\frac{v_p + 1}{v_p - 1}\right)^2 \right] = 0. \quad (17)$$

因此, 快电子分布下纵振荡短波支的色散关系

$$\omega = kc \left\{ 1 + 2 \exp\left[-2\left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega_{pe}^2} \frac{1}{\beta}\right)\right] \right\} \quad (\omega \approx kc). \quad (18)$$

这两个分支的相速度都是超光速的, 具有实频率. (16) 式类似于 Langmuir 波的色散关系, 参数 β 值越小, 相对论性就越强.

5 数值计算及分析

引入无量纲参量 $\Omega = \omega/\omega_{pe}$, $K = kc/\omega_{pe}$, 使得 $v_p \equiv \omega/kc = \Omega/K$, 作 $\Omega \rightarrow \omega$ 、 $K \rightarrow k$ 代换, 得到相对论性快电子分布下纵振荡无量纲化的色散关系

$$\Omega = \sqrt{\frac{\beta}{3} + \frac{3}{5}K^2} \quad (\Omega \gg K), \quad (19)$$

$$\Omega = K \left[1 + 2e^{-2(1+K^2/\beta)} \right] \quad (\Omega \approx K). \quad (20)$$

在等离子体湍动反应堆中, 被加速的相对论电子的平均能量 $\varepsilon_* \gg mc^2$, 取 $d = 5$, 此时 $M = 1.67222$, $N = 0.311408$, 则 $\beta = 1.983628$. 根据 (19)~(20) 式的解析形式, 可得到相对论性快电子分布的等离子体中纵振荡的色散曲线如图 2 所示.

图 2 显示相对论性快电子分布下纵振荡的色散曲线是不连续的, 即在一定的区域 ($1 < v_p \leq 10$) 发生中断, 这是解析方法的一个不足. 为了得到完整的色散关系, 现将 G_0 的表达式 (13) 式直接代入 (11) 式, 可得到相对论性快电子分布下无量纲化的纵振荡色散方程

$$\frac{K^2}{\beta} + 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega}{K} \ln\left(\frac{\Omega + K}{\Omega - K}\right) = 0. \quad (21)$$

利用计算机对 (21) 式进行数值求解, 得到比解析结果完整的色散曲线, 如图 3 中的实线所示.

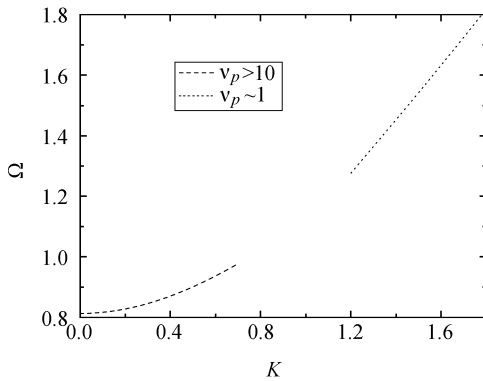


图 2 $d=5$ 时解析的纵振荡色散曲线

Fig. 2 Analytical dispersion curves of the longitudinal oscillation at $d=5$

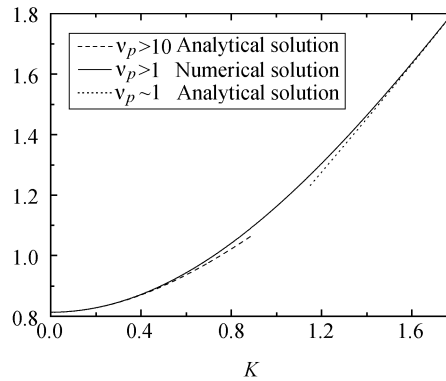


图 3 $d=5$ 时纵振荡色散关系的解析解和数值解

Fig. 3 Analytical and numerical solutions of the dispersion relations of longitudinal oscillation at $d=5$

对比图 2~3 可以得出, 在相对论性快电子分布下等离子体纵振荡中, 数值解和解析

解在 $v_p \gg 1$ 时, 大约 $K \in (0, 0.4)$ 的范围及 $v_p \approx 1$ 时, $K \in (1.6, 1.8)$ 的范围能够吻合很好. 这也证明了采用数值计算方法的正确性. 此外, 数值解不仅得到了 $v_p \gg 1$ 及 $v_p \approx 1$ 时的色散曲线, 同时也得到了介于二者之间的色散曲线, 所以我们可以通过数值求解的方法得到相对论性快电子分布下纵振荡的完整的色散曲线.

由于数值计算的过程非常复杂, 现利用 Origin7.5, 采用多项式回归的方法, 根据数值解中色散曲线的特点进行拟合, 得到图 4 中拟合的色散曲线及无量纲化简单的色散关系表述 $\Omega = 0.81956 - 0.03052K + 0.44019K^2 - 0.06363K^3$ ($d = 5$).

从图 4 可以看出, 拟合得到的色散曲线与数值解吻合得很好, 所以我们可以用拟合得到的简单函数表述来代替复杂的数值计算. 其一般式为 $\Omega = A + BK + CK^2 + DK^3$, 参数为 A 、 B 、 C 、 D . 现将 d 推广到 3、10、15, 得到拟合还原后的色散关系的参数见表 1. 根据研究中需要的条件, 将参数代入一般形式, 即可得到相应的相对论性快电子分布下纵振荡的色散关系.

表 1 d 取不同值时纵振荡的参数

Table 1 Parameters of the longitudinal oscillation when d has different values

$d = \varepsilon_*/mc^2$	A	B	C	D
3	1.32383	-0.01656	0.25788	-0.02056
5	0.81956	-0.03052	0.44019	-0.06363
10	0.56747	0.03092	0.54288	-0.09934
15	0.24653	0.20551	0.79775	-0.25235

2006 年陈辉等^[8]得到了极端相对论条件下 Maxwell 分布纵振荡的色散关系. 图 5 为极端相对论条件下快电子分布与 Maxwell 分布纵振荡的色散曲线. 从图可知, 快电子分布与 Maxwell 分布纵振荡的色散关系在一定的波数范围内有类似的性质. 由于粒子的分布函数表达式不同, 所以色散曲线的起始值也不同.

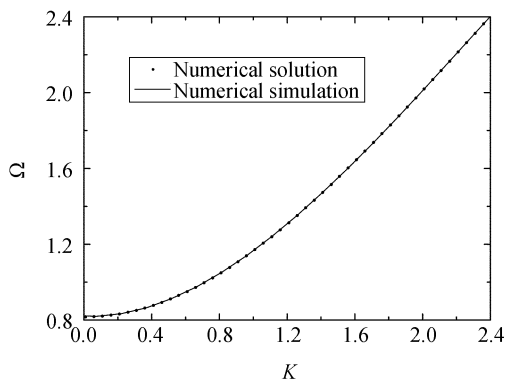


图 4 $d=5$ 时拟合的色散曲线

Fig. 4 Simulation curve of dispersion relation at $d=5$

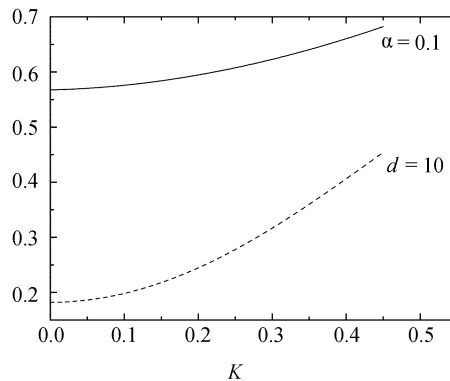


图 5 快电子分布 (虚线) 与 Maxwell 分布 (实线) 的色散关系

Fig. 5 Dispersion relations of fast electron distribution (dashed line) and Maxwell distribution (solid line)

6 结论

从文献 [7] 中的纵介电常数表达式出发, 得到了相对论性快电子分布纵振荡的色散方程, 在相速度大于光速的条件下, 通过理论分析得到长波支和短波支的色散关系. 引入无量纲参量, 得到用于数值计算的无量纲化的纵振荡色散方程, 对其进行数值求解, 数值解不仅得到长波支和短波支的色散关系, 而且将解析中不连续的色散曲线连接起来, 得到快电子分布等离子体中纵振荡完整的色散曲线. 采用多项式回归的方法利用计算机对数值解进行拟合, 得到用简单的函数表述的色散关系以便于应用.

给出了相对论性快电子分布的等离子体中, d 取不同值时纵振荡色散关系的参数表, 可根据条件的需要, 将参数代入一般表达式即可得到相应的色散关系. 这为研究宇宙等离子体中的星系核、射电星系和类星体电磁辐射方面的问题提供了理论参考.

参 考 文 献

- [1] Xue J K, Lang H. PhPl, 2003, 10: 339
- [2] Drummond W E. PhPl, 2004, 11: 552
- [3] Bergman J, Eliasson B. PhPl, 2001, 8: 1482
- [4] 陈辉, 陈约奇, 刘三秋. 南昌大学学报 (理科版), 2005, 29: 461
- [5] 陈约奇, 刘三秋, 姜卫群. 强激光与粒子束, 2006, 18: 313
- [6] Kaplan S A, Tsytovich V N. 章振大, 李晓卿, 译. 等离子体天体物理. 北京: 科学出版社, 1982
- [7] 李晓卿. 等离子元坍塌动力学. 北京: 中国科学技术出版社, 2004: 36-74
- [8] 陈辉, 赵书毅, 刘笑兰, 等. 宜春学院学报 (自然科学版), 2006, 28: 1

Dispersion Relation of Longitudinal Oscillation of Relativistic Plasmas with Fast Electron Distribution

GUO Hong-mei LIU San-qiu

(*Department of Physics, Nanchang University, Nanchang 330031*)

ABSTRACT In the case of relativistic regime, the dispersion equation of longitudinal oscillation for fast electron distribution is derived from the longitudinal permittivity in unmagnetized, collisionless and isotropic plasmas. The equation is analytically solved, then the long-wavelength and short-wavelength dispersion relations are obtained. Because the analytical dispersion curves are discontinuous, the dimensionless dispersion equation is numerically calculated and a full dispersion curve is obtained. Furthermore, by fitting the numerical solutions, a simple function expression of the dispersion curve is given. This is easier to use. Finally, in the case of ultra-relativistic regime, the dispersion relation of fast electron distribution is compared with that of the Maxwell distribution. It is shown that these two dispersion relations share a similar property in a certain range of wave number.

Key words plasmas, relativistic processes, methods: miscellaneous